7 - Movimiento en dos dimensiones

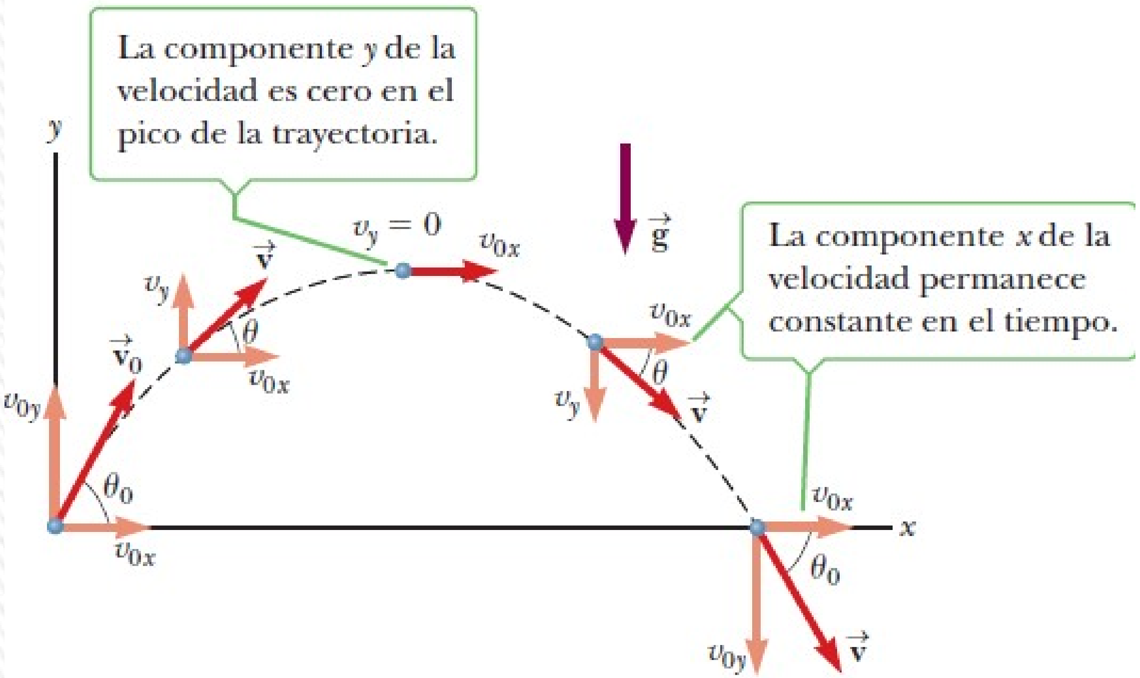
Expulsión de lava de una erupción volcánica. Advierta las trayectorias parabólicas de las brasas proyectadas al aire. Todos los proyectiles siguen una trayectoria parabólica en ausencia de resistencia del aire. (© Arndt/ Premium Stock/PictureQuest)

MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL

Veremos objetos que se mueven en las dos direcciones *x y y de manera simultánea bajo aceleración constante.*
Un caso especial importante de este movimiento en dos dimensiones se le conoce como **movimiento de un proyectil.**
Cualquiera que haya lanzado alguna clase de objeto en el aire ha observado un movimiento de un proyectil.

