Teoría Electromagnética
Curso 2021

Práctico 7
Relatividad y formulación covariante de la electrodinámica.

1. La clarividente Sophie Zabar lloró de dolor cuando su hermano gemelo se martilló un dedo a $500Km$ de distancia. Una científica escéptica observó ambos eventos desde un avión volando a $\frac{12}{13}c$ como muestra la figura (1). ¿Cuál de los eventos ocurrió antes de acuerdo a la científica? ¿Cuánto tiempo antes ocurrió? Represente la situación en un diagrama de Minkowski.

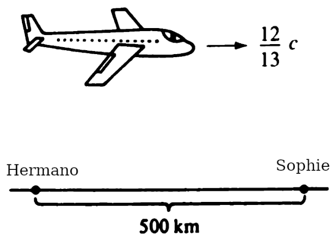

Figura 1

2. Alicia y Bettina son dos hemanas gemelas. En el día de su cumpleaños número 21 Alicia se sube en una nave espacial que se mueve (respecto de la Tierra) a una velocidad constante de $\frac{4}{5}c$ hacia la estrella X, mientras que Bettina permanece en la Tierra. Al llegar a X inmediatamente se sube a otra nave espacial que regresa a la Tierra a una velocidad de $\frac{4}{5}c$ (respecto de la Tierra). Según su propio reloj Alicia llega a la Tierra exactamente para celebrar su cumpleaños 39.

a) ¿Qué edad tiene Bettina al encontrarse?

b) ¿A cuántos años luz de la Tierra se encuentra la estrella X?

Llamemos S al sistema de referencia de Bettina, S' al de Alicia cuando está viajando hacia X y S'' cuando está volviendo a la Tierra. Fijando las coordenadas de la partida hacia X como $(x,t) = (0,0)$, $(x',t') = (0,0)$ y $(x'',t'') = (0,0)$ en S, S' y S'' respectivamente.

c) ¿Cuáles son las coordenadas evento de cambio de una nave a la otra en los tres sistemas de referencia mencionados?

d) Si Alicia tiene su reloj sincronizado con S' y quiere sincronizarlo con S'' al cambiar de nave, ¿qué corrección debe hacer en el reloj? ¿Qué fecha marcará ese reloj cuando llegue a la Tierra?

e) Justo antes y justo después de cambiar de nave se el pregunta a Alicia cuál es la edad de Bettina en ese instante. ¿Cuáles serán sus respuestas?

f) ¿Cuántos años terrestres demora el regreso según Alicia? De acuerdo a la respuesta de e), ¿qué edad espera Alicia que tenga Bettina en el reencuentro?

g) Represente el viaje completo en un digrama de Minkowski en las coordenadas (x, t) (la perspectiva de Bettina). Sobre el mismo diagrama represente los ejes coordenados de S' y S'', indicando las coordenadas del evento de la parte c) y la llegada a la Tierra.

3. Un observador inercial determina que una partícula sigue un movimiento parabólico dado por

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{b^2 + (ct)^2}, \\ y(t) &= z(t) = 0, \end{aligned}$$

siendo b una constante.

a) Encuentre el tiempo propio τ de la partícula como función de t asumiendo que $\tau(0) = 0$.

b) Encuentre la posición x y la velocidad (usual) v como funciones de τ.

c) Encuentre la cuadri-velocidad u^μ de la partícula como función de t y calcule $u^\mu u_\mu$.

4. a) Escriba la matriz $M^\mu{}_\nu$ correspondiente a una transformación de Galileo.

b) Escriba la matriz $\Lambda^\mu{}_\nu$ correspondiente a una transformación de Lorentz (Boost) de velocidad v en la dirección del eje $\hat{y}$.

c) Escriba la matriz $\Lambda^\mu{}_\nu$ que describe una transformación de Lorentz de velocidad v en el eje $\hat{x}$ seguida de una transformación de velocidad v' según el eje $\hat{y}$. ¿Importa el orden en que se hacen las transformaciones?

5. a) Pruebe que la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ es un tensor invariante de Lorentz (sus componentes son las mismas en cualquier sistema inercial).

b)Verifique que el producto escalar de dos cuadrivectores $a^\mu a_\mu$ es invariante de Lorentz.

c)Muestre que los símbolos de Levi-Civita $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ y $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, definidos en forma análoga al caso tridimensional, son invariantes de Lorentz.

d)Note que como consecuencia de c) el tensor *dual*

$$\mathcal{G}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$$

es un tensor. Escribir en forma explícita (en función de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$) la matriz 4x4 con sus componentes.

6. Muestre que las ecuaciones de Maxwell pueden ser escritas en forma covariante como

$$\frac{\partial F^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = \mu_0 J^\alpha, \qquad \frac{\partial \mathcal{G}^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0.$$

7. a) Muestre que $F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$, $\mathcal{G}^{\alpha\beta}\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ y $F^{\alpha\beta}\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ son invariantes bajo transformaciones de Lorentz.

b) Escriba los escalares anteriores en función de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$.

c) Suponga que en un sistema inercial $\vec{B} = 0$ pero $\vec{E} \neq 0$ en algún punto P. ¿Es posible encontrar algún otro sistema inercial en el que $\vec{E} = 0$ en P?

8. Considere el cuadrivector densidad de corriente J^μ.

a) Muestre que efectivamente es un cuadrivector.

b) Partiendo de las ecuaciones de Maxwell en forma covariante deduzca la ecuación de continuidad.

c) ¿Qué invariante Lorentz puede definir a partir de J^μ? Justifique.

9. Considere el cuadrivector $K^\mu = qu_\nu F^{\mu\nu}$ asociado a una carga puntual q de cuadrivelocidad u^μ.

a) ¿Qué representan las componentes de K^μ?

b) Suponga que la carga puntual se mueve a velocidad constante $\vec{u}$. Muestre que

$$\frac{1-(u/c)^2\cos^2(\theta)}{1-(u/c)^2}F^2$$

es invariante de Lorentz siendo $\vec{F}$ la fuerza de Lorentz sobre la carga y θ el ángulo entre $\vec{u}$ y $\vec{F}$.

10. Utilizando las ecuaciones de transformación de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ bajo transformaciones de Lorentz, determine los campos generados por:

a) una carga puntual q a velocidad $\vec{v}$ constante. Sugerencia: parta de un marco de referencia con la carga puntual en reposo.

b) un capacitor de placas paralelas cargado con carga Q que se mueve a velocidad $\vec{v}$ paralela a sus placas.

c) un capacitor de placas paralelas cargado con carga Q que se mueve a velocidad $\vec{v}$ perpendicular a sus placas.

11. Usando el hecho de que la fase de una onda plana es independiente de la velocidad del observador:

a) Muestre que la cantidad $k^\alpha = (\omega/c, \vec{k})$ es un cuadrivector.

b) Deduzca la formula del efecto Doppler para los movimientos

(i) paralelo a la dirección de $\vec{k}$

(ii) perpendicular a la dirección de $\vec{k}$.

12. Un cable infinito de ancho despreciable, tiene una densidad de carga uniforme λ en el referencial K_1. El marco referencial K_1 (y el cable) se mueven con una velocidad $\vec{v}$ paralela a la dirección del cable con respecto al marco K_0 del laboratorio.

a) Encuentre el campo eléctrico y magnético en coordenadas cilíndricas en K_1 y use las transformaciones de Lorentz para pasarlos a K_0.

b) ¿Cuánto valen la carga y la corriente por el cable en su referencial de reposo (K_1)? ¿Y en el laboratorio (K_0)?

c) Partiendo de la carga y la corriente del cable en el laboratorio calcule los campos directamente y compare con (a).