Teoría Electromagnética
Curso 2022

Práctico 3
Desarrollo Multipolar del potencial. Medios materiales.

1. a) Calcule los momentos dipolares y cuadrupolares cartesianos para las distribuciones de cargas que se muestran en la figura (1).

b) Calcule los momentos multipolares en coordenadas esféricas q_{lm} para las mismas distribuciones.

c) Para la distribución de la figura (1b) escriba la expresión multipolar del potencial. Manteniendo sólo los primeros órdenes, grafique el potencial en el plano xy como función de la distancia.

d) Determine el potencial exacto en el plano xy mediante la ley de Coulomb y compare con el resultado de (c).

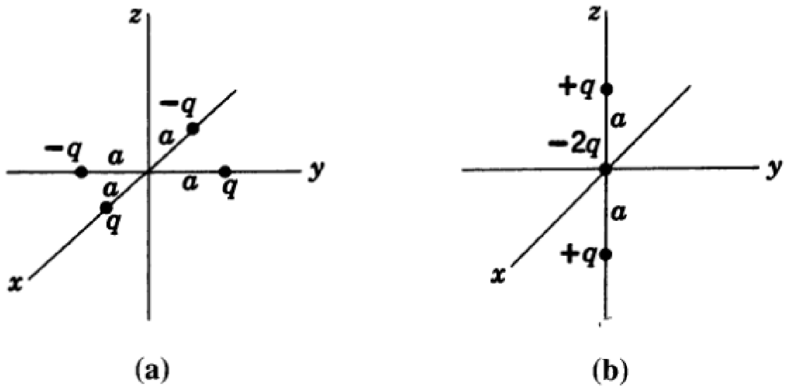

Figura 1: Ejercicio 1.

2. El espectro de radiación de ciertos núcleos atómicos presenta características que se pueden interpretar como provenientes de rotaciones y vibraciones de la superficie nuclear en el *modelo de gota líquida* del núcleo [1]. En este modelo se considera al núcleo como como una gota de un líquido incompresible uniformemente cargado, cuya superficie móvil se describe desarrollando el radio como función de la dirección en armónicos esféricos:

$$R(\theta,\phi,t) \;=\; R_0\left(1+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\alpha_{lm}(t)Y_l^m(\theta,\phi)\right)$$

[1]Ver por ej. *Nuclear Models*, W. Greiner - J. Maruhn, p. 106.

donde R_0 es el radio del núcleo esférico y $\alpha_{lm}(t)$ son coeficientes pequeños que describen la variación temporal.

a) Muestre que debe ser: $(-1)^m \alpha^*_{lm}(t) = \alpha_{l-m}(t)$.

b) Considere sólo $l = 2$ y halle los multipolos que contribuyen en ese caso.

3. * Una distribución de carga localizada tiene una densidad:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{1}{64\pi} r^2 e^{-r} \sin^2\theta$$

a) Escriba el desarrollo multipolar del potencial a causa de dicha densidad de carga y determine todos los momentos multipolares no nulos. Escriba el potencial a grandes distancias como una expansión finita de Polinomios de Legendre.

b) Determine el potencial explícitamente en cualquier punto del espacio y demuestre que cerca del origen se aproxima a

$$\Phi(\vec{r}) \simeq \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{4} - \frac{r^2}{120} P_2(\cos\theta)\right]$$

c) Si en el origen existe un núcleo de momento cuadrupolar $Q = 10^{-28} m^2$, determine la magnitud de la energía de interacción, asumiendo que la unidad de carga en $\rho(\vec{r})$ es la carga del electrón e, y la unidad de longitud es el radio de Bohr $a_0 = 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/me^2 = 0{,}529 \times 10^{-10} m$. Exprese su respuesta como una frecuencia.

Nota: $\int_{r=0}^{r=\infty} r^{4+l} e^{-r} dr = \Gamma(l+5)$

4. Se coloca una capa cilíndrica circular recta de gran longitud, de constante dieléctrica ε y de radio exterior a y radio interior b en un campo E_0 inicialmente uniforme, siendo el eje del cilindro perpendicular al campo. Dentro y fuera del cilindro hay vacío.

a) Determine el potencial y el campo eléctrico en las tres regiones, despreciando el efecto debido a los extremos.

b) Represente las líneas de campo para $b \simeq 2a$.

c) Discuta las formas límite de la solución obtenida que corresponda a un cilindro dieléctrico en un campo uniforme, y una cavidad cilíndrica en un dieléctrico uniforme.

5. Una carga puntual q es colocada en el vacío a una distancia d del centro de una esfera dieléctrica de permitividad ε y radio a $(a < d)$.

a) Determine el potencial en todo el espacio como una expansión en armónicos esféricos.

b) Determine el campo E_0 cerca del centro de la esfera.

c) Verifique que el en límite $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \to \infty$ se obtiene el mismo resultado que para una esfera conductora.

6. Exprese el desarrollo en armónicos esféricos del campo magnético $\vec{B}$ producido por una espira circular delgada de radio a que conduce una corriente I, para puntos lejanos, como muestra la figura 2.

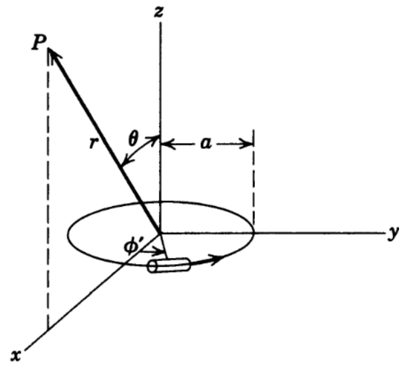

Figura 2

7. Considere un cascarón esférico hueco de radio a, cuya superficie tiene una carga eléctrica Q distribuida de manera uniforme. El interior y el exterior del cascarón se encuentran vacíos. El cascarón gira en torno a un diámetro con velocidad angular $\vec{\omega}$ constante.

a) Determine la densidad de corriente eléctrica superficial y exprésela también como una densidad volumétrica (en coordenadas esféricas).

b) Muestre que para éste problema se puede definir dentro y fuera del cascarón un potencial escalar magnético. Encuentre una expresión para el potencial escalar magnético como una expansión en armónicos esféricos (tanto dentro como fuera del cascarón).

c) Determine el campo magnético $\vec{B}$ en ambas regiones e interprete el resultado dibujando esquemáticamente las líneas de campo magnético.