Ley de contacto de Hertz: compresión de objetos elásticos

Geofísica de medios granulares

Verificación de la relación fuerza-desplazamiento no lineal y efecto de la geometría de contacto

OBJETIVO

Verificar experimentalmente la **ley de contacto de Hertz** comprimiendo objetos elásticos de diferentes geometrías (esferas y bloques rectangulares) con una prensa manual. Se busca medir la relación fuerza-desplazamiento, extraer el exponente de la ley de potencia $F \propto \delta^n$, y comprobar que $n = 3/2$ para contactos esféricos (Hertz) y $n = 1$ para geometría plana (Hooke). El experimento conecta con los modelos de contacto utilizados en simulaciones DEM y con la propagación de ondas acústicas no lineales en medios granulares.

CONTEXTO FÍSICO

Contacto entre sólidos elásticos

Cuando dos sólidos elásticos se ponen en contacto bajo una fuerza F, se deforman localmente y generan un área de contacto finita. A diferencia de lo que ocurre con un resorte ideal (ley de Hooke: $F = k\delta$), la relación fuerza-desplazamiento para esferas es **no lineal**. Esta no-linealidad tiene consecuencias profundas en la dinámica de los medios granulares: determina cómo se propagan las ondas acústicas, cómo se distribuyen las fuerzas en las cadenas de contacto, y cómo responde un empaquetamiento granular a la compresión.

La ley de Hertz (1882)

Heinrich Hertz demostró que la fuerza de contacto entre dos esferas elásticas idénticas de radio R, módulo de Young E y coeficiente de Poisson ν, crece como la potencia 3/2 del acercamiento δ (la distancia que se comprimen los centros de las esferas respecto a la posición de contacto inicial):

$$F = (4/3)\, E^* \sqrt{R^*} \cdot \delta^{3/2}$$

donde $E^* = E/[2(1 - \nu^2)]$ es el módulo elástico reducido y $R^* = R/2$ es el radio reducido (para dos esferas idénticas). El radio del área de contacto crece como $a = \sqrt{(R^*\delta)}$.

Esta ley es válida en el régimen de **deformaciones pequeñas**: $\delta/R < 0{,}1$. Para deformaciones mayores, el comportamiento se desvía de la predicción hertziana y tiende hacia una respuesta más lineal.

Geometría plana: ley de Hooke

Cuando se comprime un bloque de sección transversal uniforme (por ejemplo, un paralelepípedo de espuma), no hay efecto geométrico de curvatura. La fuerza crece linealmente con el desplazamiento: $F = (EA/L)\, \delta$, donde A es el área de la sección, L la longitud del bloque y E el módulo de Young. Este es el comportamiento de un resorte hookiano con $n = 1$.

Comparar el exponente obtenido para un objeto esférico ($n = 3/2$) con el de un bloque rectangular ($n = 1$) permite demostrar que la no-linealidad de Hertz es un efecto puramente geométrico, no una propiedad del material.

Régimen de grandes deformaciones

Cuando un material muy blando (como una pelota de espuma) se comprime significativamente ($\delta/R > 0{,}1$), la ley de Hertz deja de ser válida. El área de contacto crece más rápidamente que lo predicho, y el comportamiento se acerca al caso lineal ($n \to 1$). En el caso extremo donde la esfera se aplasta completamente, el contacto se asemeja al de una superficie plana. Observar esta transición permite discutir los límites de validez de la teoría y la importancia de la rigidez del material.

Desviaciones: adhesión (modelo JKR)

A fuerzas muy bajas ($\leq$ 0,5 N), la adhesión entre las superficies produce un área de contacto mayor que la predicción hertziana. El modelo JKR (Johnson-Kendall-Roberts) extiende la teoría de Hertz incluyendo la energía de superficie. En este experimento, espolvorear talco sobre las superficies de contacto reduce la adhesión y acerca el comportamiento al modelo de Hertz puro.

