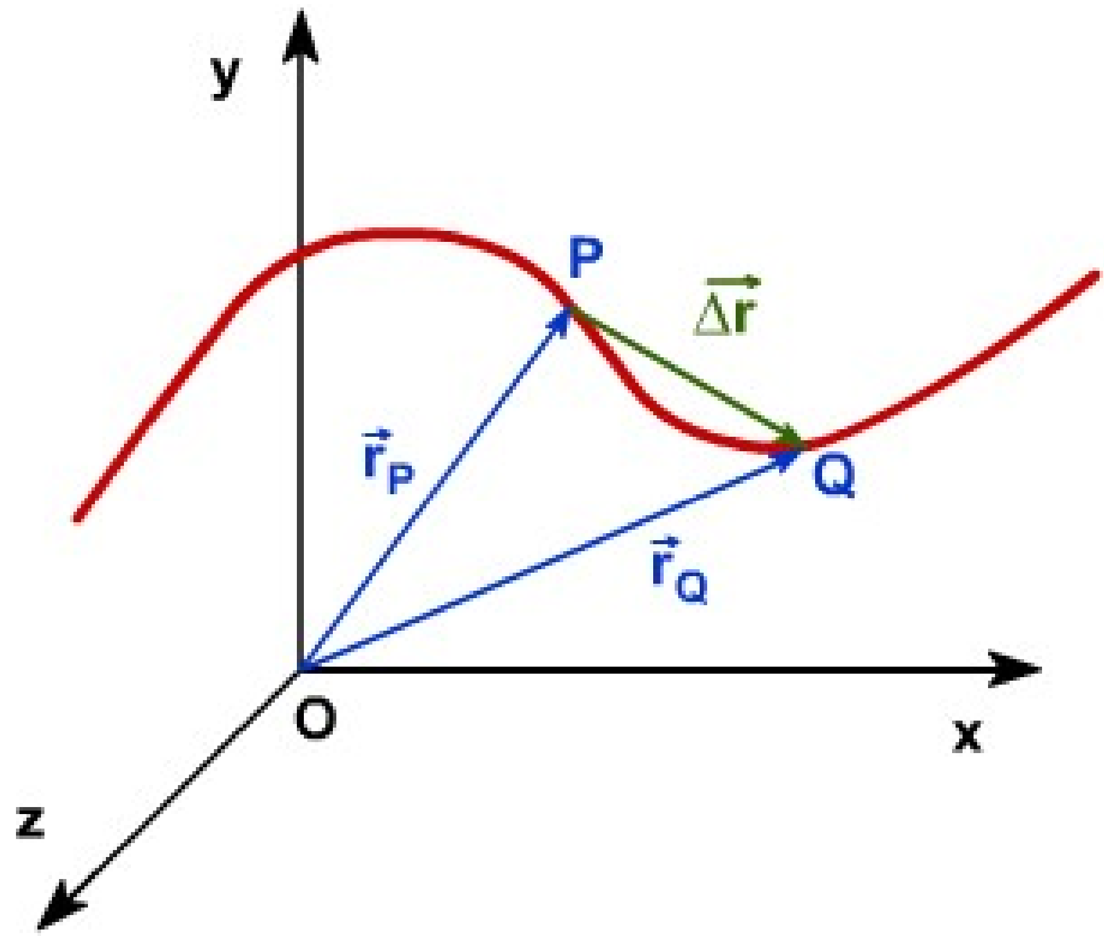
06- Vectores



1. Diferenciar entre magnitudes escalares y magnitudes vectoriales
2. Cómo sumar y restar vectores gráficamente.
3. Ver qué son las componentes de un vector y cómo se utilizan para realizar cálculos.
4. Ver qué son los vectores unitarios y cómo se utilizan con las componentes para describir vectores.
5. Los productos entre vectores (escalar y vectorial se verán más adelante).

SISTEMAS DE COORDENADAS

Muchos aspectos de la física se relacionan con la ubicación en el espacio, por lo que vamos a ver los **sistemas de coordenadas**.

Se puede localizar un punto en una recta con una coordenada, un punto en un plano, con dos coordenadas y un punto en el espacio con tres.

Un sistema coordenado que se utiliza para especificar la ubicación en el espacio consiste en lo siguiente:

■ Un punto de referencia fijo *O, conocido como origen*

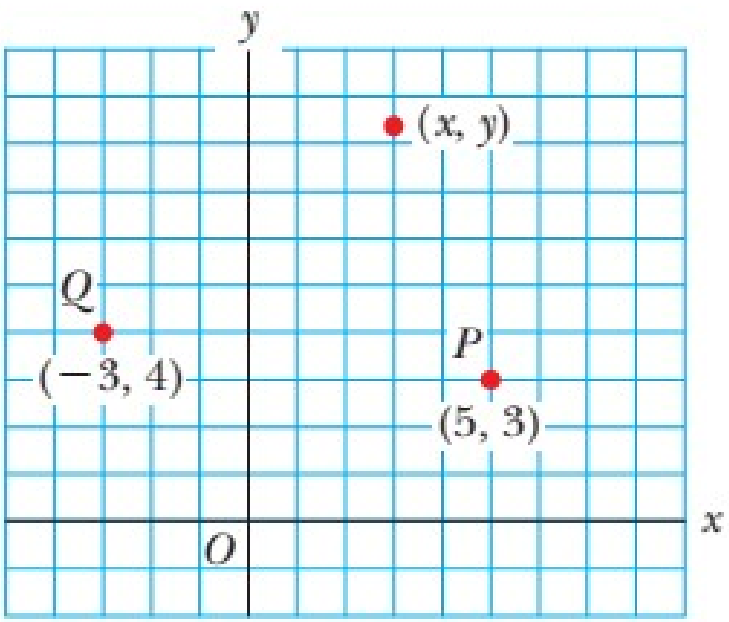
■ Un conjunto de ejes específicos o direcciones, con una escala apropiada y etiquetas en los ejes

