TEOREMA 148. *Si f es periódica, continua y $f^{'} \in \mathcal{L}^1$ entonces la serie de Fourier converge uniformemente a la función.*

DEMOSTRACIÓN. Como ya calculamos anteriormente, integrando por partes se puede probar que

$$a_n = -\frac{1}{n\pi}\int_{-L}^{L} f^{'}(x) sen\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = -\frac{L}{n\pi}b_n^{'}$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}\int_{-L}^{L} f^{'}(x) cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = -\frac{L}{n\pi}a_n^{'}$$

siendo $a_n^{'}$ y $b_n^{'}$ los coeficientes de Fourier de $f^{'}$. Por lo tanto

$$\left|\tilde{f}\right| \leq \frac{1}{2}|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty}|a_n| + |b_n| \leq \frac{1}{2}|a_0| + \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\left|a_n^{'}\right| + \left|b_n^{'}\right|\right)$$

. Luego, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\left|a_n^{'}\right| + \left|b_n^{'}\right|\right) \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|a_n^{'}\right| + \left|b_n^{'}\right|\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

y dado que $\left(\left|a_n^{'}\right| + \left|b_n^{'}\right|\right)^2 \leq 2\left(\left|a_n^{'}\right|^2 + \left|b_n^{'}\right|^2\right)$ entonces

$$\left|\tilde{f}\right| \leq \frac{1}{2}|a_0| + \frac{\sqrt{2}L}{\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left|a_n^{'}\right| + \left|b_n^{'}\right|\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

. Por la desigualdad de Bessel la de la izquierda es una sucesión convergente y por tanto f converge uniformemente. □

Un resultado aún menos exigente es el siguiente.

TEOREMA 149. *Si f es periódica, seccionalmente continua y $f^{'} \in \mathcal{L}^1$ entonces la serie de Fourier converge uniformemente a la función en cualquier intervalo cerrado que no contenga los puntos de discontinuidad.*

DEMOSTRACIÓN. Por razones de tiempo no discutiremos la demostración de este resultado. □

7.4. Transformadas de Fourier

Introducción.

Al inicio del curso tomamos como ejemplo al oscilador unidimensional forzado descrito por la ecuación

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t)$$

y planteamos que si f es periódica, de período $2L$, y tiene condiciones de regularidad suficientes, entonces las series de Fourier nos permiten encontrar una solución de esta ecuación. El método que ensayamos entonces y que explicitamos ahora es representar a f por su serie de Fourier $(\tilde{f})$ y buscar una serie de Fourier $(\tilde{x})$ para

x, asumiendo que $\widetilde{\frac{d^2x}{dt^2}} = \frac{d^2\tilde{x}}{dt^2}$. Usando el desarrollo en exponenciales complejas de las series de Fourier y la notación

$$\widetilde{f}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{i\frac{n\pi}{L}t}, \quad \widetilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{i\frac{n\pi}{L}t}, \quad \frac{d^2\widetilde{x}}{dt^2}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \left(i\frac{n\pi}{L}\right)^2 e^{i\frac{n\pi}{L}t}$$

, la ecuación diferencial anterior se convierte en al ecuación

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n \left(i\frac{n\pi}{L}\right)^2 e^{i\frac{n\pi}{L}t} + \omega^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{i\frac{n\pi}{L}t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_n e^{i\frac{n\pi}{L}t}$$

o equivalentemente

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\left(\omega^2 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\right) x_n - f_n\right] e^{i\frac{n\pi}{L}t} = 0$$

. Por unicidad de la serie de Fourier esta igualdad resulta en el sistema de ecuaciones algebraicas

$$\left(\omega^2 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}\right) x_n - f_n = 0, \quad \forall x \in \mathbb{Z}$$

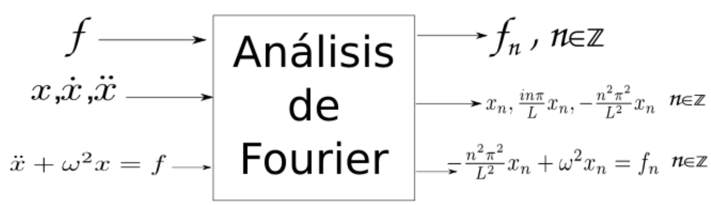
. Este es un sistema de infinitas ecuaciones, pero muy simple de resolver, arrojando

$$x_n = \frac{f_n}{\omega^2 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}}, \quad \forall x \in \mathbb{Z}$$

. Finalmente la solución es

$$\widetilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{f_n}{\omega^2 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}} e^{i\frac{n\pi}{L}t}$$

. El ejemplo anterior nos ayuda a introducir una perspectiva de las series de Fourier como transformaciones que ayudan a resolver ecuaciones diferenciales, pasando funciones en $\mathbb{R}$ a coeficientes y ecuaciones diferenciales a ecuaciones algebraicas de esos coeficientes. El siguiente esquema resume la idea