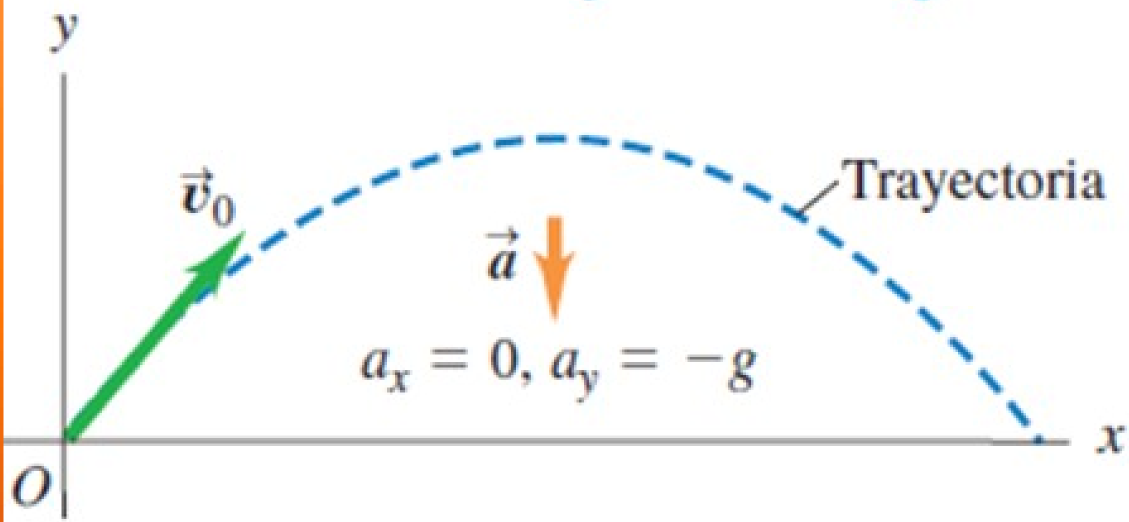
Si se omiten los efectos de la resistencia del aire, la variación de g con la altura y de su dirección y la rotación de la Tierra, la trayectoria del proyectil dentro del campo de gravedad de la Tierra es una curva en forma de **parábola**,

La figura muestra esta trayectoria. La dirección *x positiva es horizontal y hacia la derecha, y la dirección y es vertical* y positiva hacia arriba. El hecho experimental más importante acerca del movimiento de un proyectil en dos dimensiones es que **los movimientos horizontal y vertical son completamente independientes entre sí.**



MOVIMIENTO DE PROYECTILES

- Un proyectil se mueve en un plano vertical que tiene un vector velocidad inicial $\vec{v}_0$.
- Su trayectoria depende solo de $\vec{v}_0$ y de la aceleración hacia abajo debida a la gravedad.



Modelo:

•Proyectil como partícula.

•Aceleración gravedad constante tanto en magnitud como en dirección.

•Se ignoran efectos de la resistencia del aire, como curvatura y rotación de la Tierra.

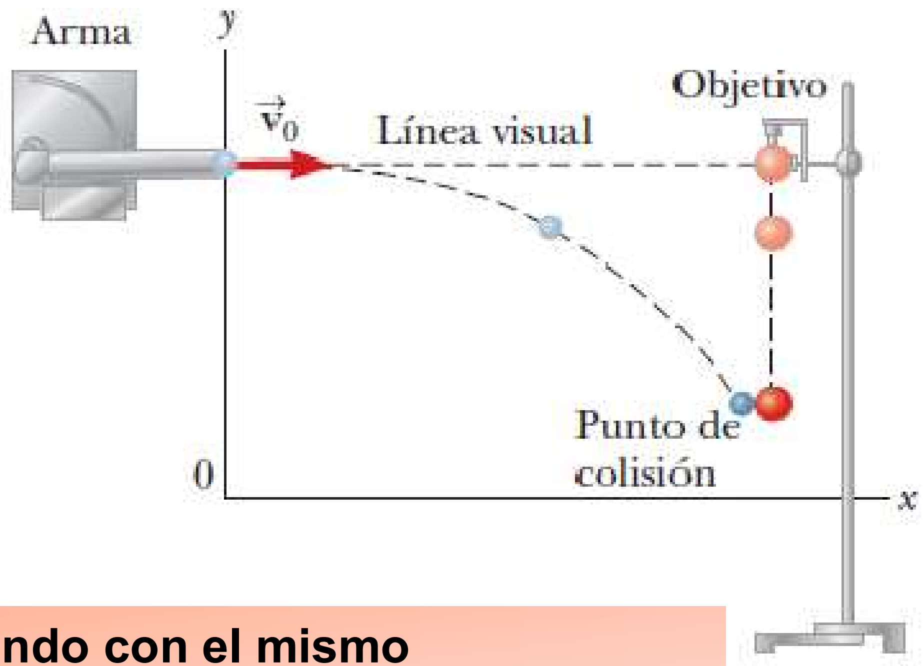
El movimiento del proyectil **siempre se limita a un plano vertical**, determinado por la dirección de la velocidad inicial.
La aceleración gravitatoria es exclusivamente vertical y no puede acelerar al proyectil de forma lateral.

Movimiento es *bidimensional*.

MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL

Que el movimiento de un proyectil sea la superposición de dos movimientos uno horizontal y otro vertical independientes entre sí, significa que el movimiento en una dirección no tiene efecto sobre el movimiento en la otra dirección.
Si una pelota es lanzada en una trayectoria parabólica, el movimiento en la dirección *y* se verá muy semejante al de una pelota lanzada en una trayectoria recta hacia arriba bajo la influencia de la gravedad y el movimiento en la dirección *x*, será un movimiento rectilíneo con velocidad uniforme (la componente horizontal de la velocidad inicial con que se lanza).

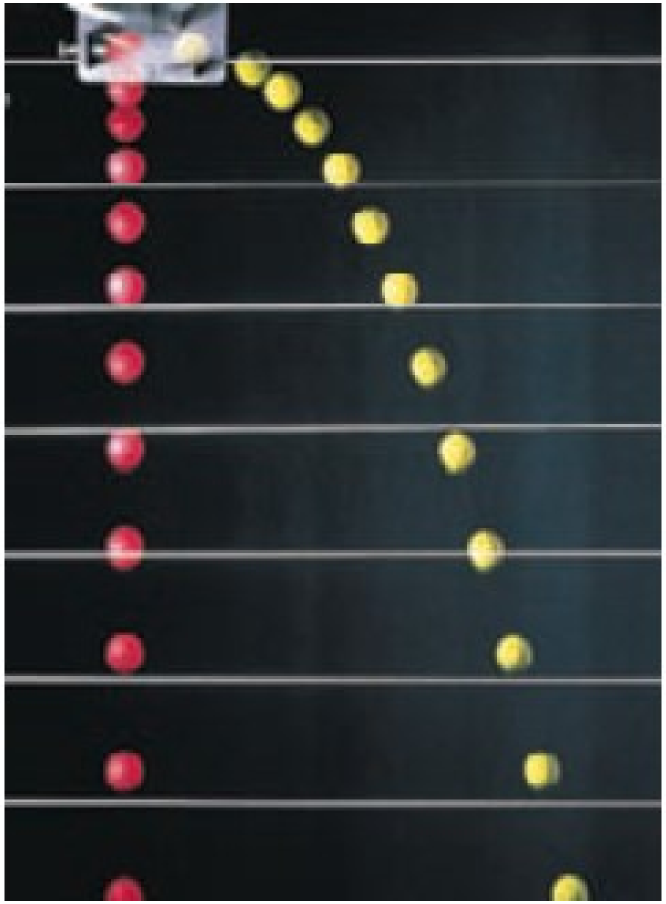
La figura muestra un experimento que ilustra la independencia del movimiento horizontal y vertical. La pistola apunta directamente a la bola objetivo y es disparada en el instante en que ésta es liberada. En ausencia de gravedad, el proyectil daría en el blanco porque el objetivo no se movería. Sin embargo, el proyectil aún da en el blanco en presencia de la gravedad.



Eso significa que el proyectil está cayendo con el mismo desplazamiento vertical que el objetivo, a pesar de su movimiento horizontal.

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

3.16 La pelota roja se deja caer desde el reposo y la amarilla se proyecta horizontalmente al mismo tiempo; las imágenes sucesivas en esta fotografía estroboscópica están separadas por intervalos de tiempo iguales. En un instante determinado, ambas pelotas tienen la misma posición y, velocidad y y aceleración y, a pesar de tener diferentes posición y velocidad en *x*.



Análisis del movimiento: trato por separado las coordenadas *x* y *y*.

Componente x de la aceleración es cero, y componente y es constante e igual a -g.

El movimiento de un proyectil es una combinación de:

- **movimiento horizontal con velocidad constante y,**
- **movimiento vertical con aceleración constante.**

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Ecuaciones de movimiento:

Como según x es un movimiento rectilíneo uniforme (a_x=0) y según y esun movimiento rectilíneo con aceleración constante (a_y= -g)