■ Instrucciones de señalamiento de un punto en el espacio con respecto al origen y a los ejes,

Un sistema coordenado conveniente y usado es el **sistema cartesiano de coordenadas**, **algunas veces denominado sistema coordenado rectangular.**

La figura muestra este sistema en dos dimensiones. Se etiqueta un punto arbitrario en este sistema con las coordenadas (*x, y).*

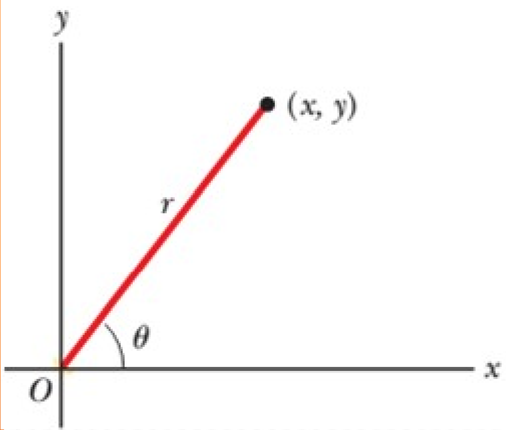
Por ejemplo el punto P en la figura tiene coordenadas (5, 3). Si iniciamos en el origen *O, se alcanza P moviéndose* 5 *metros horizontalmente hacia la derecha y en seguida* 3 metros en dirección vertical hacia arriba.



SISTEMAS DE COORDENADAS

Por lo general se elige *x positiva como hacia la derecha del origen y hacia arriba desde el origen y positiva.*

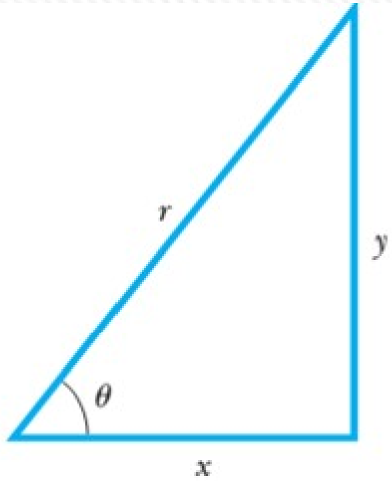
Algunas veces es más conveniente ubicar un punto en el espacio mediante sus **coordenadas polares planas (*r, θ*)**, *como se muestra en la figura siguiente.*



$$\text{sen}\ \theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$



En este sistema se selecciona un origen *O y una línea de referencia como se muestra; y se especifica* un punto para la distancia *r desde el origen hasta el punto y mediante el ángulo θ entre* la línea de referencia y una línea trazada desde el origen hasta el punto.

Por lo general la línea estándar de referencia se considera el eje *x positivo de un sistema cartesiano de coordenadas.* Se tiene en cuenta que el ángulo *θ* es positivo cuando se mide en la dirección contraria a las manecillas del reloj desde la línea de referencia y negativo cuando se mide en la dirección de las manecillas del reloj.

Por ejemplo, si se especifica un punto mediante las coordenadas polares 3 m y 60°, este punto se ubica moviéndose 3 m desde el origen con un ángulo de 60° arriba de la línea de referencia (en dirección contraria a las manecillas del reloj).

Vectores y escalares

Tiempo, rapidez, distancia, masa y densidad son cantidades físicas que se describen completamente con un solo número y su unidad: **cantidades escalares.**

Cantidades físicas que se les debe dar: la dirección, sentido y su módulo: **cantidades vectoriales.**
Ejemplos: fuerza, desplazamiento, velocidad, aceleración.

Para los cálculos con cantidades escalares se usan las operaciones aritméticas ordinarias.

Por ejemplo: 6,0 kg + 3,2 kg = 9,2 kg, o 4 × 2 s = 8 s.

Para operar con vectores requiere un conjunto diferente de operaciones.

VECTORES Y SUS PROPIEDADES

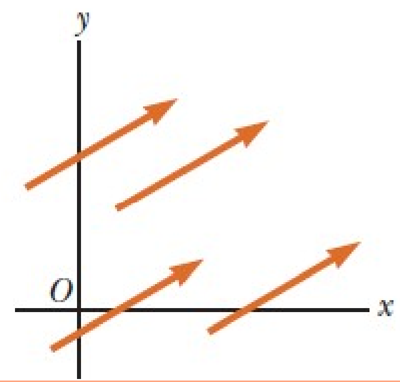
Cuando se escribe una cantidad vectorial, con frecuencia se representa con una flecha o barra sobre la letra y en negrita. $\bar{\mathbf{A}}$

$$A = |\bar{A}|$$

La **magnitud** o **módulo de un vector** es un número que coincide con la "longitud" del vector en la representación gráfica (distancia euclideana). La magnitud (módulo) de un vector se representa en cursiva sin la barra.

Igualdad de vectores Dos vectores son iguales si tienen la misma magnitud y la misma dirección y sentido. Esta propiedad permite trasladar un vector paralelo a sí mismo en un diagrama, sin afectarlo.

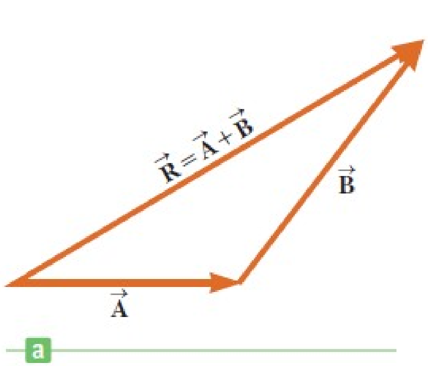
En la figura los cuatro vectores son iguales porque tienen longitudes iguales y apuntan en la misma dirección y sentido.

