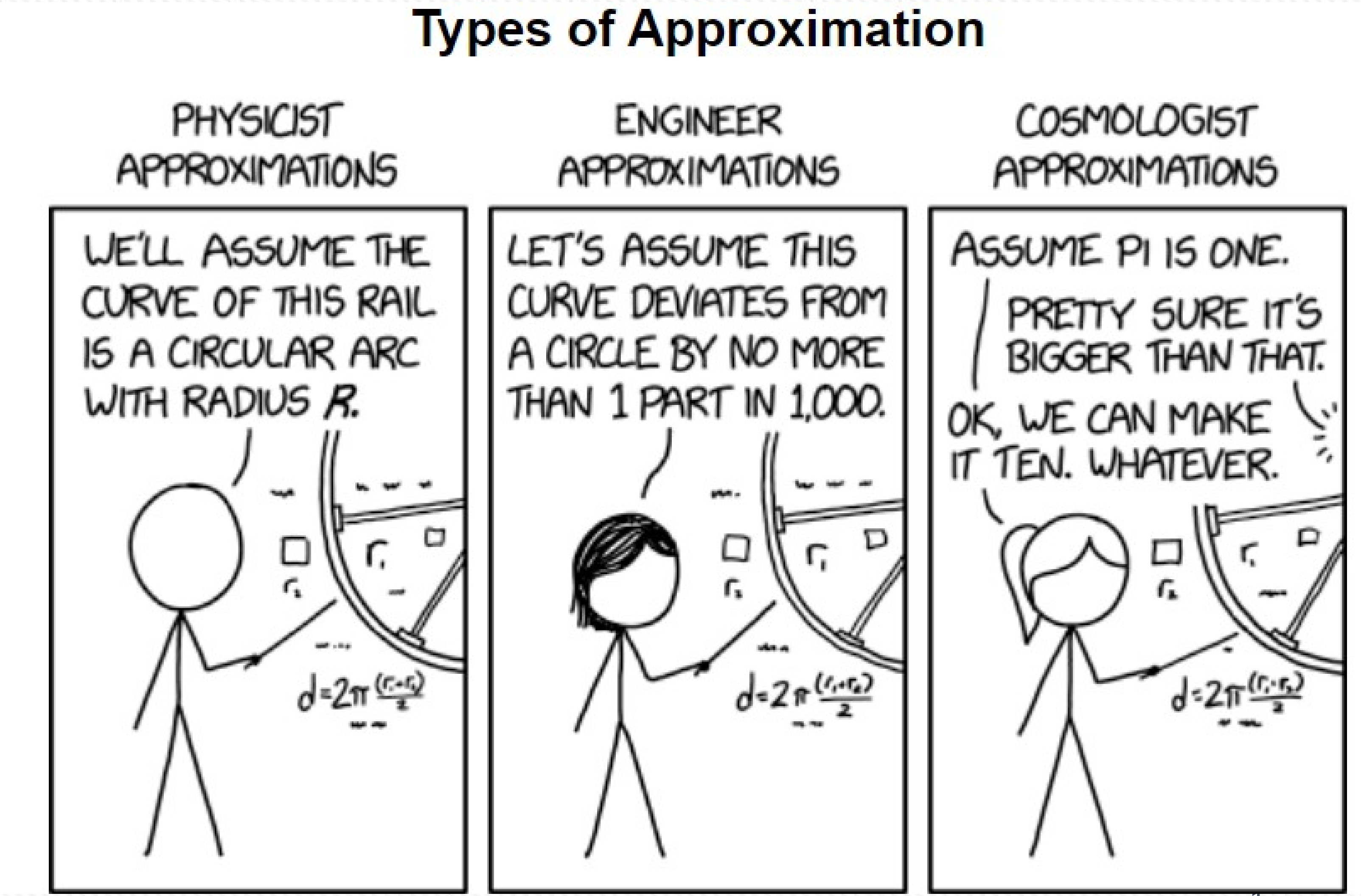
03.1- Análisis dimensional, estimaciones, problemas de Fermi