La observación central sobre el esquema anterior es que a la izquierda hay funciones (reales o complejas) del tiempo y los objetos de la derecha pueden pensarse como funciones (reales o complejas) de un parámetro discreto n. Para fijar ideas tomemos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y consideremos la función $F : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ que le asocia a cada entero n el coeficiente de Fourier f_n de f, es decir

$$F(n) = f_n$$

. Entonces podemos pensar en la transformación $\mathcal{F}$ que lleva la función f a la función discreta F recién definida y podemos escribir

$$\mathcal{F}(f) = F$$

. Es importante notar que esta transformación convierte a la derivación en una operación multiplicativa, ya que

$$F(x)(n) = x_n$$

y

$$F(\dot{x})(n) = \frac{in\pi}{L} x_n = \frac{in\pi}{L} F(x)(n)$$

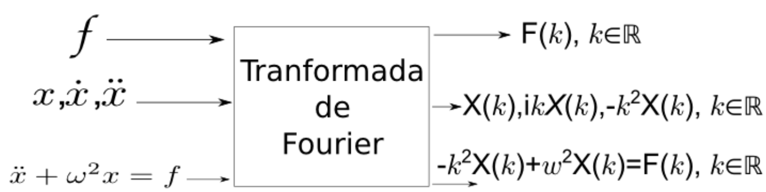
, de hecho esta propiedad de la transformación $\mathcal{F}$ es la que nos permite pasar de una ecuación diferencial a una algebraica.

La imagen anterior nos da una visión más amplia del análisis de Fourier y es el primer paso para responder a la pregunta ¿qué pasa si la función f no es periódica, digamos $f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$? Es claro que esta función no tiene una serie de Fourier que la represente en todo $\mathbb{R}$, pero veremos en breve que se puede definir una transformación $\mathcal{F}$ que lleva la ecuación diferencial a una ecuación algebraica para resolver el problema de forma análoga al anterior. La diferencia principal es que esa transformación no nos dará funciones sobre un parámetro discreto (n) sino sobre un parámetro continuo (que llamaremos k). Dicha transformación se denomina *transformada de Fourier.*

La propiedad de esta transformación que nos permitirá pasar de ecuaciones diferenciales a ecuaciones algebraicas es análoga a la nos permitió hacerlo anteriormente. Si $\mathcal{F}$ es la transformación mencionada y definimos $F = \mathcal{F}(f)$ entonces se cumplirá

$$\mathcal{F}(\dot{f})(k) = ikF(k)$$

, con esto el esquema de resolución de la EDO con una fuente no periódica f pasará a ser



El último ingrediente de este esquema, que no era explícito en el caso de las series de Fourier, es la existencia de una transformación inversa $\mathcal{F}^{-1}$ que nos permita llevar la solución de la ecuación algebraica

$$X(k) = \frac{F(k)}{\omega^2 - k^2}$$

a una función del tiempo $x(t)$. En el caso de las funciones periódicas consistía simplemente en la serie

$$\widetilde{x}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{f_n}{\omega^2 - \frac{n^2\pi^2}{L^2}} e^{i\frac{n\pi}{L}t}$$

, pero deberemos ser cuidadosos para extender esta idea a las transformadas de Fourier.

Enfoque informal. Es posible introducir la transformada de Fourier como una extensión de las series de Fourier, aunque es necesario advertir que este enfoque es tan intuitivo como informal. Así mismo, la presentación formal de la Transformada de Fourier supera los objetivos de este curso, por lo cual presentaremos este enfoque informal, mencionando sus puntos débiles para que los interesados puedan investigar en la abundante literatura sobre el tema.

La serie de Fourier están definida para funciones periódicas, por lo tanto imaginemos a una función no periódica como una función periódica cuyo período es muy grande. A los efectos prácticos no existe forma de diferenciar entre ambas situaciones y entonces, intuitivamente, sería esperable que el límite de la serie de Fourier cuando el período tiende a $+\infty$ nos de una representación de una función no periódica. Esta idea intuitiva resulta ser correcta.