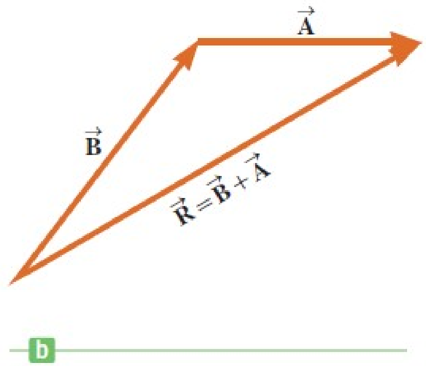


Suma de vectores Cuando dos o más vectores se suman, todos deben tener las mismas unidades. Por ejemplo, no tiene sentido sumar un vector velocidad, que tiene unidades de m/s, a un vector de desplazamiento, que tiene unidades sólo de m. Los escalares obedecen las mismas reglas. De la misma manera, no tendría sentido sumar temperaturas a volúmenes o masas a intervalos de tiempo.

VECTORES Y SUS PROPIEDADES

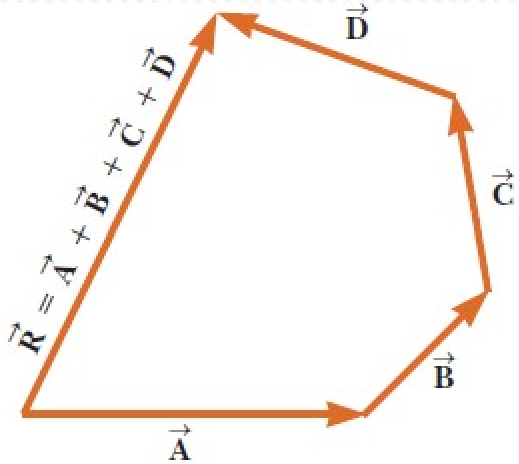
Los vectores se pueden sumar geométrica y algebraicamente. Para sumar el vector **B** al vector **A** en forma geométrica, primero se dibuja **A** sobre una hoja de papel para el trazado de gráficas con alguna escala, como 1cm = 1m, de modo que su dirección se especifique con respecto a un sistema coordenado. A continuación se dibuja el vector **B** en la misma escala con el extremo inicial en la punta de **A**, como en la figura que sigue. El vector **B d**ebe dibujarse a lo largo de la dirección que hace el ángulo adecuado con respecto al vector **A.**





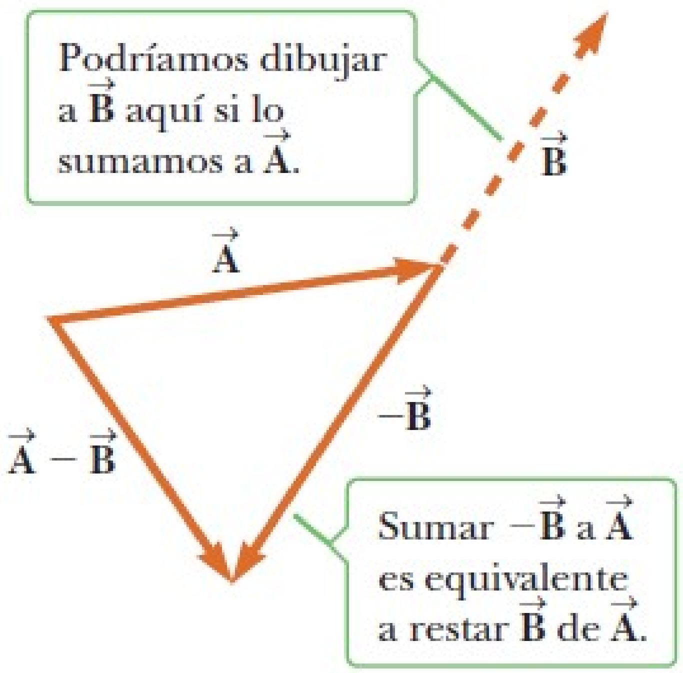
El **vector resultante R= A + B** es el vector que se dibuja desde el extremo inicial de **A** hacia el extremo inal de **B.**
Este procedimiento se conoce como el **método del triángulo de la suma.**
Cuando dos vectores se suman, su adición es independiente del orden de la suma: **A+B=B+A**. Esto puede verse desde la construcción geométrica en la figura y se le conoce como la **ley conmutativa de la suma.**

Además, este mismo planteamiento general se puede utilizar para sumar más de dos vectores. El vector suma resultante **R**=**A**+**B**+**C**+**D** es el vector que se dibuja desde el extremo inicial del primer vector hacia el extremo final del último. Una vez más, el orden en el cual los vectores se sumen no importa.



