Actividad 9: Transformaciones lineales, Teorema de las dimensiones, Matriz asociada

1. En cada caso, indicar si está determinada (o bien definida) la transformación lineal T que verifique lo enunciado. En caso afirmativo, calcular T en un vector genérico. En caso negativo, explicitar el por qué de la indeterminación.

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que
   $$T(1,0,0) = (2,1,0),\ T(1,1,0) = (-1,2,3,),\ T(1,1,1) = (0,0,1).$$

   b) $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}^2$ tal que
   $$T(1) = (1,0),\ T(t) = (1,1),\ T(t^2) = (0,0).$$

   c) $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}^2$ tal que
   $$T(1) = (1,0),\ T(t) = (1,1).$$

   d) $T : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}^2$ tal que
   $$T(1) = (1,0),\ T(1+t) = (1,1),\ T(1+t+t^2) = (0,0),\ T(3+2t+t^2) = (2,1).$$

2. En los siguientes casos, determinar cuántas transformaciones hay que verifican las condiciones y en caso de que halla una sola, hallar la forma general:

   a) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1,-1) = (2,1,0),\ T(1,2,1) = (-1,2,3),\ T(1,0,-3) = (0,0,1)$;

   b) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1,-1) = (2,1,0),\ T(1,2,1) = (-1,2,3),\ T(1,0,-3) = (5,0,-3)$;

   c) $T : \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ tal que
   $$T(M_1) = (1,-1),\ T(M_2) = (1,1),\ T(M_3) = (1,1),\ T(M_4) = (3,1),\ T(M_5) = (1,-3),$$
   donde
   $$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. **Coordenadas en una base** Dado un espacio vectorial V de dimensión finita y dada una base $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ de V, se considera la transformación lineal:
   $$\mathbf{c}_B : V \to \mathbb{k}^n \text{ definida por } \mathbf{c}_B(b_i) = e_i.$$

   a) Para $V = \mathbb{R}_2[t]$ y $\mathcal{B} = \{1, 1+t, 1+t+t^2\}$, hallar $\mathbf{c}_B(a+bt+ct^2)$.

   b) Para $V = \mathbb{R}^2$ y $\mathcal{B} = \{(\cos w, \operatorname{sen} w), (-\operatorname{sen} w, \cos w)\}$. Hallar $\mathbf{c}_{\mathcal{B}}(x,y)$.

   c) Probar que para cualesquiera V y B, se tiene que $\mathbf{c}_B$ es un isomorfismo.

4. Sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita y sea $T : V \to W$ una transformación lineal inyectiva.

   (a) Definir $S : W \to V$ transformación lineal que verifique $S \circ T = \mathrm{Id}_V$.

(b) Probar que si si S es como en la parte anterior, entonces es sobreyectiva.

(c) ¿Es única una tal S?

5. **Para matrices cuadradas: invertibilidad de un lado implica invertibilidad de ambos.** Dados $V = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ y $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, definimos la transformación lineal (observar que lo es):

$$T_A : V \to V, \text{ mediante } T(M) = AM.$$

   a) Sean A, B tales que $AB = I_n$.
      1) Probar que $T_A \circ T_B = id_V$.
      2) Deducir que T_A y T_B son isomorfismos.

   b) Usar la parte anterior para probar que toda matriz cuadrada invertible a izquierda es invertible a derecha.

   c) Deducir que toda matriz cuadrada invertible a izquierda es invertible.

6. Sea T_A como en el ejercicio anterior y L_A como definida en clase. Probar que son equivalentes:

   (i) A es invertible
   (ii) T_A es isomorfismo,
   (iii) L_A es isomorfismo,
   (iv) las columnas de A son linealmente independientes,
   (v) las filas de A son linealmente independientes,
   (vi) el sistema $Ax = b$ es compatible determinado, para cualquier vector $b \in \mathbb{R}^n$.

7. En cada caso, hallar núcleo e imagen de T_A:

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

   b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

8. **Teorema de las dimensiones**
Sean V, W dos espacios vectoriales. con $\dim(V) = n < \infty$ y $T : V \to W$ una transformación lineal. Probar que

$$\dim(V) = \dim \mathrm{N}(T) + \dim \mathrm{Im}(T)$$

SUGERENCIA: Considerar una base $\widehat{\mathcal{B}} = \{v_1, \dots v_m\}$ de $N(T)$, completarla a una base de $\mathcal{B}$ de V, y usar que $T(\mathcal{B})$ genera $Im(T)$.