Análisis dimensional

Dimensión significa la naturaleza física de una cantidad o magnitud.
Si mido una distancia en unidades de metros, pulgadas o codos, se trata de la magnitud distancia y la dimensión es la longitud.
Los símbolos que usaremos para especificar las dimensiones básicas en mecánica son: longitud, masa y tiempo. L, M y T respectivamente.
Comúnmente se usan corchetes [ ] para indicar las dimensiones de una magnitud.
Ejemplos, para la velocidad (v): $[v] = L/T$; para el área (A): $[A] = L^2$.

En física con frecuencia es necesario ya sea deducir una expresión matemática o una ecuación o bien verificar su validez.
Al procedimiento para realizar esto, se le conoce como **análisis dimensional, que hace uso del hecho de que las dimensiones pueden ser tratadas como cantidades algebraicas.**
Tales cantidades, por ejemplo, pueden ser sumadas o restadas únicamente si tienen las mismas dimensiones. Si los términos en los lados opuestos de una ecuación tienen las mismas dimensiones, entonces la ecuación puede ser correcta, es una condición necesaria, pero no suficiente!
Sin embargo, el análisis dimensional tiene valor como verificación parcial de una ecuación y también puede utilizarse para desarrollar una comprensión de las relaciones entre las magnitudes físicas en situaciones muy complejas.

Análisis dimensional

El **análisis dimensional** aprovecha el hecho de que *las dimensiones pueden tratarse como cantidades algebraicas*.

- Las cantidades sólo pueden sumarse o restarse si tienen las mismas dimensiones (es decir son homogéneas).
- Los dos miembros de una igualdad (o ecuación) deben tener las mismas dimensiones.

Con el análisis dimensional puedo deducir o verificar una fórmula o expresión, determinar las unidades (o dimensiones) de la constante de proporcionalidad, pero no su valor numérico.

Por tanto no puedo determinar las constantes adimensionadas.

Ejercicio 1.7

Imagine que se encuentra Ud. en un examen de física y le parece recordar una ecuación para obtener la velocidad *v* con que una piedra llega al piso después de caer desde una altura *h*. La fórmula que recuerda es la siguiente: $v = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ donde g es la aceleración de la gravedad? La usaría usted en el examen o existen motivos para desconfiar de su memoria?

$$v = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Veamos las dimensiones de *h*, *v* y *g*:

$$[v] = \left[\sqrt{\frac{2h}{g}}\right] = \sqrt{\frac{2[h]}{[g]}}$$

[*h*] =L;
[*v*] = L/T= $L.T^{-1}$;
[*a*] =L/T^2 = $L.T^{-2}$;

$$LT^{-1} = \sqrt{\frac{L}{LT^{-2}}} = \sqrt{\frac{1}{T^{-2}}} = \sqrt{T^2} = T$$

La expresión no es dimensionalmente correcta, por tanto no puede estar bien!!!

Ejemplo:

Análisis dimensional- a) La ley de Gravitación Universal de Newton establece que la fuerza de atracción entre dos cuerpos depende de sus masas y de la distancia que las separa:

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

¿Qué dimensiones debe tener la constante *G para que la ecuación tenga sentido?*

A partir de la ley puedo deducir que: $G = \frac{F.r^2}{M.m}$

Dimensiones: $[M] = [m] = M$; $[r^2] = L^2$; $[F] = MLT^{-2}$.(pues F = m.a)

$$[G] = [F] . [r^2] / ([M].[m])$$

$$\boxed{[G] = M^{-1}L^3T^{-2}}$$

$$[G] = (MLT^{-2}).(L^2)/((M)(M))$$

$$[G] = M^{(1-(1+1))}.L^{(1+2)}\ T^{-2} = M^{-1}L^3T^{-2}$$

Unidades:
$m^3/(kg.s^2)$ $=N.m^2/kg^2$

En 1915, Lord Rayleigh aplicó el análisis dimensional al problema de una estrella vibrante, para esto supuso que la estrella se comportaba como un cuerpo líquido que se mantenía unido por su propia gravedad. Las variables físicas del problema eran la frecuencia de vibración (*f*), el radio de la estrella (*R*), su densidad (*ρ*) y la constante de gravitación universal (G). Hallar una expresión para la frecuencia de vibración de la estrella. ¿La frecuencia dependerá del radio de la estrella?