VECTORES Y SUS PROPIEDADES

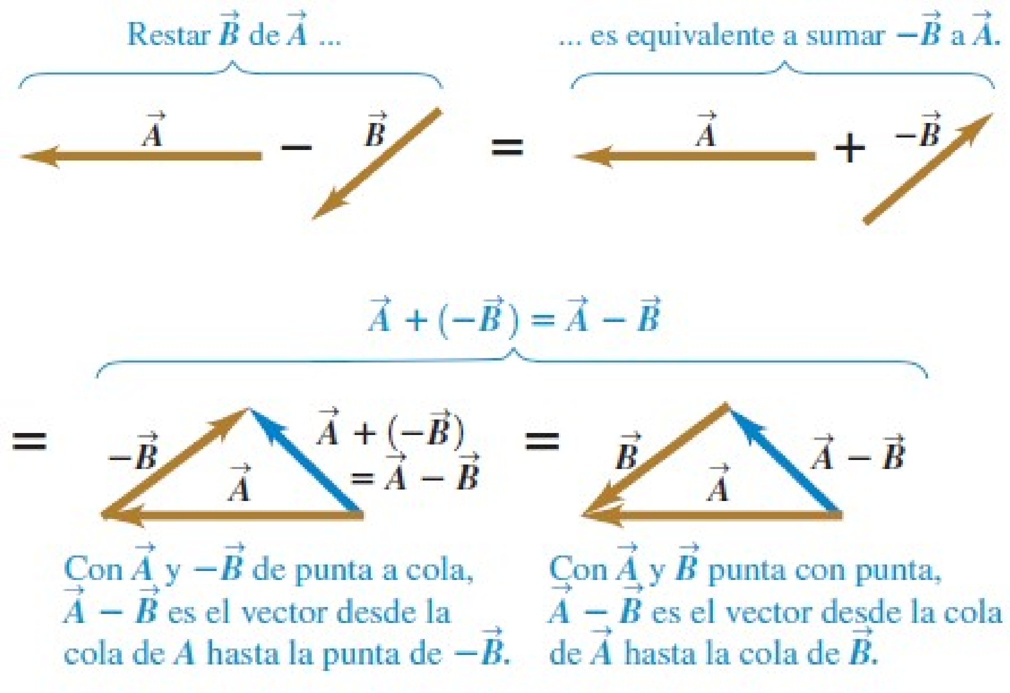
Opuesto de un vector El opuesto de un vector, se define como el vector que da cero cuando se suma al mismo. Esto significa que **A** y **–A** tienen la misma magnitud y dirección pero sentidos opuestos.
Resta de vectores La resta de vectores hace uso de la definición del opuesto de un vector. Se define la operación **A** – **B** como que el vector **–B** se suma al vector **A.**
En realidad la resta vectorial es un caso especial de suma de vectores.



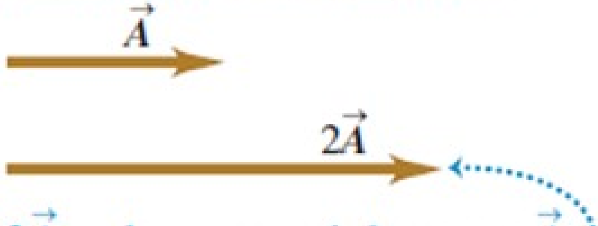
Multiplicación de un vector mediante un escalar. Sea un escalar μ y un vector **v**. Se define al producto del escalar por el vector (μ **v**) a un nuevo vector **V** de módulo μ veces el módulo de **v** (**V**=μ**v**), de la misma dirección que **v** y de sentido igual al de **v** si μ>0. Si μ<0 el sentido de **V** será contrario al de **v**.

Cuidado: el módulo del vector suma, no es igual a la suma de los módulos (salvo que tengan la misma dirección)

VECTORES Y SUS PROPIEDADES



Al multiplicar un vector por un escalar positivo, la magnitud (longitud) del vector cambia, pero no su dirección.



$2\vec{A}$ es dos veces más largo que $\vec{A}$.

Al multiplicar un vector por un escalar negativo, cambia su magnitud y se invierte su dirección.

$-3\vec{A}$ es tres veces más largo que $\vec{A}$ y apunta en la dirección contraria.

PREGUNTA RÁPIDA

Las magnitudes de dos vectores **A** y **B** son *A = 12 unidades y B* = 8 unidades. ¿Cuál de los siguientes pares de números representa los valores *más grandes y más pequeños posibles para la magnitud del vector resultante* ***R = A+ B****?*

a) 14,4 unidades, 4 unidades,

b) 12 unidades, 8 unidades,

c) 20 unidades, 4 unidades,

d) ninguna de estas respuestas.

PREGUNTA RÁPIDA

Si el vector **B** se suma al vector **A** ¿cuáles ***dos de las siguientes opciones*** deben ser verdaderas para que el vector resultante sea igual a cero?

a) A y **B** son paralelos y en el mismo sentido.