9. **Proyecciones**
Se considera un espacio vectorial V de dimensión finita y un subespacio W. Para cada N complemento directo de W, se define:

$$p : V \to V \text{ mediante } p(w + n) = w, \forall w \in W, n \in N.$$

   a) Probar que p es lineal.

   b) Hallar núcleo e imagen de p.

   c) Probar que $p^2 = p$.

d) Considerar $V = \mathbb{R}^2$, W la recta de ecuación $y = 0$.

1) Hallar dos posibles complementos directos de W.
2) Calcular $p(x, y)$ para cada uno de ellos.
3) Interpretar geométricamente.

Esta tranformación lleva el nombre de **proyección sobre W según la dirección de N.**

10. Sea $\mathbb{R}_n[x]$ el espacio vectorial de todos los polinomios con coeficientes reales de grado menor o igual a n, con $n \geq 1$.

Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, consideramos el subconjunto $V_\alpha = \{p \in \mathbb{R}_n[x] \mid p(\alpha) = 0\}$.

a) Probar que V_α es un subespacio de $\mathbb{R}_n[x]$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y que $0 \subsetneq V_\alpha \subsetneq \mathbb{R}_n[x]$.

b) Se considera ahora la transformación $T_\alpha : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}$, definida por $T(p) = p(\alpha)$.

1) Probar que T es lineal.
2) Averiguar si T es o no inyectiva, justificando la respuesta.
3) Averiguar si T es o no sobreyectiva, justificando la respuesta.

c) Calcular $\dim(V_\alpha)$.

d) Probar que si $\alpha \neq \beta$, se tiene $V_\alpha + V_\beta = \mathbb{R}_n[x]$. Decidir si dicha suma es o no directa.

11. Completar las cosas que quedaron como ejercicio en las demostraciones del Teorema 1, Proposición 1.3, Corolario 1.4 y Corolario 1.5 de las notas de Transformaciones lineales y bases.

12. Sean $T : V \to \mathbb{R}$ y $S : V \to \mathbb{R}$ transformaciones lineales, donde $\dim(V) = n$. Probar que:

a) $\dim(N(T)) = n$ ó $n - 1$.

b) $N(T) = N(S)$ si y sólo si existe un número real $\alpha \neq 0$ tal que $T = \alpha S$.

c) Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $T(x, y, z) = x + y + z$. Hallar $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, lineal, sabiendo que $N(T) = N(S)$ y $S(1, 0, 0) = 2$.

13. Sean $T : V \to W$ y $S : V \to W$ dos transformaciones lineales entre espacios vectoriales de dimensión finita, y tales que $Im(T) = Im(S)$.

a) Probar que $\dim(N(T)) = \dim(N(S))$.

b) ¿Es cierto que $T = S$? ¿Y que $N(T) = N(S)$? Justifique su respuesta.

14. Decidir si las dos afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas, dando una demostración o un contraejemplo según corresponda.

a) Si $T\colon V \to W$, lineal, es tal que existe un conjunto $A = \{v_1, \ldots, v_r\} \subset V$ linealmente independiente que cumple que $T(A) = \{T(v_1), \ldots, T(v_r)\}$ es también linealmente independiente, entonces es inyectiva.

b) Si $T\colon V \to W$, lineal es tal que existe una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ de V, que cumple que $T(B) = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es también linealmente independiente, entonces es inyectiva.

15. Si V es un espacio vectorial y $T : V \to W$ es una transformación lineal. Se define $S = \left\{v \in V :\ T^3(v) = T(v)\right\}$.

a) Probar que S es un subespacio vectorial de V.

b) Consideramos ahora el caso en que $V \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ es el subespacio generado por el conjunto $\{f_n : n \in Z\}$ siendo $f_n : R \to R$ tal que $f_n(x) = e^{nx}$, y $T : V \to C^{\infty}(\mathbb{R})$ tal que $T(f) = f\,'$.

1) Hallar S.
2) Hallar $N(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$ y verificar que $N(T) \subset S$.

