Capítulo 5

Funciones generalizadas (distribuciones)

5.1. Introducción

La delta de Dirac.

En 1930 P.A.M. Dirac introdujo una «notación conveniente» para una generalización continua de la delta de Kronecker que llamó «función Delta». Como ya sabemos

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases} , i, j \in \mathbb{N}$$

. Esta función discreta cumple

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \delta_{ij} = 1$$

y también si tenemos la sucesión real $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, entonces

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} a_j \delta_{ij} = a_i$$

. Dirac dio la notación δ a una «función» que cumple

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \delta(x - x_0) dx = 1$$

y dada la función $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} a(x)\delta(x - x_0) dx = a(x_0)$$

. En particular, si el punto x_0 no pertenece al soporte de a entonces

$$\int\limits_{\mathbb{R}} a(x)\delta(x - x_0) dx = 0$$

. Él usó esta idea en el contexto de mecánica cuántica, pero tiene muchos otros usos en física. Por ejemplo, para representar una carga (o masa) puntual como una densidad espacial de carga (o masa).

Si una carga puntual q ubicada en el punto x_0 puede representarse por una densidad $\rho(\vec{x})$ entonces esta densidad debe cumplir $\int\limits_V \rho(\vec{x}) d^3\vec{x} = 0$ si el volumen no incluye a la carga puntual y $\int\limits_V \rho(\vec{x}) d^3\vec{x} = q$. Esto conduce a identificar

$$\rho(\vec{x}) = q\delta(\vec{x} - \vec{x}_0)$$

. No existe ninguna función que cumpla las propiedades indicadas, pero encuentran su lugar en la teoría de Schwartz de las distribuciones (o funciones generalizadas), que le valió la medalla Fields en 1950.

El escalón y su derivada.

Previo a la notación de Dirac, Oliver Heavieside introdujo la Delta como una noción generalizada de la derivada de la función escalón

$$H(x-x_0)=\begin{cases}1, x>x_0\\0, x<x_0\end{cases}$$

. Es claro que esta función no es derivable en $x=x_0$, pero si operamos formalmente podemos calcular integrales que involucren a $H^{'}$ de la siguiente manera. Consideremos una función $a(x)$ de soporte compacto, entonces

$$\int\limits_{\mathbb{R}} a(x)H^{'}(x-x_0)dx = a(x)H(x-x_0)|_{-\infty}^{+\infty} - \int\limits_{\mathbb{R}} a^{'}(x)H(x-x_0)dx = 0 - \int\limits_{x_0}^{+\infty} a^{'}(x) = a(x_0)$$

. Esto nos lleva a identificar

$$H^{'}=\delta$$

.

Observación 117. La integral

$$\int\limits_{\mathbb{R}} a(x)H^{'}(x-x_0)dx$$

no tiene sentido como integral de funciones usuales, pues$H^{'}(x-x_0)=0$ si $x\neq x_0$. Por lo tanto dicha integral debería ser nula (Para empezar sólo tendría sentido como integral de Lebesgue y no de Riemann al no estar definida en x_0).

5.2. Límite generalizado

Una forma de introducir las funciones generalizadas, que se puede realizar de forma rigurosa, es mediante límites generalizados.

Consideremos una función g sumable, es decir que

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\, dx < \infty$$

. Entonces la función $g_\epsilon(x)=\frac{1}{\epsilon}g(\frac{x}{\epsilon})$ cumple

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_\epsilon(x-x_0)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g\left(\frac{x-x_0}{\epsilon}\right)\frac{1}{\epsilon}dx = \left[\begin{array}{c} s=\frac{x-a}{\epsilon}\\ ds=\frac{1}{\epsilon}dx\end{array}\right] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(s)ds$$

. Por ejemplo si partimos de la función gaussiana

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$

que cumple $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx=1$ entonces la familia de funciones

$$g_\epsilon(x-x_0)=\frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}}e^{-(x-x_0)^2/\epsilon^2}$$

también cumple $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_\epsilon(x)dx = 1$. Por otro lado está familia cumple que $\underset{\epsilon\to 0}{lim} g_\epsilon(x - x_0) = 0$ si $x \neq x_0$, pero dicho límite no existe cuando $x = x_0$ pues

$$g_\epsilon(0) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}}$$

. Informalmente podemos definir

$$\delta\left(x - x_0\right) = \underset{\epsilon\to 0}{lim} g_\epsilon(x - x_0)$$