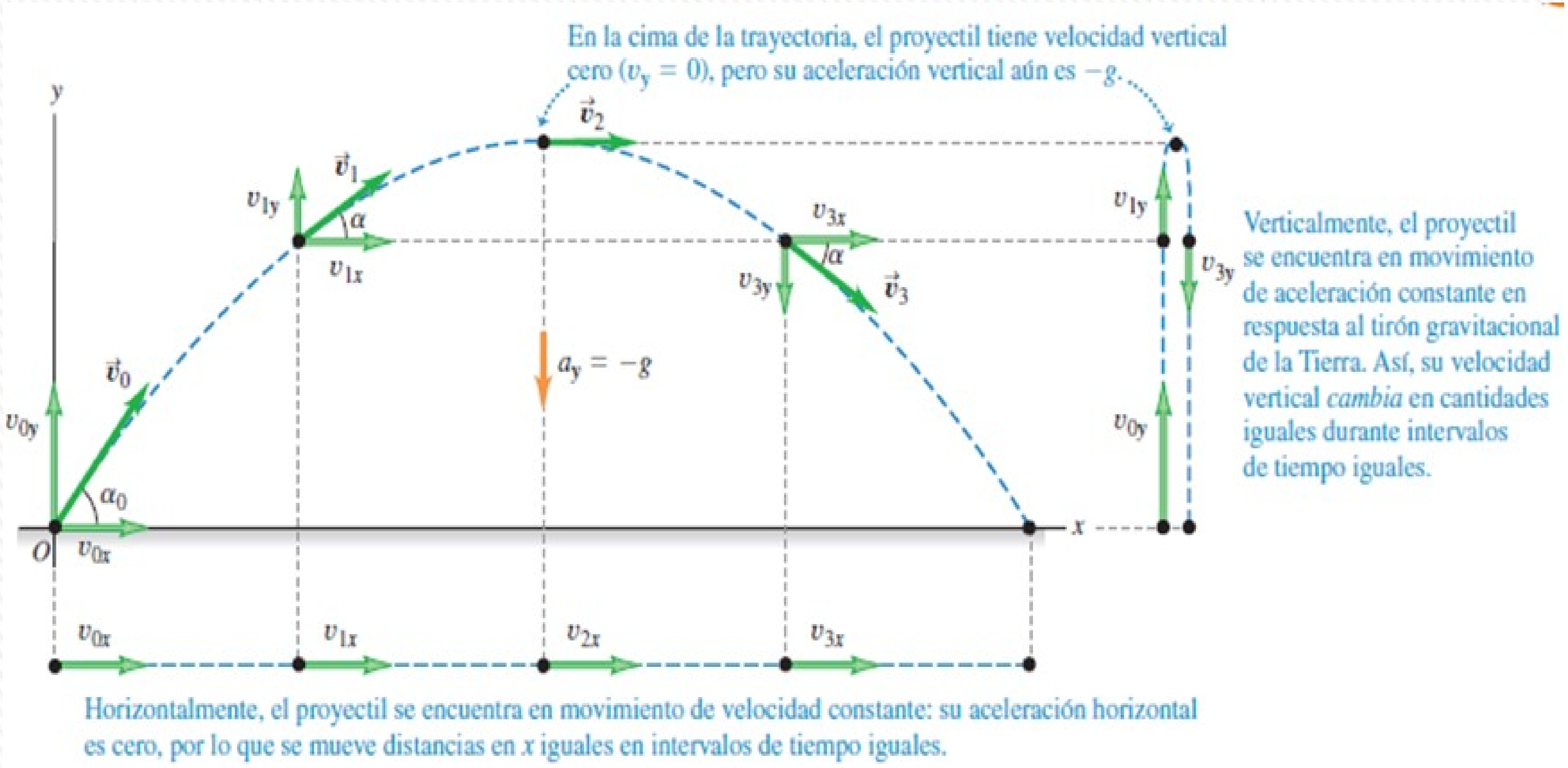
Aceleración: $a_x = 0$ $\qquad a_y = -g$

Velocidad: $v_x = v_{0x}$ $\qquad v_y = v_{0y} - gt$

Posición: $x = x_0 + v_{0x}\, t$ $\qquad y = y_0 + v_{0y}\, t - \frac{1}{2} g t^2$

$v_{0x} = v_o \cos \alpha_0$ $\qquad v_{0y} = v_o \sin \alpha_0$

MOVIMIENTO DE PROYECTILES



Movimiento parabólico del modelo de proyectil

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Otras expresiones:

Distancia del proyectil al punto de lanzamiento: $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$

Rapidez del proyectil (módulo de su velocidad): $v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Dirección de la velocidad, en términos del ángulo α que forma con el eje +x: $\tan\alpha = \dfrac{v_y}{v_x}$

