Teoría Electromagnética
Curso 2022

Práctico 4
Leyes de conservación

1. Una carga eléctrica puntual q se ubica en las coordenadas cartesianas $(a, 0, 0)$, y otra carga $-q$ se ubica en $(-a, 0, 0)$. Un campo magnético uniforme $\vec{B} = B\hat{z}$ llena todo el espacio.

a) Probar que las líneas de vector de Poynting o son cerradas, o empiezan y terminan en el infinito (mostrar que para eso es suficiente que $\nabla.\vec{S} = 0$).

b) Dibuje varias líneas de vector de Poynting, incluyendo la que pasa por el origen de coordenadas, y comente.

2. Una cáscara cilíndrica larga de longitud L, radio R y espesor despreciable tiene una carga superficial σ. La cáscara comienza a girar en torno a su eje aumentando linealmente la velocidad angular desde el reposo a hasta una velocidad angular final ω en un tiempo T.

a) Determine la densidad de momento del campo electromagnético en todo el espacio, antes, durante y después de la rotación acelerada.

b) Pruebe que la cantidad de movimiento total del campo electromagnético es nula siempre.

3. a) Muestre que el tensor de tensiones de Maxwell para un problema electrostático tiene un eje principal según el campo eléctrico $\vec{E}$ y otros dos ejes principales en el plano normal a $\vec{E}$. Muestre que en esos ejes:

$$\overleftrightarrow{T} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pista: resuelva el problema de autovalores $\overleftrightarrow{T} \cdot \vec{v} = \lambda\vec{v}$.

b) Partiendo del tensor de tensiones de Maxwell, determine la densidad de flujo de momento a través de una superficie si:

i) la normal es paralela a campo $\vec{E}$.

ii) La normal es perpendicular al campo $\vec{E}$.

4. Considere un capacitor formado por dos placas paralelas infinitas con la placa inferior en $z = -d/2$ y densidad de carga $-\sigma$ y la superior en $z = d/2$ y densidad de carga σ.

a) Determine el tensor de tensiones de Maxwell para puntos entre las placas.

b) Calcule la fuerza por unidad de área en la placa superior a partir de a).

c) Calcule la cantidad de movimiento por unidad de área y por unidad de tiempo que atraviesa el plano $z = 0$.

d) A partir de la cantidad de movimiento que absorben las placas, calcule nuevamente la fuerza por unidad de área.

5. Considere los siguientes problemas que involucran esferas. En todos ellos llamemos hemisferio superior al que se identifica con la coordenada $\theta < \frac{\pi}{2}$ en coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) centradas en el centro de la esfera e inferior cuando $\theta > \frac{\pi}{2}$. Llamemos $\hat{z}$ a la dirección con respecto a la cual se mide θ.

a) Determine la fuerza sobre el hemisferio superior de una esfera sólida uniformemente cargada usando el tensor de tensiones de Maxwell.

b) Determine la fuerza electrostática sobre el hemisferio superior de una esfera conductora aislada y sometida a campo eléctrico externo uniforme $E_0\hat{z}$.

c) Determine la fuerza de atracción magnética entre el hemisferio superior e inferior de una cáscara esférica de radio R con densidad de carga superficial uniforme σ, que gira en torno a su centro con velocidad angular $\omega\hat{z}$.

6. Considere una cáscara cilíndrica infinita de radio a, por la que circula una corriente I uniformemente distribuida y paralela a su eje. Calcule la fuerza por unidad de área sobre la cáscara.

7. Considere un solenoide largo de radio R, n vueltas por unidad de longitud y corriente I, y dos superficies cilíndricas coaxiales con el solenoide, de longitud l. Una de estas superficies cilíndricas, de radio $a < R$ y masa m_a está dentro del solenoide con una carga Q uniformemente distribuida, mientras que la otra (de radio $b > R$ y masa m_b) esta fuera del solenoide con una carga $-Q$, también uniformemente distribuida.

a) Calcule el momento angular del campo electromagnético respecto al eje.

b) La corriente se disminuye gradualmente hasta cero, y los cilindros comienzan a rotar respecto de su eje. Calcule el momento angular ganado por los cilindros asumiendo que la velocidad angular del cilindro interior (ω_a) y la del cilindro exterior (ω_b) se relacionan mediante $\omega_b = -k\omega_a$ con k una constante.

c) Calcule el torque respecto al eje sobre ambos cilindros asumiendo que la corriente $I(t)$ es conocida y que cambia lentamente. Deduzca el valor de la constante k de la parte anterior.

8. Considere un modelo del electrón como un cascarón esférico uniformemente cargado con carga e y radio R girando con velocidad angular ω respecto a su centro.

a) Calcule la energía total del campo electromagnético.

b) Calcule el momento angular total del campo electromagnético respecto al centro.

c) Suponga que la masa del electrón es de origen electromagnético en su totalidad

$$m_e c^2 = U_{em}$$

y que esto también es cierto para su momento angular $L = \hbar/2$. Determine el radio, la velocidad angular del electrón y su producto.

d) ¿Le parece un modelo razonable? Discuta.