Teoría Electromagnética
Curso 2022

Práctico 6: Retardo y Radiación

1. Muestre que los potenciales retardados satisfacen la condición de gauge de Lorenz. Para eso, muestre primero que se verifica la relación:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{J}}{R}\right) = \frac{1}{R}\left(\nabla \cdot \vec{J}\right) + \frac{1}{R}\left(\nabla' \cdot \vec{J}\right) - \nabla' \cdot \left(\frac{\vec{J}}{R}\right)$$

donde $R = |\vec{r} - \vec{r}\,'|$ y siendo $\vec{J}$ una función genérica de $\vec{r}$,$\vec{r}\,'$ y t. A partir de la ecuación de continuidad obtenga:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \cdot (\nabla R) \qquad\qquad \nabla' \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \cdot (\nabla' R)$$

siendo $\vec{J} = \vec{J}(\vec{r}\,', t_{ret})$ y $\rho = \rho(\vec{r}\,', t_{ret})$. Use ambos resultados para calcular $\nabla \cdot \vec{A}$.

2. Un alambre recto e infinito conduce una corriente uniformemente distribuida y variable en el tiempo.

a) Considerando que la corriente tiene la forma

$$I(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ I_0 & t > 0 \end{cases}$$

encuentre los campos eléctrico y magnético resultantes.

b) Repita el cálculo anterior para un pulso de corriente $I(t) = q_0\delta(t)$ y para una corriente que aumenta linealmente para $t > 0$, es decir,

$$I(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ kt & t > 0 \end{cases}$$

3. Suponga que en $t = 0$ se establece una corriente superficial uniforme $\vec{K}(t) = K_0\, t\, \hat{x}$ en el plano xy. Halle los campos eléctrico y magnético en todo el espacio para $t > 0$.

4. Considere el campo eléctrico en coordenadas esféricas

$$\vec{E}(r, \theta, \phi, t) = A\frac{\sin(\theta)}{r}\left[\cos(kr - \omega t) - \frac{1}{kr}\sin(kr - \omega t)\right]\hat{e}_\phi$$

con $\frac{\omega}{k} = c$.

a) Muestre que el campo obedece las cuatro ecuaciones de Maxwell en el vacío. Determine el campo magnético asociado.

b) Calcule el vector de Poynting y su promedio temporal para obtener el vector de intensidad $\vec{I}$. ¿Apunta el la dirección esperada? ¿Cae con r^{-2} como debería?

c) Integre la intensidad sobre una superficie esférica para obtener la potencia radiada.

5. Una espira circular de alambre de radio a que conduce una corriente $I = I_0 \cos(\omega t)$ forma un dipolo magnético oscilante. Determine los campos de radiación y la potencia total radiada.

6. Considere una distribución de carga con simetría esférica que oscila únicamente en la dirección radial, de modo que la simetría esférica se conserva en todo instante. Demuestre que no se emite radiación.

7. Considere un dipolo eléctrico $\vec{p}$ que gira con velocidad angular constante ω en torno a un eje perpendicular a su momento dipolar. El dipolo puede ser descripto como la superposición de dos dipolos que varían en forma sinusoidal en ángulo recto uno con respecto al otro, de modo que:

$$\vec{p}(t) = p_0 cos(\omega t)\hat{\mathbf{x}} + p_0 sen(\omega t)\hat{\mathbf{y}}$$

Determine los campos en la zona de radiación y el promedio temporal del vector de Poynting.

8. Considere un cuadrupolo oscilante compuesto por dos cargas iguales $-q_0$ ubicadas en $z = \pm a(t)$ y una carga $2q_0$ en el orígen. Suponiendo que la distancia $a(t)$ oscila con frecuencia ω, encuentre la distribución angular de radiación y la potencia total radiada.

9. Dos cargas puntuales idénticas q están fijas en los extremos de una barra de longitud $2l$ que gira sobre su centro en el plano x-y a velocidad angular constante $\frac{\omega}{2}$.

a) Calcule el momento dipolar eléctrico $\vec{p}(t)$ de la distribución de cargas. ¿Hay radiación dipolar eléctrica?

b) Calcule el momento dipolar magnético $\vec{m}(t)$. ¿Hay radiación dipolar magnética?

c) Muestre que el tensor de momento cuadrupolar eléctrico es

$$\overleftrightarrow{Q}(t) = \frac{1}{2} q l^2 \begin{pmatrix} 1+\cos(\omega t) & \sin(\omega t) & 0 \\ \sin(\omega t) & 1-\cos(\omega t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d) Muestre que el promedio temporal de la potencia radiada por unidad de ángulo sólido es

$$\left\langle \frac{dP}{d\Omega} \right\rangle = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q^2 \omega^6 l^4}{32\pi c^3} \left[1 - \cos^4(\theta)\right],$$

siendo θ es el ángulo polar con respecto al eje z.

10. Un *pulsar* es una estrella de neutrones rotante que emite pulsos de radiación electromagnética a intervalos regulares. Considere el modelo de rotor oblicuo para el pulsar, en el cual el momento magnético rota formando un ángulo α constante con el eje de giro, según se muestra en la figura (1).

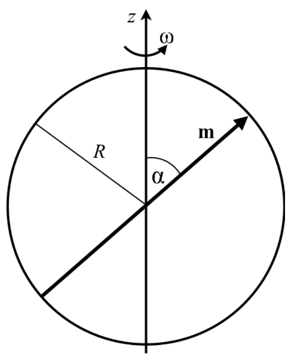

Figura 1

a) Escriba el vector $\vec{m}(t)$ en la base cartesiana $\{\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{y}}, \hat{\mathbf{z}}\}$.

b) Calcule la potencia total radidada P según el modelo anterior.

c) El *pulsar del cangrejo* tiene radio $R \sim 12km$ y masa $M \sim 1{,}4 M_{sol}$, con un período de rotación de $T = 33{,}50ms$ que decrece a una tasa $\dot{T} \sim 4 \times 10^{-13} s/s$. Suponiendo que la energía cinética de rotación $K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$ se pierde sólo en radiación electromagnética:

$$\dot{K}_{rot} = P$$

use la expresión hallada para P y la relación entre B y m en la zona cerana (estática) para un dipolo magnético para estimar el valor $B_{max} sen(\alpha)$.