Consideremos una función f periódica $2L$ que puede representarse por su serie de Fourier exponencial

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{n\pi}{L}x}$$

donde

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\frac{n\pi}{L}x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}$$

y definamos las cantidades $k_0 \equiv \frac{\pi}{L}$, $k_n \equiv nk_0$. Esta es una sucesión de reales equiespaciados ya que $\Delta k \equiv k_{n+1} - k_n = k_0$. Si consideramos el límite $L \to +\infty$ vemos que $k_0 \to 0$ y por lo tanto, la distancia entre valores consecutivos de k_n también tiende a cero. A su vez, los coeficientes de la serie de Fourier c_n también tienen a cero, lo cual no nos da información sobre lo que pasa con la serie de Fourier (que sigue sumando infinitos términos). La definición de los coeficientes

$$c(k_n) \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} L c_n = \sqrt{2\pi} \frac{c_n}{\Delta k}$$

aclara la situación pues estos son coeficientes que no tienden necesariamente a cero cuando $L \to \infty$ ya que

$$c(k_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-ik_n x} dx, \quad n \in \mathbb{Z}$$

. Si además los sustituimos en la serie de Fourier entonces

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} c(k_n) \Delta k e^{ik_n x}$$

. Esta suma nos recuerda a la definición de la integral de Riemann y nos invita a pensar que, en el límite $L \to \infty$ deberíamos obtener la integral

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} c(k) e^{ikx} dk$$

donde k pasa a ser una variable continua que recorre todos los reales. Se dice que $\tilde{f}$ es la anti-transformada de Fourier de c. Así mismo, el coeficiente de Fourier, que en adelante llamaremos *Transformada de Fourier de* f, pasa a ser

$$c(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}dx, \quad k\in\mathbb{R}$$

La elección de un conjunto de funciones que resuelvan los problemas de convergencia de ambas integrales y de unicidad de estas transformaciones es el punto central de la discusión formal de la Transformada de Fourier.

Observación 150. La elección del factor $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ se realizó al definir el coeficiente $c(k_n)$ y se hizo para que tanto la transformada como la anti-transformada estén definidas de forma simétrica. En la literatura se encuentran varias definiciones equivalentes que difieren en la elección de dicho factor. Así mismo se encuentran definiciones en las cuales el signo de la exponencial está cambiado (positivo en la transformada y negativo en la anti-transformada). El aspecto central es que dichos signos sean opuestos.

Ejemplo 151. Consideremos la función no periódica

$$f(x)=\left\{\begin{array}{ll} 1, & |x|\leq d \\ 0, & |x|>d \end{array}\right., d>0$$

. Esta función tiene una transformada de Fourier, dada por

$$c(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-d}^{d} e^{-ikx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-ikd}-e^{ikd}}{-ik}$$

$$c(k)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{sen(kd)}{k}$$

. Nótese que la función f es C^{∞} por tramos y que pertenece a $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$, pero en cambio c no es una función absolutamente integrable en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, la existencia de la transformación inversa no está debidamente justificada. Este tipo de detalles serán cruciales para definir adecuadamente las transformadas de Fourier, como comentaremos en la siguiente sección.

Definiciones y propiedades básicas. En base al tratamiento informal proponemos la siguiente definición.

Definición 152. dada una función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definimos su transformada de Fourier como

$$F(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\lim_{M,N\to+\infty}\int\limits_{-M}^{+N} f(x)e^{-ikx}dx$$

debiendo tomarse los límites en N y M de forma independiente.

Esta transformación posee muchas propiedades interesantes, pero mencionaremos dos que nos interesan en este curso:

- La TF es una transformación lineal pues, si $h=f+g$ entonces

$$H(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(f+g)(x)e^{-ikx}dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}dx+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)e^{-ikx}dx$$

$$H(k) = F(k) + G(k)$$

- Se cumple la propiedad anunciada sobre la derivada para funciones f que decaen a cero en infinito, ya que si llamamos $g = f^{'}$ entonces

$$G(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f^{'}(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[f(x) e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} -ikf(x) e^{-ikx} dx \right] =$$

$$= \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx = ikF(k)$$

Evidentemente no toda función tiene una transformada de Fourier bien definida. Por ello se requiere reducir la familia de funciones a considerar. Por ejemplo, si nos restringimos a funciones $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ entonces su transformada de Fourier está bien definida, es continua y

$$\underset{|k| \to +\infty}{lim} F(k) = 0$$

por el lema de Riemann-Lebesgue. Sin embargo, como vimos en el último ejemplo, el hecho de que la función de partida sea $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ no garantiza que también lo sea su transformada. Esto implica que la transformada inversa no está, necesariamente, bien definida y pone en riesgo el uso de las transformadas de Fourier como una herramienta para resolver ecuaciones diferenciales. La solución de este problema es acotar aún más la familia de funciones a considerar y existen dos propuestas típicas.

Espacio $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Definiendo el conjunto de funciones

$$C_0^\infty(\mathbb{R}) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad supp(f) \ compacto \}$$

, donde $supp(f)$ refiere al soporte de f (calusura del conjunto de puntos donde la función no es nula). Un ejemplo típico de función en este conjunto es la definida por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}}, \ |x| < 1 \\ 0, \quad |x| \geq 1 \end{cases}$$

cuyo soporte es el intervalo $[-1, 1]$. Este conjunto de funciones «chichón» es un espacio vectorial de funciones y en él está definida la transformada de Fourier y su inversa. El problema es que la transformada de Fourier de una función en este espacio no pertenece a él. Es decir, en este espacio la transformada de Fourier es una transformación lineal sobre un espacio vectorial, pero su imagen no cae en el mismo espacio. En este sentido, $C_0^\infty(\mathbb{R})$ es un espacio demasiado «pequeño». Esto motiva introducir el siguiente espacio.