Conexión geofísica

La ley de Hertz es la base de todos los modelos de contacto en simulaciones de Elementos Discretos (DEM), utilizadas en geofísica para modelar fallas, flujos granulares y empaquetamientos. La no-linealidad $F \propto \delta^{3/2}$ también gobierna la propagación de ondas acústicas no lineales en medios granulares: la velocidad de propagación depende de la amplitud de la onda, un fenómeno sin análogo en la acústica lineal clásica. La relación entre la presión de confinamiento y la velocidad de las ondas sonoras en arena seca sigue directamente de la ley de Hertz, con aplicaciones en sismología granular y prospección geofísica.

DESCRIPCIÓN DEL EXPERIMENTO

El experimento consiste en comprimir objetos elásticos de diferentes geometrías entre dos platos rígidos, midiendo simultáneamente la fuerza aplicada y el desplazamiento de los platos. Se comparan tres configuraciones:

- **Bola de espuma** (esfera blanda, $R \approx$ 3–4 cm): contacto esférico en régimen de grandes deformaciones. Se espera una desviación de Hertz hacia un comportamiento más lineal.
- **Espuma rectangular** (paralelepípedo, $\approx 3 \times 3 \times 2$ cm): geometría plana. Se espera un comportamiento lineal ($n = 1$, ley de Hooke).
- **Bolita rígida** (esfera dura, $R \approx$ 1–2 cm): contacto esférico en régimen de deformaciones más pequeñas. Se espera $n \approx 3/2$ (Hertz).

ANÁLISIS DE DATOS

El objetivo del análisis es obtener la relación fuerza-desplazamiento para cada geometría y verificar el exponente de la ley de potencia. El desplazamiento se extrae del video y la fuerza de la celda de carga. Se recomienda usar MATLAB.

Paso 1: Cargar datos de fuerza

Leer el archivo `.mat` correspondiente. Contiene dos variables: `peso_g` (lectura de la balanza en gramos) y `tiempo_s` (tiempo en segundos). Convertir a Newtons: F = `peso_g` × 9,81 × 10^{-3}. Graficar $F(t)$ para visualizar el trigger y la fase de compresión.

Paso 2: Extraer desplazamiento del video

El video registra el perfil lateral de la prensa. A medida que el gato sube, la plataforma inferior se desplaza verticalmente. Para extraer $\delta(t)$:

1. Extraer un **strip vertical central** de cada frame (evitando el marco de madera lateral).
2. Promediar horizontalmente para obtener un **perfil de intensidad 1D**.
3. Crear un **template** del borde de la plataforma metálica en el primer frame (franja de ±25 píxeles alrededor del borde más fuerte).
4. En cada frame subsiguiente, buscar la mejor coincidencia del template mediante **correlación cruzada normalizada** (NCC) en una ventana de búsqueda de ±120 píxeles alrededor de la posición anterior.
5. El desplazamiento es la diferencia entre la posición inicial y la actual del borde: $\delta = \mathrm{pos}_0 - \mathrm{pos}(t)$.

Paso 3: Sincronización fuerza-video

Las dos señales (fuerza y desplazamiento) están en bases de tiempo diferentes. Para sincronizarlas, se busca el inicio de la compresión sostenida en ambas señales y se alinean esos instantes. Se define el inicio como el momento en que la señal suavizada supera el 10% de su valor máximo.

Paso 4: Fuerza neta de contacto

Restar el peso en reposo del objeto (fuerza de la balanza cuando $\delta \approx 0$) para obtener la fuerza neta de contacto: $F_{\mathrm{neta}} = F - F_{\mathrm{reposo}}$. Interpolar la fuerza neta a los tiempos del video usando el offset calculado.

Paso 5: Ajuste de ley de potencia

Graficar F vs. δ en escala log-log. Si $F = A \cdot \delta^n$, la gráfica es una recta de pendiente n. Seleccionar interactivamente el rango de datos a ajustar (excluyendo la zona de bajas fuerzas, donde domina la adhesión y el ruido, y la zona de muy altas fuerzas, donde puede haber saturación). Ajustar una recta en log-log.