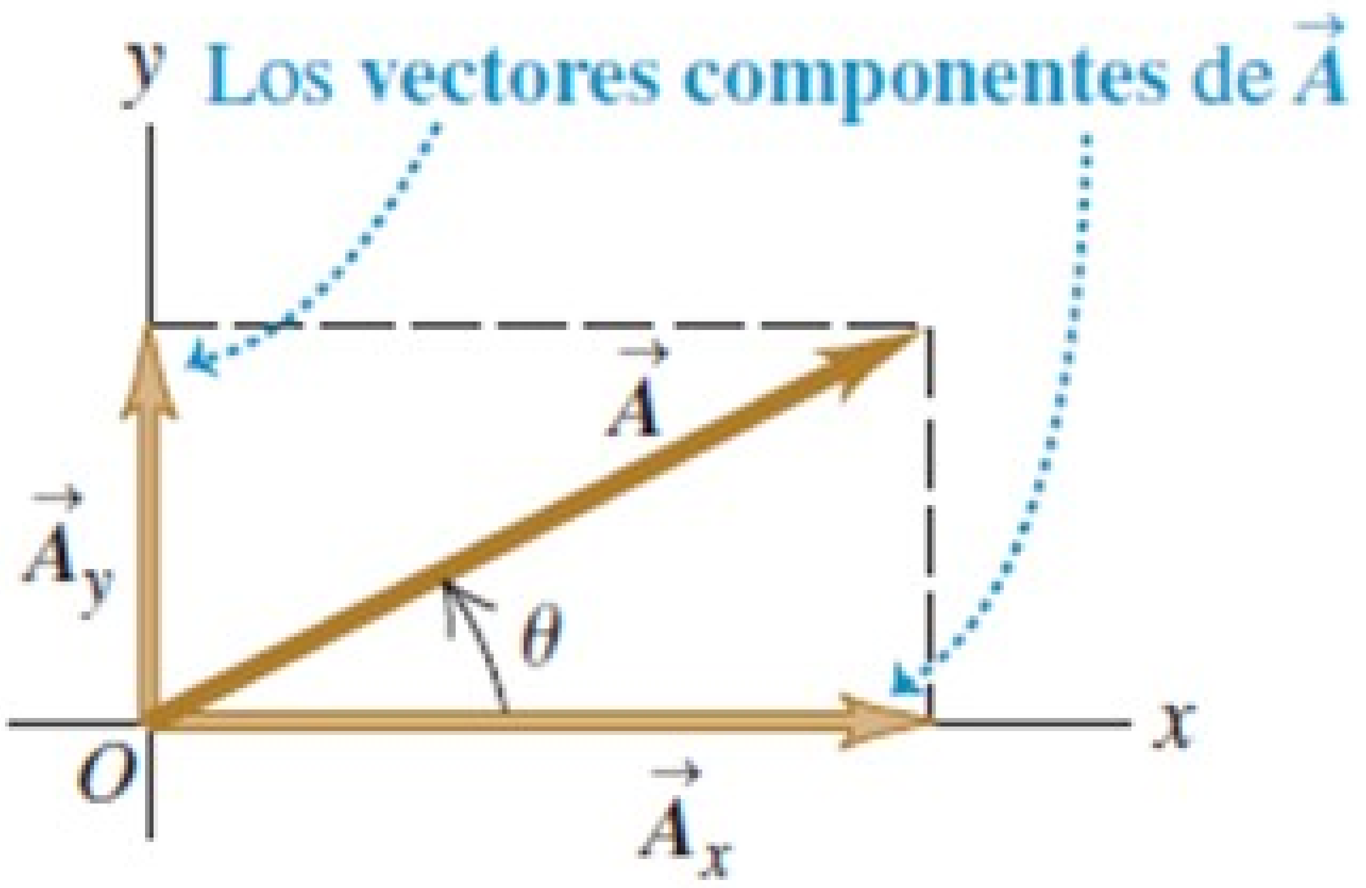
b) A y **B** son paralelos y en sentidos opuestos.

c) A y **B** tienen la misma magnitud.

d) A y **B** son perpendiculares.

Componentes de un vector

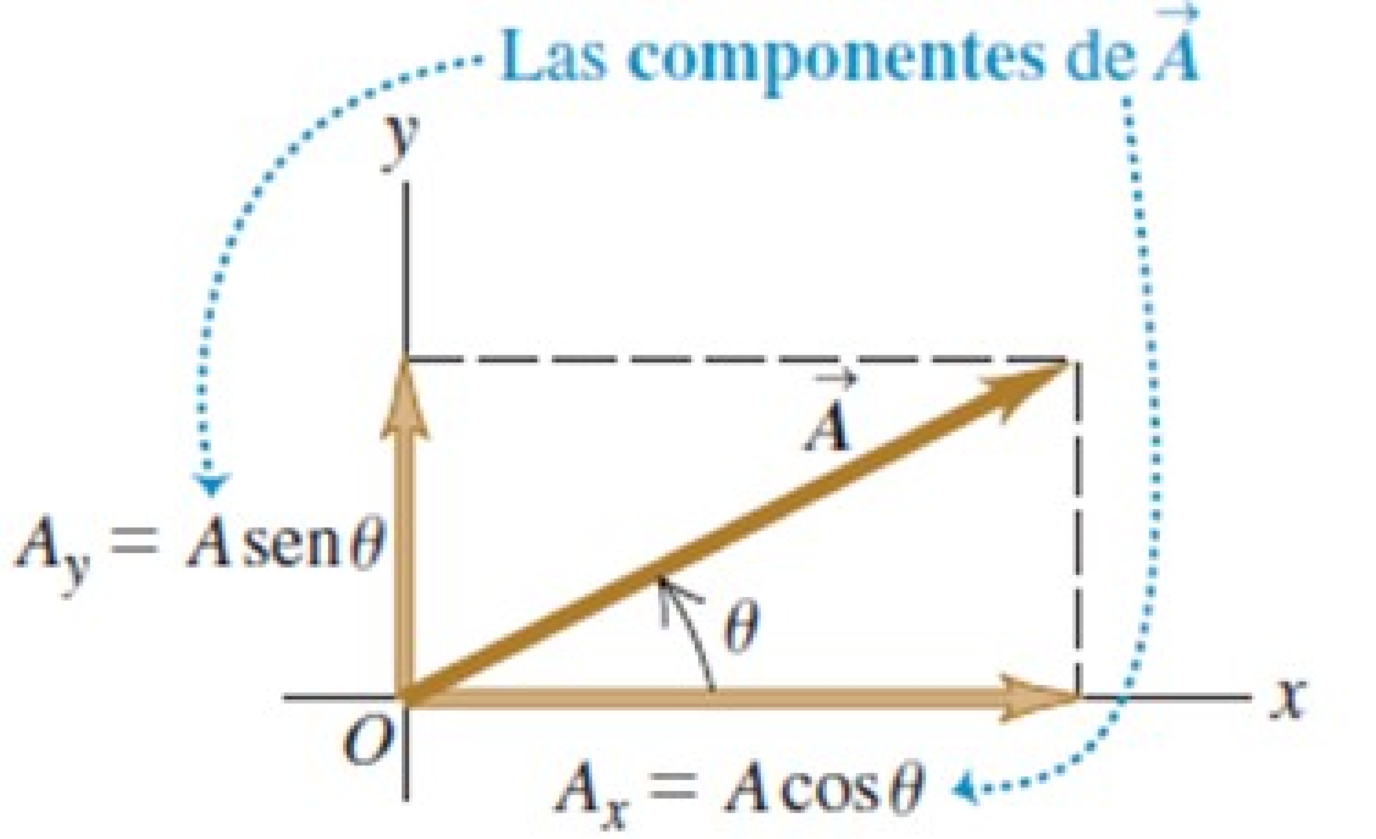
Cualquier vector en el plano *xy se puede representar como la suma de un vector paralelo al eje x y un vector paralelo al eje y.* Estos dos vectores **A_x** y **A_y** *; son los* ***vectores componentes*** *de* ***A****:* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_x + \boldsymbol{A}_y$