Espacio $\mathcal{S}$. Se llama espacio de Schwartz al de las funciones

$$\mathcal{S} = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}), \underset{|x| \to \infty}{lim} x^m f^{(n)}(x) = 0 \ \forall m, n \geq 0 \right\}$$

, es decir el de las funciones suaves que tanto ellas como sus derivadas de todo orden caen a 0 en infinito más rápido que cualquier potencia de x. Este es un espacio vectorial y la transformada de Fourier lleva un elemento de este espacio en otro elemento del mismo espacio. Aquí resulta ser una transformación lineal invertible de un espacio vectorial ($\mathcal{S}$) en si mismo. Además, es fácil ver que si una función está en $\mathcal{S}$ también lo estarán sus derivadas de cualquier orden. Luego, todas sus derivadas tendrán una transformada de Fourier bien definida. Es evidente que $\mathcal{S}$ incluye al conjunto $C_0^\infty(\mathbb{R})$, pero otras representantes conocidas de este conjunto son las guassianas como $f(x) = e^{-x^2}$ cuyo soporte es claramente no acotado.

La noción de ortogonalidad. Una noción central en las series de Fourier era la ortogonalidad. En el caso del conjunto de funciones complejas $\left\{\psi_n(x) = e^{i\frac{n\pi}{L}x}, n \in \mathbb{Z}\right\}$ la ortogonalidad en $[-L, L]$ respecto del producto interno de $\mathcal{L}^2([-L, L])$ se sintetiza en la expresión

$$\frac{1}{2L}\int\limits_{-L}^{L} \psi_n(x)\psi_m^*(x)dx = \frac{1}{2L}\int\limits_{-L}^{L} e^{i\frac{n\pi}{L}x}e^{-i\frac{m\pi}{L}x}dx = \delta_{nm}$$

. Este sentido de ortogonalidad se extiende a las transformadas de Fourier, pero de nuevo, el formalismo matemático necesario supera los objetivos de este curso. Sin embargo podemos volver a tomar un enfoque informal, pero intuitivo que arroja el resultado correcto.

Supongamos que $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, entonces su transformada de Fourier

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}dx$$

está bien definida y también lo está la inversa

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(k^{'})e^{ik^{'}x}dk^{'}$$

. Combinando estos resultados obtenemos

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(k^{'})e^{ik^{'}x}dk^{'}\right]e^{-ikx}dx$$

. Asumiendo que las integrales son intercambiables entonces

$$F(k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(k^{'})\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ik^{'}x}e^{-ikx}dx\right]dk^{'}$$

. Esta igualdad no tiene sentido en término de integrales de funciones, pues de hecho el objeto entre paréntesis rectos no es una integral convergente si $k = k^{'}$, pero sí tiene sentido en la teoría de distribuciones de Schwartz que introdujimos anteriormente. Por definición de la Delta de Dirac

$$F(k) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(k^{'})\delta(k - k^{'})dk^{'}$$

. Por lo tanto, en dicho contexto

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{ik^{'}x}e^{-ikx}dx = \delta(k - k^{'})$$

. Esta es la expresión de la ortogonalidad de las exponenciales $\left\{e^{ikx}, k \in \mathbb{R}\right\}$ y sólo tiene sentido como una igualdad entre distribuciones, pues estas funciones no son integrables ni absolutamente integrables.

De forma aún más intuitiva y menos formal, si tomamos la expresión

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} e^{i\frac{n\pi}{L}x}e^{-i\frac{m\pi}{L}x}dx = \delta_{nm}$$

para la ortogonalidad de las exponenciales $\left\{e^{i\frac{n\pi}{L}x}, n \in \mathbb{Z}\right\}$ e introducimos la variable $k_n = \frac{n\pi}{L}$ como hicimos en la introducción, en el límite de $L \to \infty$ podemos pasar a la expresión

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} e^{ik_nx}e^{-ik_mx}dx = \frac{L}{\pi}\delta_{nm}$$

. La expresión de la izquierda tiende a $\frac{1}{2\pi}\int_{-L}^{L} e^{ikx}e^{-ik'x}dx$, con $k, k' \in \mathbb{R}$ mientas que la expresión de la derecha tiende a una objeto que vale cero si $k \neq k'(n \neq m)$ y diverge si $k = k'(n = m)$. Estas son propiedades esperadas para la Delta de Dirac.