Paso 6: Comparación entre geometrías

Repetir el análisis para los tres objetos. Comparar los exponentes obtenidos con las predicciones teóricas (n = 1,5 para esferas; n = 1 para bloques rectangulares). Discutir las desviaciones observadas y sus causas físicas.

PREGUNTAS PARA LA DISCUSIÓN

1. Graficar $F(\delta)$ para los tres objetos en escala lineal y log-log. ¿Se observa una diferencia cualitativa entre el contacto esférico y el plano? Describir.

2. ¿Cuáles son los exponentes n obtenidos para cada caso? ¿Son compatibles con las predicciones teóricas (n = 1,5 para esferas; n = 1 para bloques)? Discutir las posibles causas de desviación.

3. Para la bola de espuma (esfera blanda), el exponente obtenido es cercano a 1 en lugar de 1,5. ¿Por qué? Estimar δ/R y discutir si se cumple la condición de validez de Hertz ($\delta/R < 0{,}1$).

4. ¿Cómo afecta la rigidez del material al rango de validez de la ley de Hertz? ¿Qué objeto (bola de espuma vs. bolita rígida) permite verificar mejor la ley? ¿Por qué?

5. La espuma rectangular puede exhibir un exponente $n < 1$ debido al colapso de las celdas de la espuma (plateau en la curva σ–ε de espumas poliméricas). ¿Se observa este efecto? ¿Cómo se manifiesta en el gráfico log-log?

6. ¿Se observa histéresis entre la carga y la descarga? ¿Qué mecanismo físico la produce (viscoelasticidad, fricción interna)?

7. Discutir cómo la no-linealidad $F \propto \delta^{3/2}$ afecta la propagación de ondas en un medio granular. ¿Por qué la velocidad de las ondas depende de la presión de confinamiento? Derivar la relación $v \propto P^{1/6}$ a partir de la ley de Hertz.

8. En simulaciones DEM, ¿por qué se usa la ley de Hertz en lugar de la ley de Hooke para modelar los contactos entre granos? ¿Qué fenómenos se perderían con un modelo lineal?

RESULTADOS ESPERADOS

A modo de guía, los resultados típicos son:

- **Bolita rígida** (esfera dura): $n \approx$ 1,3–1,5, $R^2 > 0{,}85$. Es el caso que mejor verifica la ley de Hertz, ya que las deformaciones son suficientemente pequeñas para mantenerse en el régimen hertziano.
- **Espuma rectangular** (bloque): $n \approx$ 0,8–1,1, $R^2 > 0{,}75$. Comportamiento cercano a lineal (Hooke), confirmando que la no-linealidad de Hertz es un efecto geométrico de la curvatura, no del material.
- **Bola de espuma** (esfera blanda): $n \approx$ 0,9–1,1, $R^2 > 0{,}95$. A pesar de ser una esfera, el exponente se acerca a 1 debido a las grandes deformaciones ($\delta/R >> 0{,}1$). La relación es muy limpia (alto R^2) pero no hertziana.
- En escala log-log, la pendiente de la recta ajustada coincide con el exponente n. La línea de referencia Hertz (n = 1,5, verde) se separa claramente de los datos para los materiales blandos.
- Para goma/caucho duro: $E \approx$ 1–10 MPa, $\nu \approx 0{,}5$.

REFERENCIAS

[1] H. Hertz, *Über die Berührung fester elastischer Körper*, J. Reine Angew. Math. **92**, 156–171 (1882).

[2] K. L. Johnson, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press (1985). Cap. 4.

[3] J. Duran, *Sands, Powders, and Grains: An Introduction to the Physics of Granular Materials*, Springer (2000). Cap. 2, Sec. 2.1.

[4] N. V. Brilliantov, T. Pöschel, *Kinetic Theory of Granular Gases*, Oxford University Press (2004). Cap. 2.

[5] K. L. Johnson, K. Kendall, A. D. Roberts, *Surface energy and the contact of elastic solids*, Proc. R. Soc. Lond. A **324**, 301–313 (1971).

[6] V. F. Nesterenko, *Dynamics of Heterogeneous Materials*, Springer (2001). Cap. 1 — ondas solitarias en cadenas granulares hertzianas.