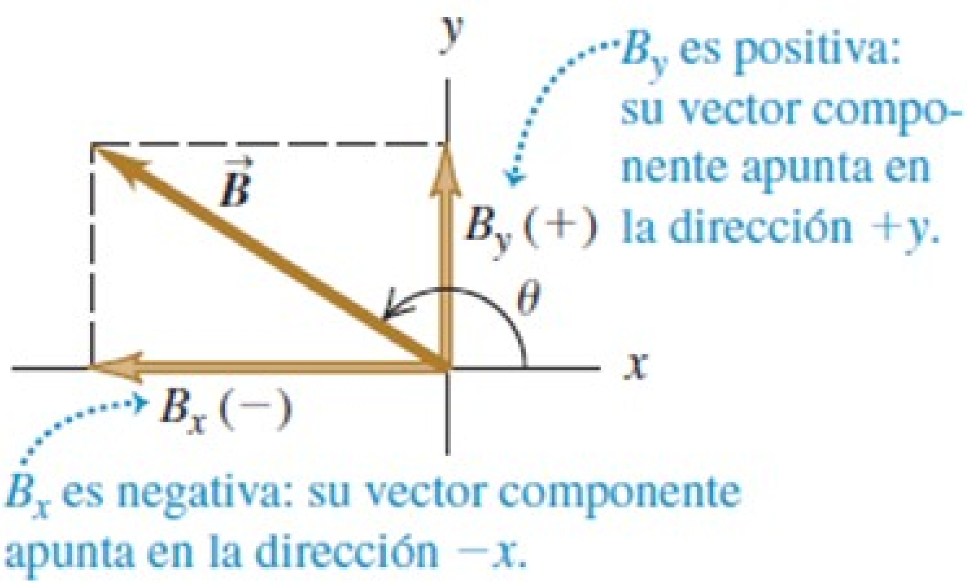
Componentes de un vector

Definimos el número A_x como el módulo de $\mathbf{A_x}$ si apunta en el sentido positivo, si apunta en el sentido negativo, es su opuesto. Análogamente se define A_y.

Los números A_x y A_y son las componentes de ***A.***

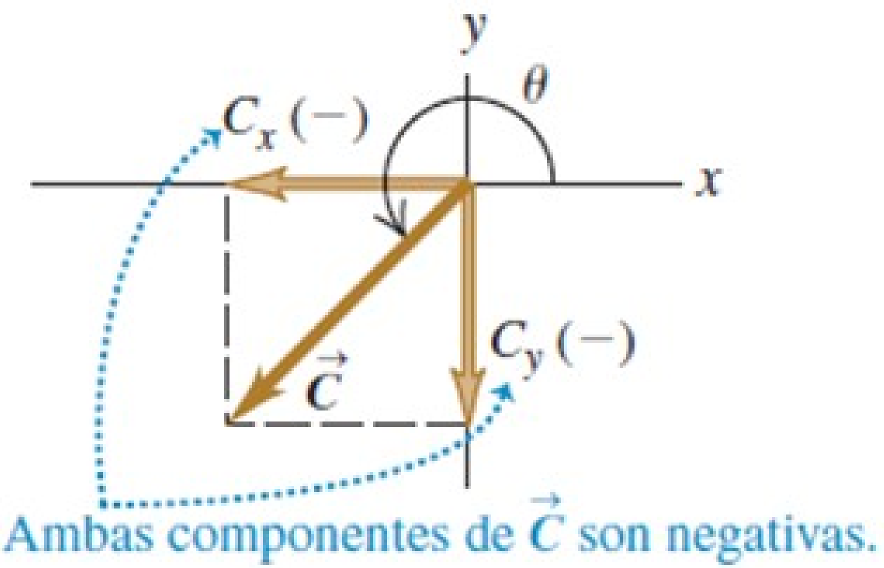


Componentes de un vector



Las componentes de un vector pueden ser números positivos o negativos.

Describimos la dirección de un vector por su ángulo θ en relación con una dirección de referencia: *el eje x positivo,* el ángulo debe ser medido en el sentido antihorario.



$$\frac{A_x}{A} = \cos\theta \qquad \text{y} \qquad \frac{A_y}{A} = \operatorname{sen}\theta$$