Ecuación de la trayectoria (parábola): $y(x) = (\tan\alpha_0)x - \dfrac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha_0} x^2$

Para lanzamiento con altura de lanzamiento igual al de llegada:

Tiempo en que se alcanza la altura máxima: $t^* = \dfrac{v_0 \sin\alpha_0}{g}$

Altura máxima alcanzada: $h_{max} = y(t^*) = \dfrac{v_0^2 sin^2\alpha_0}{2g}$

Alcance: $R = x(2t^*) = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}$

Alcance máximo para $\alpha_0 = 45º$ $\quad R_{max} = \dfrac{v_0^2}{g}$

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Los hechos importantes del movimiento de un proyectil se pueden resumir como sigue:

1. Siempre que se omita la resistencia del aire, la componente horizontal de la velocidad v_x permanece constante porque no existe componente horizontal de la aceleración.

2. La componente vertical de la aceleración es igual a la aceleración en caída libre $-g$.

3. La componente vertical de la velocidad v_y y el desplazamiento en la dirección *y* son idénticos a los de un cuerpo en caída libre.

4. El movimiento de proyectil puede describirse como una superposición de dos movimientos independientes en las direcciones *x* y *y*.

ATENCIÓN: En la altura máxima que alcanza el proyectil sólo se anula la componente vertical de la velocidad, la componente horizontal permanece invariable.
La aceleración en la dirección *y* *tampoco* es cero en la parte superior de la trayectoria del proyectil. Sólo la componente *y* de la velocidad es cero. Si la aceleración también fuera cero, ¡el proyectil jamás llegaría abajo!

Aceleración constante en dos dimensiones

Hemos visto ahora únicamente problemas en los que un objeto con una velocidad inicial sigue una trayectoria determinada sólo por la aceleración de la gravedad.
En el caso más general, otros agentes pueden ocasionar aceleraciones, como la fricción con el aire, fricción superficial, o bien, los motores.
Estas aceleraciones, consideradas juntas, forman una cantidad vectorial con componentes a_x y a_y. Cuando ambas componentes son constantes, se pueden aplicar las siguientes ecuaciones:

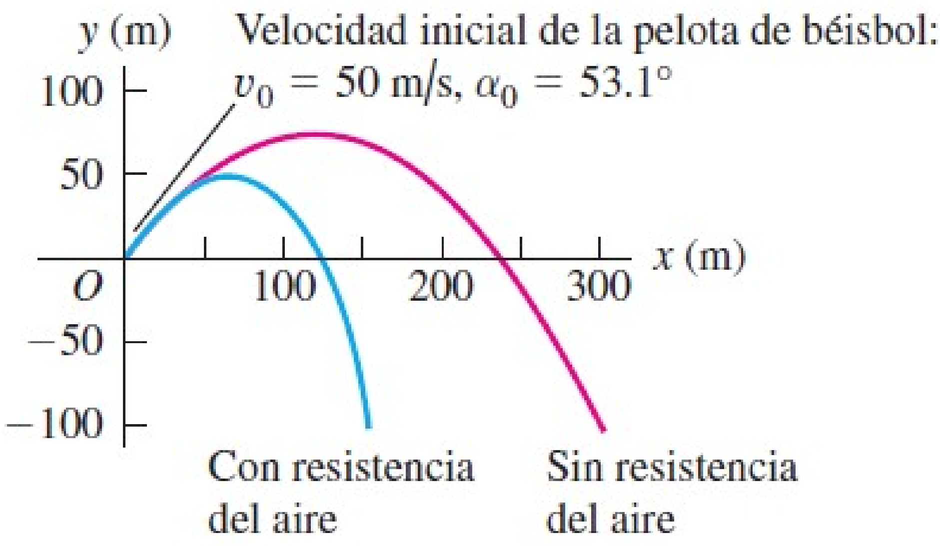
$$v_x = v_{0x} + a_x t \qquad \Delta x = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \qquad {v_x}^2 = {v_{0x}}^2 + 2a_x \Delta x$$

$$v_y = v_{0y} + a_y t \qquad \Delta y = v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \qquad {v_y}^2 = {v_{0y}}^2 + 2a_y \Delta y$$

BALÍSTICA CON RESISTENCIA DEL MUNDO REAL

Efecto de la resistencia del aire

3.20 La resistencia del aire tiene un efecto acumulativo considerable sobre el movimiento de una pelota de béisbol. En esta simulación, permitimos que la pelota caiga por debajo de la altura desde la cual se lanzó (por ejemplo, la pelota podría haberse lanzado desde un acantilado).



