Álgebra Lineal I. Curso 2019 **Facultad de Ciencias**

Actividad 7: Transformaciones lineales

1. En los siguientes casos determinar si la transformación T es lineal:
   a) $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $T(x) = (x, x)$,
   b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (y - x, z + y)$,
   c) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x^2, x, z - x)$,
   d) $T : C[a, b] \to \mathbb{R}$, $T(f) = f(a)$,
   e) $T : C[a, b] \to C[a, b]$, $T(f) = f^2$.
2. Para cada $a \in \mathbb{R}$, definimos $L_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante $L_a(x) = ax$.
   a) Probar que cada L_a es lineal.
   b) Probar que si $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es lineal, entonces $T = L_a$ para cierto real a.
3. Estudiar si las siguientes funciones son transformaciones lineales.
   a) $T : V \to \mathbb{R}$, $T((a_n)) = \lim a_n$, donde $V = \{(a_n) \mid \exists \lim a_n\}$.
   b) $\mathrm{tr} : M_n(\mathbb{k}) \to \mathbb{k}$, la traza (definida por $tr(((a_{ij}))_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.
   c) $(\_)^t : M_n(\mathbb{k}) \to M_n(\mathbb{k})$, la función que a cada matriz le asocia su traspuesta.
4. Sean V y V' son $\mathbb{k}$-espacios vectoriales. Probar que:
   a) la función $T : V \to V'$ definida por $T(v) = 0_{V'}, \forall v \in V$ es lineal,
   b) si $T, S : V \to V'$ son lineales entonces la función $T + S : V \to V'$ definida por $(T + S)(v) = T(v) + S(v), \forall v \in V$ es lineal,
   c) si $T : V \to V'$ es lineal y $\lambda \in \mathbb{R}$, la función $\lambda T : V \to V'$ definida por $(\lambda T)(v) = \lambda T(v), \forall v \in V$ es lineal.
   d) Usando los items anteriores, darle al espacio de las transformaciones lineales de V en V' una estructura de $\mathbb{k}$ -espacio vectorial.
5. Sean V y V' dos $\mathbb{k}$-espacios vectoriales, $T : V \to V'$ lineal y W un subespacio de V. Probar que la restricción de T a W, $T\big|_W : W \to V'$ definida por $T\big|_W(w) = T(w), \forall w \in W$ es lineal.
6. Hallar el núcleo y la imagen de las transformaciones de los ejercicios 1 y 3.
7. *a*) Sea $D_n(\mathbb{k}) = \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{k}) \mid a_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}$. Probar que $D_n(\mathbb{k}) \cong \mathbb{k}^n$.
   b) Probar que $\mathbb{k}[X]_n \cong \mathbb{k}^{n+1}$.
   c) Probar que $\mathbb{k}^{\{x\}} \cong \mathbb{k}$.
8. Definimos $+ : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ como $a + b = ab$ (el producto usual en los reales)[1] y $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ como $\lambda \cdot a = a^\lambda$.

[1] $\mathbb{R}^+$ denota el conjunto de números reales positivos.

a) Probar que $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$ es un $\mathbb{R}-$espacio vectorial.

b) Probar que dicho espacio vectorial es isomorfo a $\mathbb{R}$ con la estructura usual.

9. *a*) Probar que la siguiente es una transformación lineal:

$$D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], \quad D(a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) = a_1 + 2a_2X \cdots + na_nX^{n-1}$$

b) Mostrar que es sobreyectiva y hallar $N(D)$.

c) Probar que la siguiente es una transformación lineal:

$$T : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X], \quad T(a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n) = a_0X + (a_1/2)X^2 + \cdots + (a_n/n+1)X^{n+1}.$$

d) Hallar su núcleo e imagen.

e) Probar que $D \circ T = \mathrm{id}$ pero que $T \circ D \neq \mathrm{id}$.

10. *a*) Sea V un $\mathbb{R}$–espacio y $j : V \to V$ una transformación lineal tal que $j \circ j = \mathrm{id}_V$. Sean

$$S = \big\{v \in V \mid j(v) = v\big\} \quad , \quad A = \big\{v \in V \mid j(v) = -v\big\}$$

Probar que S y A son subespacios, $V = S + A$ y que $S \cap A = \{0\}$.

b) Aplicar la parte anterior a la función transpuesta, caracterizando primero los espacios S y A.

c) Deducir la descomposición del ejercicio 6 de la Activiad 6, utilizando la primera parte de este ejercicio para una transformación lineal j apropiada.

11. Probar que si $T : V \to W$ y V está generado por X, entonces $Im(T)$ está generado por $T(X)$ (entender bien a qué nos referimos por $T(X)$).

12. Supongamos que V_1, V_2 son subespacios de V y que $T_1 : V_1 \to V, T_2 : V_2 \to V$ son transformaciones lineales.

a) Probar que no necesariamente existe $T : V_1 + V_2 \to V$ tal que $T\big|_{V_1} = T_1$ y $T\big|_{V_2} = T_2$.

b) Probar que si $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ existe una tal T y es única.