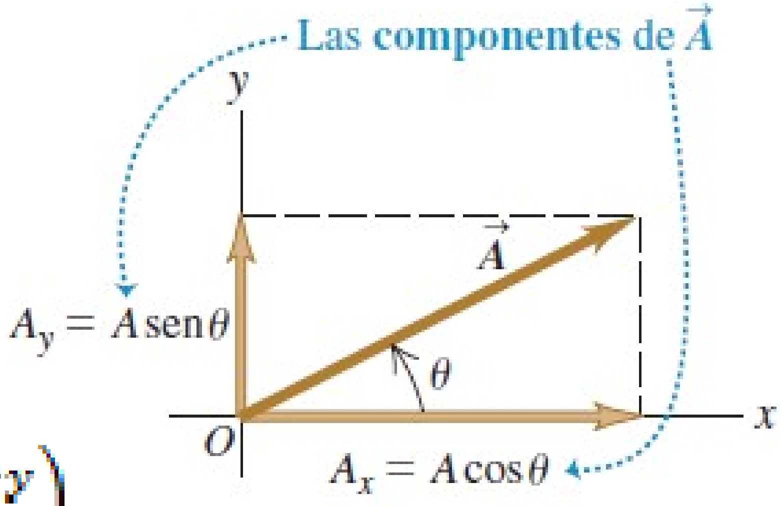
$$A_x = A\cos\theta \qquad \text{y} \qquad A_y = A\operatorname{sen}\theta$$

(θ medido del eje $+x$ girando hacia el eje $+y$)

Componentes de vectores: cálculos

1. Cálculo de la magnitud y la dirección de un vector a partir de sus componentes

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$



$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x} \quad \Longrightarrow \quad \theta = arctan\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

CUIDADO: **Cálculo de la dirección de un vector a partir de sus componentes** Hay un pequeño inconveniente en el uso de las ecuaciones para obtener θ: dos ángulos cualesquiera que difieran 180° tienen la misma tangente.
Para decidir cuál es correcto, debemos examinar las componentes individuales

Componentes de vectores: cálculos

2. Multiplicación de un vector por un escalar.

Si multiplicamos un vector **A** por un escalar c, cada componente del vector **D**= c.**A**, es el producto de c por la correspondiente componente de **A**.

$D_x = c.A_x$ $D_y = c.A_y$

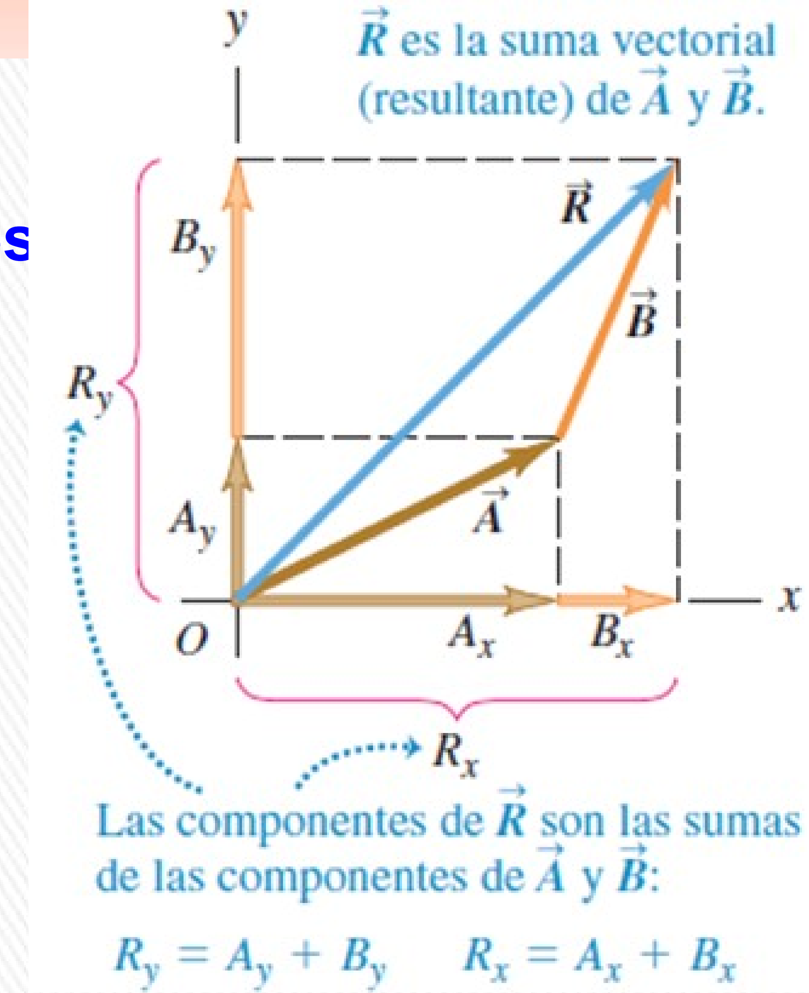
3. Uso de componentes para calcular la suma de vectores (resultante) de dos o más vectores

Cada una de las componentes del vector suma, es la suma de las respectivas componentes de los vectores:

R = **A** + **B**

$R_x = A_x + B_x$ $R_y = A_y + B_y$

Podemos ampliar este procedimiento para calcular la suma de cualquier cantidad de vectores



Componentes de vectores (3D)

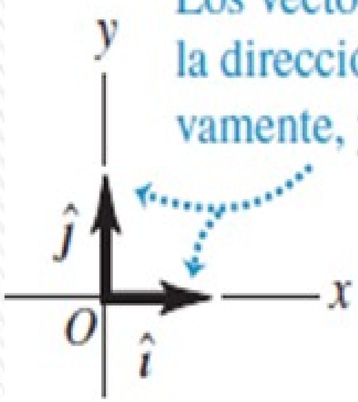
El método de las componentes se puede generalizar para tres dimensiones: vectores con cualquier dirección en el espacio.

Se introduce un eje *z perpendicular al plano xy; entonces, en general,*
Un vector **A** tiene componentes *Ax, Ay y Az en las tres direcciones de coordenadas.*
La magnitud *A está dada por:*

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

VECTORES UNITARIOS (VERSORES)

Vector unitario (o versor) es un vector con módulo igual a 1. Su única finalidad consiste en direccionar: señalar una dirección en el espacio.