Supongo: $f = kG^xR^y\rho^z$ k constante adimensionada

$$[f] = [k]\,[G^x]\,[R^y][\rho^z] = [k]\,[G]^x[R]^y[\rho]^z = [G]^x[R]^y[\rho]^z$$

$[f]= T^{-1}$ $[G] = M^{-1}L^3T^{-2}$ $[R] = L$ $[\rho] = ML^{-3}$

$$T^{-1}= (M^{-1}L^3T^{-2})^x(L)^y(ML^{-3})^z = M^{-x+z}\,L^{3x+y-3z}\,T^{-2x}$$

Igualo exponentes de c/u de las dimensiones de c/miembro

M: $0 = -x+z$ entonces: $x=z$

L: $0 = 3x+y-3z$ entonces: $y= 0$

T: $-1= -2x$ entonces: $x =1/2 = z$

$$f = k\,G^x R^y \rho^z = k\,G^{\frac{1}{2}}\,R^0\,\rho^{\frac{1}{2}} = k\sqrt{G\rho}$$

La frecuencia de vibración de la estrella no depende del radio de la misma!!!!

Estimaciones: cálculos aproximados y de orden de magnitud

Obtener una respuesta exacta de un cálculo es con frecuencia difícil o imposible, ya sea por causas matemáticas o porque la información disponible es limitada.
En esta situación, los cálculos estimativos pueden producir respuestas aproximadas eficaces que permiten establecer si es necesario un cálculo más preciso.
Además, es útil como una verificación parcial de si en efecto, se realizan cálculos exactos.
A menudo incluso una estimación muy burda de una cantidad puede darnos información útil.
A veces sabemos cómo calcular cierta cantidad, pero tenemos que estimar los datos necesarios para el cálculo. O bien, el cálculo podría ser demasiado complicado para efectuarse con exactitud, así que lo aproximamos.
En ambos casos, nuestro resultado es una estimación, que aún sería útil si tiene un factor de incertidumbre de 2, 10 o más.
Con frecuencia, tales calculos se denominan **estimaciones de orden de magnitud.**
El gran físico nuclear ítalo-estadounidense, **Enrico Fermi** (1901-1954) los llamaba "calculos aproximados".
La mayoría de los ejemplos que veremos y que ponemos dentro del repartido requiere estimar los datos de entrada necesarios.
No es aconsejable consultar muchos datos; estímelos tan bien como pueda.
Aún cuando difieran por un factor de 10, los resultados serán útiles e interesantes.

Estimaciones: cálculos aproximados y de orden de magnitud

Cuando se realizan cálculos aproximados o comparaciones se suele redondear un número hasta la potencia de 10 más próxima. Tal número recibe el nombre de **orden de magnitud.**

Ejemplo, la altura de un pequeño insecto, digamos un hormiga, puede ser 8×10^{-4} m ó, aproximadamente, 10^{-3} m. Diremos que el orden de magnitud de la altura de una hormiga es de 10^{-3} m.

De igual modo, como la altura de la mayoría de las personas se encuentra próxima a 2 m, podemos redondear este número y decir que el orden de magnitud de la altura de una persona es $h \sim 10^0$ *m, donde el símbolo* ~ significa “es del orden de magnitud de”.

Esto no quiere decir que la altura típica de una persona sea realmente de 1 m, sino que está más próxima a 1 m que a 10 m ó 10^{-1}= 0,1 m.