16. En los siguientes casos, hallar la matriz asociada a T en las bases canónicas de los espacios considerados:

(a) $T : \mathbb{k}^3 \to \mathbb{k}^3$ tal que $T(x, y, z) = (y - z, 2x + y, x + y + z)$.

(b) $T : \mathbb{k}_2[x] \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{k})$ tal que $T(p) = \begin{pmatrix} p(0) & p'(0) \\ p(1) & p'(1) \end{pmatrix}$.

(c) la traza $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{k}) \to \mathbb{k}$, $\mathrm{tr}\big((a_{ij})_{ij}\big) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

17. Para
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$
se considera la transformación lineal T_A del ejercicio 5. Hallar la matriz asociada a T en la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

18. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal cuya matriz asociada en la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$. Hallar un base de $\mathrm{N}(T)$ y una base de $\mathrm{Im}(T)$.

19. Sean $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[x]$ y $S : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que:
$$_C[T]_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } {}_B[S]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
donde $\mathcal{B} = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ y $\mathcal{C} = \{1, 1 + x, 1 + x^2\}$ es base de $\mathbb{R}_2[x]$.

(a) Hallar bases para $\mathrm{N}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.

(b) Hallar bases para $\mathrm{N}(S \circ T)$ e $\mathrm{Im}(S \circ T)$.

(c) Hallar la matriz asociada de $H = 3(T \circ S) + \mathrm{Id}_{\mathbb{R}_2[x]}$ en la base $\{1, x, x^2\}$.

20. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $_C[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, donde $\mathcal{C}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(a) Hallar $T(x, y, z)$.

(b) Hallar la matriz asociada T en la base $\mathcal{B} = \{(-1, 1, 0), (1, -1, 1), (0, 1, -1)\}$.

(c) Determinar si T es invertible.

21. Sea $T : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_3[x]$ dada por $T(p) = p + p' + p''$.

(a) Hallar la matriz asociada a T en la base canónica.

(b) Demostrar que T es invertible.

(c) Hallar la matriz asociada a T^{-1} en la base canónica.

22. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una rotación de centro 0 ángulo α en sentido antihorario. Sea $\mathcal{B} = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

a) Hallar $_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}$.

b) Hallar $_{\mathcal{B}}[T^2]_{\mathcal{B}}$, siendo $T^2 = T \circ T$.

c) Deducir fórmulas para $\cos(2\alpha)$ y $\mathrm{sen}(2\alpha)$

23. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$_{\mathcal{A}}[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $\mathcal{B} = ((1,-1,1),(1,1,1),(1,0,0))$ y $\mathcal{A} = ((1,2,0),(2,1,0),(1,1,1))$.
Hallar $T(x,y,z)$.

24. Sea $T_A : \mathcal{M}_{2\times 2}(\Bbbk) \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\Bbbk)$ como en cada caso del ejercicio 7.

   (a) Hallar en cada caso $_C[T_A]_C$ siendo $\mathcal{C}$ la base canónica de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\Bbbk)$.

   (b) En caso en que T_A sea invertible, hallar $_C[T^{-1}]_C$.

   (c) Sea $S : \mathcal{M}_{2\times 2}(\Bbbk) \to \Bbbk_2[x]$ definida por $S\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + cx^2$. Hallar en cada caso la matriz asociada a $S \circ T_A$ en las bases canónicas de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\Bbbk)$ y $\Bbbk_2[x]$.

25. *a*) Sea $id : \Bbbk_2[x] \to \Bbbk_2[x]$ la transformación identidad y sea $\mathcal{B} = \{x^2-1, x-1, 1\}$ una base de $\Bbbk_2[x]$. Hallar $_C[\mathrm{id}]_B$ y $_B[\mathrm{id}]_C$, siendo $\mathcal{C}$ la base canónica de $\Bbbk_2[x]$.

   b) Verificar que son inversas.

   (b) Sea $p(x) = 3x^2 + 2$. Hallar sus coordenadas en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$.

26. Sean $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,0)\}$ base de $\Bbbk^2$, $\mathcal{C} = \{(1,1,1),(1,1,0),(-1,0,0)\}$ base de $\Bbbk^3$ y $T : \Bbbk^3 \to \Bbbk^2$ tal que $_B[T]_C = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{smallmatrix}\right)$. Hallar $T(x,y,z)$ y $_{C_2}[T]_{C_3}$.

