Parcial de EDP y Transformada de Fourier

Parcial II - 6/07/2020

1. Supongamos que para ciertas funciones fijas $\alpha(r) \neq 0$ y $\beta(r) \geq 0$, $r > 0$, y para toda función $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la expresión,

$$u(x,t) = \alpha(|x|)\phi(t - \beta(|x|)), \tag{1}$$

es una solución de la ecuación de ondas en $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$. Demuestre que la dimensión espacial debe ser $n = 1$ o $n = 3$. Halle en dichos casos las expresiones posibles para α y β.

2. Usando la transformada de Fourier demuestre que existe $C > 0$ tal que si $u \in H^k(\mathbb{R}^n)$ con $k \geq n/2$, entonces,

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u\|_{H^k(\mathbb{R}^n)}. \tag{2}$$

(Sugerencia: recuerde que $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$ es el supremo de $|u|$ (para ser estrictos, como u está definida a menos de un conjunto de medida nula, debe tomarse el supremo esencial, esto es $\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} = \inf\{a > 0 : \mu(\{|u| \geq a\}) = 0\}$, con μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$). Para la prueba debe usar la fórmula $u = \check{\hat{u}}$, teniendo en cuenta las propiedades de $\hat{u}$ si $u \in H^k$).

3. En este ejercicio $x, \overline{x}, y \in \mathbb{R}^n$ y el producto interno se denota con un punto: $x.y = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^n}$.

   (a) Demuestre que para todo $R > 0$ y $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|y| \leq R$ y $|x - \overline{x}| \leq \delta$ entonces $|e^{ix.y} - e^{i\overline{x}.y}| \leq \epsilon$.

   (b) Use la parte anterior para demostrar que la transformada de Fourier de una función en $L^1(\mathbb{R}^n)$ es continua, es decir, si $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\hat{u} \in C^0(\mathbb{R}^n)$. (Sugerencia: use que si una función u está en $L^1(\mathbb{R}^n)$ entonces $\int_{B^c(0,R)} |u|dx \to 0$ cuando $R \to \infty$).

4. Demuestre que la única solución $u \in C^2(\mathbb{R}^3) \cap H^3(\mathbb{R}^3)$ de,

$$\Delta u = u^3 \tag{3}$$

es la trivial $u = 0$. (Sugerencia: pruebe que u tiende a cero en infinito usando alguno de los problemas anteriores en este parcial. Luego use el principio del máximo para funciones sub y super armónicas).