

**Teoría Electromagnética**  
**Curso 2022**

**Práctico 5**  
**Ondas en medios lineales, conductores y dispersivos.**

1. Considere una onda electromagnética monocromática plana propagándose en el vacío. En ese caso se puede escribir:

$$\mathbf{E}(\vec{r}, t) = [E_1 \hat{e}_1 + E_2 \hat{e}_2] e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

donde  $E_1$  y  $E_2$  son dos números complejos y  $\hat{e}_1$ ,  $\hat{e}_2$  son dos versores (reales) que cumplen:

$$\begin{aligned} \hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 &= \hat{e}_1 \cdot \hat{k} = \hat{e}_2 \cdot \hat{k} = 0 \\ \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 &= \hat{k} \end{aligned}$$

- a) Pruebe que si  $E_1$  y  $E_2$  tienen la misma fase, entonces representan a una onda cuyos campos oscilan en una dirección espacial fija (polarización lineal).
- b) Pruebe que si  $E_2 = \pm i E_1$  entonces corresponde a un campo eléctrico cuya dirección gira con velocidad angular  $\omega$  en sentido antihorario y horario respectivamente (visto de frente a la onda y fijando la posición  $\vec{r}$ ). Estas son las polarizaciones llamadas circular izquierda y circular derecha.
- c) Dos ondas monocromáticas planas tienen la misma frecuencia, número de onda y amplitud, pero polarizaciones circulares opuestas. Demuestre que la superposición de las dos ondas es una onda linealmente polarizada con amplitud doble.
2. a) Para una onda monocromática, pruebe que el promedio temporal del vector de Poynting se puede calcular como:

$$\langle \vec{S} \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*]$$

- b) Muestre que en un medio material se cumplen las relaciones:

$$\begin{aligned} \vec{k} \cdot \vec{D} &= 0 & \vec{k} \times \vec{E} &= \omega \vec{B} \\ \vec{k} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{k} \times \vec{H} &= -\omega \vec{D} \end{aligned}$$

y demuestre que en un medio no-magnético general el vector de Poynting es:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0 \omega} \left[ E^2 \vec{k} - (\vec{E} \cdot \vec{k}) \vec{E} \right].$$

3. Considere dos ondas monocromáticas planas en el vacío con las mismas  $\omega$ ,  $\vec{k}$  y dirección de polarización, pero distintas amplitudes y fases:  $E_1, 0$  y  $E_2, \phi$ .
  - a) Calcule el promedio temporal del vector de Poynting de la superposición de las dos ondas.
  - b) El efecto de interferencia que se observa debido a la diferencia de fases ¿ocurriría si las direcciones de polarización fueran perpendiculares? Explique.
4. Calcule el tensor de tensiones de Maxwell para una onda monocromática plana que se mueve en la dirección  $\hat{z}$  y está polarizada en la dirección  $\hat{x}$ . ¿Cómo se relaciona el flujo de momento con el flujo de energía en este caso?
5. Determine los coeficientes de transmisión y reflexión cuando una onda monocromática plana y linealmente polarizada incide en un medio dieléctrico lineal en los casos de:
  - a) polarización paralela al plano de incidencia.
  - b) polarización perpendicular al plano de incidencia.
  - c) Estudie en ambos casos la posible existencia de un ángulo de incidencia para el cual no hay onda reflejada. Este es el llamado ángulo de Brewster.
6. Para una onda electromagnética plana incidente desde un medio de índice de refracción  $n_1$  a uno de índice de refracción  $n_2$ , con  $n_1 > n_2$ , si el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo crítico:

$$\theta_C \equiv \arcsen(n_2/n_1)$$

se da el fenómeno de reflexión interna total.

- a) Estudie los campos en ese caso a ambos lados de la interfase para el caso de polarización perpendicular al plano de incidencia.
  - b) Construya el vector de Poynting y pruebe que en promedio no se trasmite energía hacia el medio 2 (ver *Jackson, secc. 7.4*).
7. a) Una onda monocromática plana linealmente polarizada incide normalmente en una placa de espesor  $d$  de un medio dieléctrico con índice de refracción  $n$  y  $\mu = \mu_0$  rodeada por el vacío. Calcule los coeficientes de transmisión y reflexión. Discuta en función de  $d$ .
    - b) Discuta la situación considerada en a), pero para un medio conductor de conductividad  $g$ .
  8. a) Cierta cantidad de carga libre se coloca en un medio de vidrio cuya conductividad es  $g = 10^{-11}(\Omega m)^{-1}$ . Estime el tiempo promedio que tardará la carga libre en llegar a la superficie.
    - b) Si se desea hacer un experimento en condiciones de aislamiento con microondas a una frecuencia de  $10^{10} Hz$ , la plata es buen candidato para el recubrimiento ya que

es un muy buen conductor, pero es muy caro. Calcule el espesor de plata mínimo conveniente para este experimento.

c) Calcule la velocidad de propagación y la longitud de onda que tienen las ondas de radio de  $1\text{ MHz}$  de frecuencia en cobre. Compare con los valores correspondientes en el vacío. ¿Una onda de radio de  $1\text{ MHz}$  puede penetrar en el cobre una distancia de una longitud de onda?

9. a) Pruebe que la profundidad de penetración (*skin depth*) de los campos en un mal conductor ( $g \ll \omega\epsilon$ ) es  $(2/g)\sqrt{\epsilon/\mu}$  (independiente de la frecuencia). Encontrar la profundidad de penetración (en metros) para el agua.

b) Muestre que la profundidad de penetración en un buen conductor ( $g \gg \omega\epsilon$ ) es  $\lambda/2\pi$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda en el conductor. Encontrar la profundidad de penetración (en metros) para un metal típico ( $g \approx 10^7 (\Omega m)^{-1}$ ) en el rango visible ( $\omega \approx 10^{15}\text{ Hz}$ ), asumiendo  $\epsilon = \epsilon_0$  y  $\mu = \mu_0$ .

c) Muestre que en un buen conductor el campo magnético tiene un retraso de fase de  $\pi/4$  respecto al campo eléctrico.

10. a) Calcule el promedio temporal de la densidad de energía en una onda electromagnética plana en un medio conductor. Muestre que la parte magnética siempre es la dominante. (Resultado:  $(k^2/2\mu\omega^2) E_0^2 e^{-2kz}$ ).

b) Muestre que la intensidad es siempre:  $(k/2\mu\omega) E_0^2 e^{-2kz}$ .

11. Considere un modelo del átomo como una carga puntual positiva rodeada de una nube electrónica de radio atómico con la carga distribuida uniformemente. Suponga que el único efecto de someter el átomo a un campo eléctrico externo es un desplazamiento del núcleo con respecto al centro de la nube electrónica.

a) Determine la frecuencia natural de oscilación de un átomo en el modelo de oscilador lineal visto en clase. ¿En qué rango del espectro electromagnético se encuentra esta frecuencia?

b) Determine los coeficientes  $A$  y  $B$  de la fórmula de Cauchy para el átomo de Hidrógeno y compárelo con los valores experimentales a  $T = 0^\circ\text{C}$ ,  $A = 1,36 \times 10^{-4}$  y  $B = 7,7 \times 10^{-15}\text{ m}^2$ .