27. Sea $T : \Bbbk^3 \to \Bbbk^2$ lineal tal que $T(1,0,0) = (1,-2)$, $T(0,1,0) = (2,4)$, $T(0,0,1) = (1,-1)$.

   (a) Hallar $T(x,y,z)$.

   (b) Hallar la matriz asociada a T en las bases canónicas de $\Bbbk^3$ y $\Bbbk^2$.

   (c) Hallar $\mathrm{N}(T)$.

   (d) Hallar la matriz asociada a T en las bases $\mathcal{B} = \{(1,0,1),(0,1,0),(-1,0,0)\}$ de $\Bbbk^3$ y la base canónica de $\Bbbk^2$.

28. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y,z) = (3x+2y-4z, x-5y+3z)$. Hallar $_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{A}}$ en los siguientes casos.

   a) $\mathcal{A} = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ y $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$.

   b) $\mathcal{A} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ y $\mathcal{B} = \{(1,0),(0,1)\}$.

   c) $\mathcal{A} = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ y $\mathcal{B} = \{(1,3),(2,5)\}$.

29. Sea $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$_{\mathcal{U}}[T]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

donde $\mathcal{E} = \{1, x+1, (x+1)^2\}$ y $\mathcal{U} = \{(1,1,0),(1,2,3),(3,2,1)\}$.

   a) Hallar $T(x^2+x-1)$.

   b) Hallar la expresión general de $T(p)$ siendo $p = ax^2+bx+c$ un polinomio genérico de $\mathbb{R}_2[x]$.

30. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$T(x, y, z) = (2x - y + z, 3y - z, x + 2y + z).$$

Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por

$$\mathcal{A} = \{(1, 0, 1), (-1, 1, 2)\}.$$

Hallar la matriz asociada a la restricción de T a W, $T|_W : W \to \mathbb{R}^3$, utilizando $\mathcal{A}$ como base de W y la base canónica $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$.

31. Sea $T : \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ una transformación lineal tal que $T(AB) = T(BA)$ para todas $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Probar que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $T(A) = k \operatorname{tr}(A)$.

Sugerencia: Considerar la base canónica de $\mathcal{M}_{n\times n}$.

32. Sea $T : \mathbb{R}^5 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ definida por

$$T(a, b, c, d, e) = \begin{pmatrix} a - d & -a + b + 3c - 3d \\ b + 3c - 3d - e & d - e \end{pmatrix}.$$

Hallas bases B y C de $\mathbb{R}^5$ y $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ respectivamente, tal que la matriz asociada a T en esas bases sea

$$_C(T)_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

33. (a) Probar que $\mathcal{A} = \{(1, 1, 1, -1), (1, 1, 0, 1), (1, -1, 1, 1), (0, 1, 1, 1)\}$ y $\mathcal{B} = \{(1, 1, 1, 0), (1, 1, -1, 1), (1, 0, 1, 1), (-1, 1, 1, 1)\}$ son bases de $\mathbb{R}^4$.

(b) Hallar las coordenadas de los vectores de $\mathcal{A}$ en la base $\mathcal{B}$ y las coordenadas de los vectores de $\mathcal{B}$ en la base $\mathcal{A}$.

(c) Escribir las matrices de cambio de base $_B[\mathrm{id}]_A$ y $_A[\mathrm{id}]_B$

a) Observar que el vector $(3, 2, 3, 2)$ es la suma de los elementos de la base $\mathcal{A}$. Hallar sus coordenadas en la base $\mathcal{A}$ utilizando la parte anterior.

34. Dos matrices cuadradas A y B se dicen **semejantes** si existe una matriz invertible P tal que $A = PBP^{-1}$. (Notar que esta no es la semejanza de matrices definida en el capítulo 7 de las notas- esa noción no vamos a usarla).

a) Probar que la semejanza es una relación de equivalencia.

b) Probar que si $T : V \to V$ es lineal y B, C son bases de V, entonces

$$_B[T]_B \text{ y } _C[T]_C \text{ son semejantes.}$$