Podemos decir que una persona típica es tres órdenes de magnitud más grande que una hormiga típica, queriendo decir con esto que el cociente entre las alturas es, aproximadamente, igual a 10^3 (relación 1000 a 1).

Un orden de magnitud no proporciona cifras que se conozcan con precisión; es decir, debemos considerar que no tiene cifras significativas.

En muchos casos, el orden de magnitud de una cantidad puede estimarse mediante hipótesis razonables y cálculos simples.

El físico Enrico Fermi era un maestro en el cálculo de respuestas aproximadas a cuestiones ingeniosas que parecían a primera vista imposibles de resolver por la limitada información disponible.

El siguiente es un ejemplo de un problema de Fermi

Problema de Fermi

El problema clásico de Fermi, generalmente atribuido a él, es calcular cuántos afinadores de piano hay en Chicago. Una solución típica involucra multiplicar una serie de estimaciones que arrojarían la respuesta correcta si las estimaciones lo fueran.
Por ejemplo, podrían hacerse las siguientes suposiciones:
Hay 9 millones de personas viviendo en Chicago.
En promedio, viven dos personas en cada casa de Chicago.
Una de cada veinte casas tiene un piano que es afinado regularmente.
Dichos pianos son afinados una vez por año.
Un afinador de pianos tarda dos horas afinar un piano, incluyendo el tiempo de viaje.
Cada afinador trabaja 8 horas por día, 5 días a la semana y 50 semanas en un año.
A partir de estas suposiciones se puede determinar que el número de afinaciones de piano en un año en Chicago es:

$$\frac{9.000.000\ personas}{2\ personas/casa} \times \frac{1\ piano}{20\ casas} \times 1\ afinación\ por\ año\ = 225.000\ afinaciones/año$$

Como cada afinador trabaja 50×5×8 = 2.000 horas por año y cada afinación requiere 2 horas, cada afinador realiza 1.000 afinaciones por año.
Como se calcularon 225.000 afinaciones por año, **resulta que en Chicago hay 225 afinadores**.
La respuesta obtenida probablemente no sea exacta debido, sobre todo, a errores en las suposiciones iniciales, sin embargo, se supone que al hacer las suposiciones, los errores se irán compensando unos con otros.

Ejemplo: ¿Cuántos granos de arena hay en una playa?

PLANTEAMIENTO: Primero tenemos que plantearnos qué características asumimos que tiene la playa y su arena. Suponemos que la playa ocupa una zona de forma rectangular de 500 m de largo, 100 de ancho y que la arena tiene unos 3 m de profundidad. Una búsqueda en Internet nos lleva a estimar que los granos de arena tienen diámetros que oscilan entre 0,06 mm y 2 mm, pero en nuestro problema consideramos que los granos de arena son esferas con un diámetro medio de 1 mm. Por otra parte, suponemos que los granos están tan juntos entre ellos, que el volumen del espacio entre ellos es despreciable comparado con el volumen de la arena.

1 El volumen V_P *de la playa es igual al número N de granos* por el volumen de un grano V_G: $V_P = N.V_G$

2. Usando la fórmula del volumen de una esfera, se calcula el volumen de un grano de arena: $V_G = (4/3)\pi R^3$

3. Se despeja el número de granos. En nuestro cálculo los números tienen una cifra significativa únicamente, por lo que la respuesta también viene expresada con esta precisión

$$N = \frac{V_P}{V_G} = \frac{L \times A \times h}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3LAh}{4\pi R^3} = \frac{3(500)(100)(3)}{4\pi(0{,}5 \times 10^{-3})^3} = 2{,}9 \times 10^{14}$$

3×10^{14} granos de arena!

Ecuación de Drake

Un ejemplo famoso de un problema del tipo Fermi es la ecuación de Drake, concebida em 1961 por el radioastrónomo y presidente del Instituto SETI, Frank Drake, con el propósito de estimar la cantidad de civilizaciones en la Vía Láctea susceptibles de poseer emisiones de radio detectables.

