1	2	3	4	Total

Apellido y nombre:

Bioestadística
- Final Diciembre 2015 -

Ejercicio 1.

Un individuo (generación 0) de una población tiene hijos con la siguiente distribución: ningún hijo, con probabilidad $\frac{1}{4}$, uno con probabilidad $\frac{1}{2}$ y dos con probabilidad $\frac{1}{4}$. La siguiente generación, se rige con la misma ley de probabilidad y en forma independiente de la generación anterior.

1. Cuál es la probabilidad que en la primera generación haya al menos un individuo?
2. Cuál es la probabilidad que la descendencia del individuo se extinga en la segunda generación? (Hacerse un dibujito)
3. Hallar la esperanza de hijos de la primera generación.
4. Si una población se compone de 100 individuos. Cuántos descendientes espera encontrar aproximadamente en la segunda generación?
5. Sabiendo que hay dos individuos en la segunda generación, cuál es la probabilidad que sean hermanos?

Solución.

1. P(al menos un individuo=1-P(ninguno)=1-1/4=3/4.
2. Si se extingue en la segunda generación quiere decir que los indiviudos de la progenie de la primera, no tuvieron hijos. Para calcular esta probabilidad usamos probabilidad total condicionando en la cantidad de hijos de la primera generación:

   $P(ninguno\, 2a) = P(ninguno\ en\ la\ segunda|uno\ en\ la\ primera)P(uno\ en\ la\ primera)+ P(ninguno\ en\ la\ segunda|dos\ en\ la\ primera)P(dos\ en\ la\ primera)$

   $P(ninguno\ 2a) = \frac{1}{4}\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{1}{4} = 9/64$
3. Llamando X a la cantidad de hijos: $E(X) = 0P(X = 0) + 1P(X = 1) + 2P(X = 2) = 1$
4. Para ello debemos calcular la esperanza de los individuos de la segunda generación. Para eso debemos hallar las probabilidades que en la segunda generación haya, 0, 1, 2 y 3 individuos. Escribiendo como Y la cantidad de hijos nacidos en la segunda generación, se tiene:

$P(Y=0) = 9/64$ calculado en la primera parte.

$P(Y=1) = P(Y=1|X=1)P(X=1) + P(Y=1|X=2)P(X=2) = 1/2 \cdot 1/2 + 2 \cdot (1/2 \cdot 1/4) \cdot 1/4 = 5/16$

$P(Y=2) = P(Y=2|X=1)P(X=1) + P(Y=2|X=2)P(X=2) = 1/4 \cdot 1/2 + (1/2 \cdot 1/2) \cdot 1/4 = 3/16$

$P(Y=3) = P(Y=3|X=2)P(X=2) = 2 \cdot (1/4 \cdot 1/2) \cdot 1/4 = 1/16$

$P(Y=4) = P(Y=4|X=2)P(X=2) = (1/4 \cdot 1/4) \cdot 1/4 = 1/64$

$\Rightarrow E(Y) = 0P(Y=0) + 1P(Y=1) + 2P(Y=2) + 3P(Y=3) + 4P(Y=4) = 5/16 + 2 \cdot 3/16 + 3 \cdot 1/16 + 4 \cdot 1/64 = 5/8.$

Si la población inicial tenía 100 individuos, la descendencia esperada es la suma de sus descendencias esperadas (aplicando linealidad de la esperanza). Por lo tanto se esperan aproximadamente $(100 \cdot 5/8) = 62.5$. O sea que se esperan alrededor de 63 individuos en la segunda generación.

5. Si hay dos individuos, para que sean hermanos, tienen que haber sido del mismo padre, por lo tanto, en la genración anterior tiene que haber nacido un individuo solamente.

   $P(X=1|Y=2) = \frac{P(X=1,Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{1/2 \cdot 1/4}{3/16} = 2/3$

Ejercicio 2.

La estatura es una característica medida en todo el mundo. Luego de años de investigación se sabe que las alturas de los hombres de entre 20 y 30 años en el mundo siguen una distribución normal, en la que sólo la media varía. Se realizó un muestreo para saber si existen diferencias de altura entre los hombres uruguayos y argentinos. En Argentina se muestrearon 74 personas. El promedio de los datos fue 174,4 cm y su desvío 0.13 cm, mientras que en Uruguay se muestrearon 48 hombres, el promedio fue 174.3 cm y el desvío 0.12 cm.

1. Decir qué test se puede hacer para saber si existen diferencias de altura entre estas poblaciones. Decir cuáles son sus hipótesis.
2. Hallar el estadístico para el test anterior y dar su p-valor.

Solución

1. Para ver si existen diferencias de altura entre las poblaciones, podemos hacer un test paramétrico de comparación de muestras para ver si sus medias son iguales o no.

   $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$

2. Como podemos suponer que la distribución de los datos es normal y ambas poblaciones tienen la misma varianza, el estadístico del test es:

$$t = \frac{\bar{X_1} - \bar{X_2}}{S_{X_1 X_2}\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$$

,

donde
$$S_{X_1X_2} = \sqrt{\frac{(n_1-1)S^2_{X_1} + (n_2-1)S^2_{X_2}}{n_1+n_2-2}} = 0.126$$

$\Rightarrow t \approx 4.28.$

Como nuestro test es a dos colas, las probabilidad de la tabla de student corresponen a $\alpha/2$ El mayor valor que se encuentra en la tabla de Student para 74 + 48 - 2 = 120 grados de libertad, es 2.576 con una probablidad de 0.995. Por lo tanto el α correspondiente para ese valor en nuestro test es 0.01, por lo tanto el p-valor para 4.28 es menor que 0.01. Por lo tanto las diferencias son significativas.

Ejercicio 3.

Un laboratorio decide investigar la prevalencia de la hipertensión arterial en la población de adultos mayores de Montevideo. Para eso, toman una muestra aleatoria de 100 individuos y encuentran que 37 de ellos sufren de esta enfermedad.

1. Dar un intervalo de confianza al 95% para la proporción de adultos mayores con hipertensión arterial.
2. ¿Cuál es la cantidad mínima n_0 de personas que hay que estudiar si se desea que el intervalo de confianza al 99% para estimar la media tenga una amplitud menor a 0.1?

   Sugerencia: Utilizar que el valor máximo de la función $\sqrt{x(1-x)}$ se da cuando $x = 0.5$

Solución.

1. Dar un intervalo de confianza al 95% para la proporción de adultos mayores con hipertensión arterial.
2. ¿Cuál es la cantidad mínima n_0 de personas que hay que estudiar si se desea que el intervalo de confianza al 99% para estimar la media tenga una amplitud menor a 0.1?

   Sugerencia: Utilizar que el valor máximo de la función $\sqrt{x(1-x)}$ se da cuando $x = 0.5$

Ejercicio 4.

Dados los siguientes datos ordenados:

-6,5	-5,3	-4,1	-3,8	-1,5	-1,2	0,8	1,0	1,8	1,9	3,0	5,9

1. Realizar un test para determinar si pueden provenir de una distribución normal. Especificar hipótesis del test y p-valor. (Se puede usar que $s_n = 3,57$).
2. Realizar un test al nivel $\alpha = 0.99$ para determinar si puede afirmarse que $\mu = 1$ (siendo $\mu = \mathbb{E}(X)$).