Teoría Electromagnética
Curso 2022

Práctico 2
Imágenes. Ecuaciones de Laplace y Poisson: funciones de Green y desarrollos ortogonales.

1. Considere una esfera conductora aislada de radio R, sin carga neta y una carga q situada a una distancia $d > R$ del centro de la esfera. Usando el método de las imágenes:

a) Calcule la fuerza electrostática entre la esfera y la carga.

b) Calcule la densidad de carga eléctrica inducida si la carga q se sitúa a $d = 2R$ y $d = 4R$.

c) Suponiendo ahora que la esfera tiene una carga eléctrica neta Q, calcule la fuerza para $Q = q$, $Q = 2q$ y $Q = 4q$ con $d = 2R$.

2. a) Un capacitor (bi-dimensional) de placas paralelas infinitas separadas por una distancia d tiene un lado a potencial 0 y el otro también, salvo por un segmento de longitud $2a$, que se encuentra a potencial V_0. Determine el potencial dentro del capacitor.

b) Determine el potencial entre dos planos paralelos separados una distancia d, ambos a potencial cero salvo por un cuadrado de lado a en uno de ellos a potencial V_0.

3. Un cascarón esférico conductor está compuesto por 2 semiesferas a potenciales V_0 y $-V_0$.

a) Determine la función de Green para resolver el problema exterior.

b) Exprese la solución del potencial como una integral en términos de las variables que se muestran en la figura 1. Suponga que existe una distribución arbitaria de carga $\rho(\vec{r})$ en el exterior del cascarón y que la división de las semiesferas está en el plano Oxy.

c) Suponiendo $\rho(\vec{r}) = 0$ (vacío en el exterior) calcule los primeros términos del potencial, desarrollándolo en series de potencias.

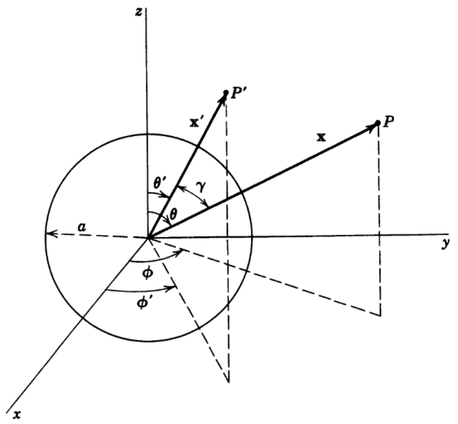

Figura 1

4. Considere el mismo cascarón del problema anterior sin otras distribuciones de carga.

a) Resolviendo la ecución de Laplace, determine el potencial dentro y fuera del cascarón como un desarrollo en armónicos esféricos.

b) Escriba explícitamente los primeros términos del desarrollo.

5. Calcule el potencial debido a una cáscara esférica de radio a con densidad de carga uniforme σ_0 pero sin la parte correspondiente al interior de un cono θ_0 (un *mate* con densidad de carga uniforme) tanto dentro como fuera de la cáscara.

6. Calcule el potencial dentro de un cascarón esférico a potencial V_0 que contiene un dipolo $\vec{p}$ en el centro.

7. Un disco de radio a y cargado con carga Q distribuida uniformemente, se ubica dentro de una esfera conductora de radio b, que se encuentra conectada a tierra. Los centros del disco y de la esfera coinciden.

a) Determine el potencial en todos los puntos del eje del disco.

b) Determine el potencial en todo el interior de la esfera.

c) Determine la densidad de carga inducida en la esfera.

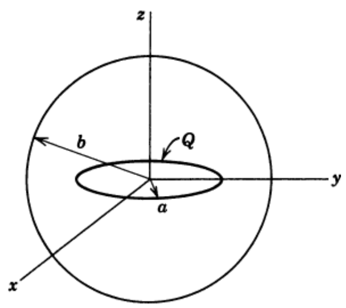

Figura 2: Ejercicio 7.

8. Considere dos cascarones esféricos concéntricos de radios a y b (con $b > a$).

a) Demuestre que la función de Green para el problema de Dirichlet entre los cascarones es:

$$G_D\left(\vec{x}, \vec{x}'\right) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \frac{Y_{lm}^*(\theta', \phi') Y_{lm}(\theta, \phi)}{(2l+1)\left[1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{2l+1}\right]} \left(r_<^l - \frac{a^{2l+1}}{r_<^{l+1}}\right) \left(\frac{1}{r_>^{l+1}} - \frac{r_>^l}{b^{2l+1}}\right)$$

b) Estudie los límites $a \to 0$, $b \to \infty$ y $a = cte$, $b \to \infty$. Interprételos.

c) Considere que los cascarones están a potencial cero y que hay una carga puntual q (fija) a medio camino entre ambos. Ubicando el sistema de coordenadas de manera conveniente, obtenga el potencial para todo punto entre los cascarones.

9. Considere el sistema de la figura 3, formado por dos cascarones conductores concéntricos de radios a y b. Cada uno está dividido en el ecuador en dos hemisferios y los cuatro hemisferios resultantes se mantienen a tierra y $+V$ según se indica en la figura 3.

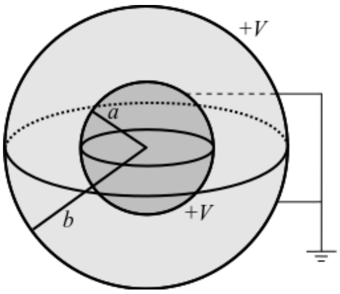

Figura 3: Ejercicio 9.

a) Utilizando la función de Green adecuada, halle una expresión integral para el potencial entre las esferas.

b) Desarrollando los integrandos de la expresión anterior, obtenga una forma explícita del potencial (sólo se pide conservar términos a primer orden).

10. Calcule el potencial en el interior de un cilindro circular recto de radio a y altura h si:

a) el potencial en la cara lateral y una tapa es cero, y en la otra tapa es $V_0 \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]$.

b) el potencial en la cara lateral y una tapa es cero, y en la otra tapa es $V_0 \operatorname{sen}(2\phi)$.

c) el potencial es cero en las tapas y V_0 (uniforme) en la superficie lateral.

d) el potencial es cero en las tapas y $V_0 \frac{z(h-z)}{h^2}$ en la superficie lateral.

Fórmulas útiles:

$$\int xJ_0(x)\,dx = xJ_1(x)\,, \int x^3 J_0(x)\,dx = 2x^2 J_2(x) - x^3 J_3(x)\,, \int xJ_2(x)\,dx = -2J_0(x) - xJ_1(x)$$