Según Drake, ese número es:

$$N = R^* \,.\, f_p .\, n_e \,.\, f_l \,.\, f_i \,.\, f_c \,.\, L$$

R^* es el número de estrellas que nacen en nuestra galaxia cada año y duran lo suficiente como para poder desarrollar vida.
f_p es la fracción de esas estrellas que tienen planetas orbitando a su alrededor.
n_e es el número de esos planetas situados en la ecosfera, esto es, en la zona idónea para la vida.
f_l es la fracción de esos planetas en los que se desarrolla la vida.
f_i es la fracción de esos planetas en los que se desarrolla vida inteligente.
f_c es la fracción de esos planetas en los que los seres inteligentes han desarrollado una tecnología que les permite comunicarse con otros mundos.
L es el lapso de vida de una civilización inteligente y comunicativa.

Estimación hecha por Drake:
$N = R^* \,.\, f_p .\, n_e \,.\, f_l \,.\, f_i \,.\, f_c \,.\, L =$ 10×0,5×2×1×0,01×0,01×10.000=
10 posibles civilizaciones detectables.

Ecuación de Drake

El interés de la ecuación de Drake radica en el propio planteamiento de la ecuación, mientras que al contrario carece de sentido tratar de obtener cualquier solución numérica de la misma, dado el enorme desconocimiento sobre muchos de sus parámetros.

Los cálculos realizados por distintos científicos han arrojado valores tan dispares como una sola civilización (que correspondería a la nuestra), o diez millones.

Se ha postulado también que la ecuación podría ser excesivamente simplista y que está incompleta.

Ecuación de Backus... para encontrar pareja

El economista Peter Backus, trasladó el problema de la Ecuación de Drake a las relaciones sentimentales. Backus plantea la ecuación, según sus condiciones: busca una chica entre 24 y 34 años, universitaria, atractiva, en Reino Unido.

La ecuación es similar a la de Drake: $G = N_* \bullet f_W \bullet f_L \bullet f_A \bullet f_U \bullet f_B$

Las variables de este singular modelo, con estimaciones aproximadas.

- N_* es la población total del Reino Unido, casi 61 millones de personas.
- f_W es la fracción de mujeres en el Reino Unido. Estimación: 51%.
- f_L es fracción de la población del Reino Unido que viven en Londres, para poder coincidir en un entorno con esa persona. Estimación: 13%.
- f_A es la fracción de personas con una edad próxima a Backus, en su momento tenía 31 años y esperaba que la otra persona estuviera entre 24 y 34. Estimación: 20%.
- f_U indica la fracción de personas con estudios universitarios, una exigencia académica que proponía Backus. Estimación: 26%.
- f_B es la fracción de atracción de Backus. La atracción sexual es esencial en una relación sentimental. Backus estimó el porcentaje de mujeres que le podían parecer atractivas a priori. Estimación: 5%.

Ecuación de Backus… para encontrar pareja

Con todos estos parámetros, la solución de la ecuación de Backus calculaba el número de mujeres posibles que a él le podían parecer una pareja adecuada, otro asunto es que la otra persona coincida en los requisitos.
De los 30 millones de mujeres que viven en el Reino Unido, sólo 10.511 eran "adecuadas" para él.
Además, se tiene que dar en este caso una reciprocidad, que el amor es caso de dos. Backus añadió que 1 de cada 20 chicas le encontraban atractivo, que 1 de cada 2 estaba soltera y que 1 de cada 10 daban lugar a conocerse (se caían bien).
El resultado que obtuvo no era muy esperanzador, si el hecho de buscar pareja le inquietaba, y es que de todo el Reino Unido, sólo 26 personas eran candidatas a ser su pareja.
Se lamentaba Backus que cada día tenía un 0,0000034% de posibilidades de poder encontrarse con una de esas candidatas.