, pero la falla en esta definición es que el límite de la familia g_ϵ cuando $\epsilon \to 0$ no es una función. Formalmente, sin embargo podemos definir

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left[\underset{\epsilon\to 0}{lim} g_\epsilon(x - x_0)\right]dx \equiv \underset{\epsilon\to 0}{lim}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)g_\epsilon(x - x_0)dx$$

. Para la familia

$$g_\epsilon(x - x_0) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-(x-x_0)^2/\epsilon^2}$$

ese cálculo arroja

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left[\underset{\epsilon\to 0}{lim} g_\epsilon(x - x_0)\right]dx \equiv \underset{\epsilon\to 0}{lim}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)g_\epsilon(x - a)dx = f(x_0)$$

, cumpliendo así con la propiedad que define a la delta.

5.3. Teoría de Schwartz

La teoría de Schwartz incorpora las generalizaciones necesarias, pensando a las «funciones generalizadas» como distribuciones, es decir, como objetos que adquieren sentido cuando se integran multiplicados por alguna función suficientemente suave. Formalmente se definen las distribuciones como funcionales lineales sobre un espacio vectorial de funciones τ, que llamaremos *espacio de funciones de prueba*.

Para fijar ideas tomemos como espacio de funciones de prueba $\tau = \{f \in C^\infty(\mathbb{R})\}$ con f de soporte compacto. Luego las distribuciones sobre τ son las funciones lineales $u : \tau \to \mathbb{R}$ (funcionales).

Ejemplo 118. Tomando el espacio de funciones de prueba τ:

- El escalón de Hevieside es una distribución definida por

$$H[f] \equiv \int\limits_{0}^{+\infty} f(x)dx = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)H(x)dx\right)$$

- La delta de Dirac es una distribución definida por

$$\delta[f] \equiv f(0) = \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x)dx\right)$$

- Cualquier función $g \in \tau$ tiene una distribución asociada, definida por

$$g[f] \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)dx$$

Derivada distribucional.

Para una función $g \in \tau$ se cumple que $g^{'} \in \tau$ y entonces su distribución asociada es.

$$g^{'}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g^{'}(x)f(x)dx = gf|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f^{'}(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} g^{'}(x)f(x)dx = -g(f^{'})$$

. Esta característica se usa como definición de derivada de una distribución, de forma que

$$u^{'}(f) \equiv -u(f^{'})$$

. Por ejemplo, para la función escalón

$$H^{'}(f) = -H(f^{'}) = -\int_{0}^{+\infty} f^{'}(x)dx = f(0) = \delta(f)$$

.

5.4. Aplicación a ecuaciones no-homogéneas

Dada una EDO lineal de la forma

$$Ly = b$$

se llama solución elemental a la distribución que satisface

$$L[E](x,a) = \delta(x-a)$$

y $E(x,a) = 0$ si $x < a$. Esta es una ecuación para distribuciones y por lo tanto, los métodos estudiados en este curso no pueden aplicarse inmediatamente para tratarla. Sin embargo, si tenemos una solución de esta ecuación, entonces tenemos una imagen muy clara sobre el significado del método de Cauchy para resolver

$$Ly = b$$

. En primer lugar apliquemos el método de Cauchy a la ecuación con fuente elemental. Así, la solución particular es

$$E(x,a) = \int_{x_0}^{x} k(x,s)\delta(s-a)ds = H(x-a)\,k(x,a)$$

. Con este resultado vemos inmediatamente que

$$\int_{x_0}^{+\infty} E(x,s)b(s)ds = \int_{x_0}^{+\infty} [H(x-s)\,K(x,s)]\,b(s)ds = \int_{x_0}^{x} K(x,s)b(s)ds = y_p(x)$$

siendo esta última la solución particular de

$$Ly = b$$

obtenida por el método de Cauchy. Esto quiere decir que la solución particular de este método se obtiene calculando la respuesta de la EDO a impulsos elementales (deltas) e integrándola con la fuente como función de prueba.