Los vectores unitarios $\hat{\imath}$ y $\hat{\jmath}$ apuntan en la dirección de los ejes x y y, respectivamente, y tienen una magnitud de 1.

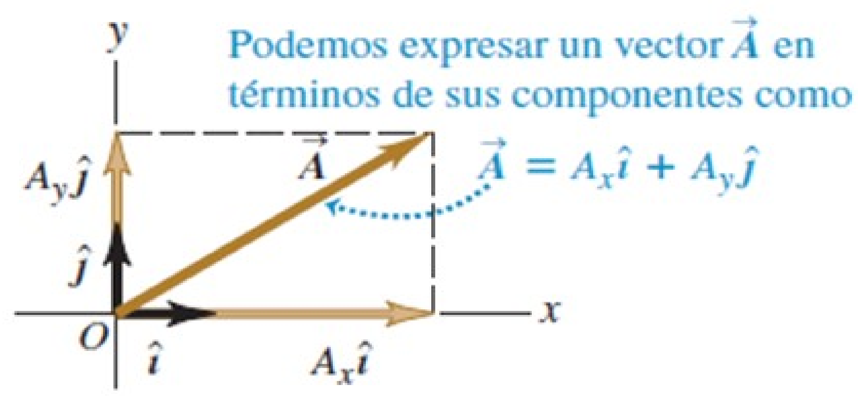
Incluiremos un acento circunflejo o “sombrero” (^) sobre el símbolo de un vector unitario para distinguirlo de los vectores ordinarios cuya magnitud podría ser 1 o alguna otra.

En un sistema de coordenadas *x-y podemos definir un vector unitario* $\hat{\boldsymbol{\imath}}$ *que apunte* en la dirección del eje +x *y un vector unitario* $\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ *que apunte en la* *dirección del eje +y*

VECTORES UNITARIOS (VERSORES)

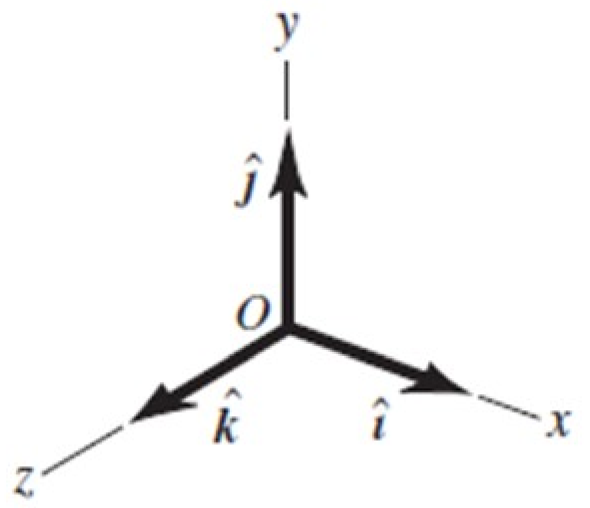
Vector **A** de dos dimensiones escrito en función de sus 2 componentes

$$\mathbf{A} = A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath}$$



Vector **A** de tres dimensiones escrito en función de sus 3 componentes:

$$\mathbf{A} = A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath} + A_z\,\hat{k}$$



Ejemplo

Dado los dos desplazamientos:

$$\overline{D} = \left(6{,}00\ \hat{\imath} + 3{,}00\ \hat{\jmath} - 1{,}00\ \hat{k}\right)m$$

$$\overline{E} = \left(4{,}00\ \hat{\imath} - 5{,}00\ \hat{\jmath} + 8{,}00\ \hat{k}\right)m$$

Obtenga la magnitud del desplazamiento

$$2\boldsymbol{D} - \boldsymbol{E}$$

$$2\overline{\boldsymbol{D}} - \overline{\boldsymbol{E}} = 2\left(6{,}00\ \hat{\imath} + 3{,}00\ \hat{\jmath} - 1{,}00\ \hat{k}\right) - \left(4{,}00\ \hat{\imath} - 5{,}00\ \hat{\jmath} + 8{,}00\ \hat{k}\right)$$

$$2\overline{\boldsymbol{D}} - \overline{\boldsymbol{E}} = (2 \times 6{,}00 - 4{,}00)\hat{\imath} + (2 \times 3{,}00 - (-5{,}00))\hat{\jmath} + (2 \times (-1{,}00) - 8{,}00)\hat{k}$$

$$2\overline{\boldsymbol{D}} - \overline{\boldsymbol{E}} = \left(8{,}00\ \hat{\imath} + 11{,}00\ \hat{\jmath} - 10{,}00\ \hat{k}\right)m$$

$$|2\overline{\boldsymbol{D}} - \overline{\boldsymbol{E}}| = \sqrt{8{,}00^2 + 11{,}00^2 + (-10{,}00)^2} = 16{,}8819\ m$$

$$|2\overline{\boldsymbol{D}} - \overline{\boldsymbol{E}}| = 16{,}9\ m$$

PREGUNTAS PARA EL ANÁLISIS

P1.13 ¿Puede usted encontrar dos vectores de diferente longitud que sumados den cero? ¿Qué restricciones de longitud son necesarias para que tres vectores tengan una resultante cero? Explique su razonamiento.

P1.16 ¿Puede encontrar un vector de magnitud cero cuyas componentes sean distintas de cero? Explique su respuesta.
¿La magnitud de un vector puede ser menor que la magnitud de cualquiera de sus componentes? Explique su respuesta.

P1.18 – Si **C** es la suma vectorial de **A** y **B**; es decir: **C** = **A**+ **B**.
¿Qué deberá ser cierto acerca de **A** y **B** si C= A+B?
¿Qué deberá ser cierto acerca de **A** y **B** si C= 0?.