El análisis anterior están bien para artilleros en la Luna, donde no hay atmósfera, pero en la Tierra falla bastante al ir más allá de un juego de pelota.
La fricción del aire tiene un efecto apreciable sobre los proyectiles, en especial los que son *ligeros y rápidos;* **la resistencia es proporcional al *cuadrado de la velocidad.***
Una pelota de béisbol bien bateada, que dure mucho en el aire, puede perder hasta la mitad de su rapidez inicial, y llegar sólo un poco más allá de la mitad de lo que hubiera llegado sin fricción.
Una bala de rifle (sólo con unos 150g de masa) disparada a 0,6 km/s, lo cual es bastante, sufrirá mucho la fricción. Si no hubiera resistencia, tendría un alcance máximo tremendo de unos 40km. Debido a la resistencia del aire, no es probable que la bala llegue mucho más allá de 4km.

TIRO DE GRAN ALCANCE – EL CAÑÓN GRAN BERTA

Al final de la Primera Guerra Mundial (1918), la artillería alemana puso en práctica, por primera vez en la historia, el bombardeo de ciudades enemigas situadas a más de cien kilómetros de distancia.
Los propios artilleros alemanes lo descubrieron casualmente. Ocurrió esto al disparar un cañón de gran calibre con un gran ángulo de elevación.
Inesperadamente, sus proyectiles alcanzaron 40 km, en lugar de los 20 calculados.
Resultó, que estos proyectiles, al ser disparados hacia arriba con mucha inclinación y gran velocidad inicial, alcanzaron las altas capas de la atmósfera, en las cuales, debido al enrarecimiento, la resistencia del aire es insignificante. En este medio poco resistente es donde el proyectil recorrió la mayor parte de su trayectoria, después de lo cual cayó casi verticalmente a tierra.
Esta observación sirvió de base a los alemanes para proyectar un cañón de gran alcance, para bombardear París desde una distancia de 115 km. Este cañón terminó de fabricarse con éxito, y durante el verano de 1918 lanzó sobre París más de trescientos proyectiles.
El primer disparo, lanzado el 23 de marzo, ocasionó 256 muertes.
Consistía en un enorme tubo de acero de 34 m de largo y un metro de diámetro. El espesor de paredes de la recámara era de 40 cm. Pesaba un total de 750 toneladas.
Proyectiles tenían 1 m de largo y 21 cm de diámetro, y pesaban 120 kg.
Su carga requería 150 kg de pólvora y desarrollaba una presión de 5000 atmósferas, la cual disparaba el proyectil con una velocidad inicial de 2.000 m//s.

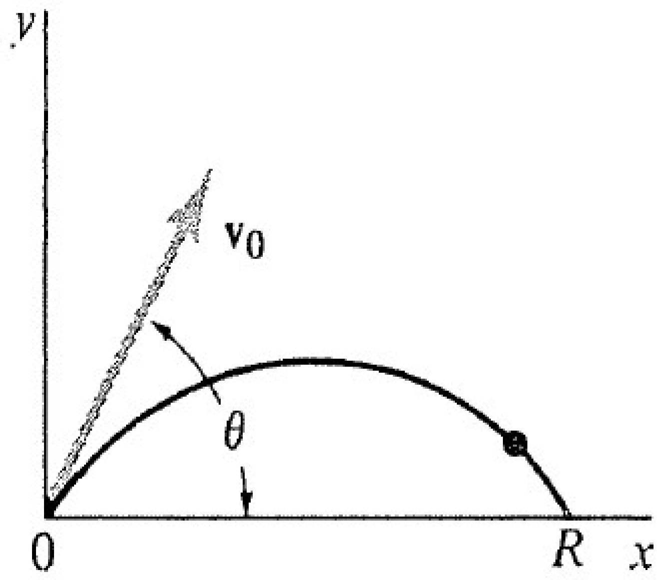
MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Arma	Masa (kg)	Diámetro (mm)	Rapidez de salida (m/s)	Calculado (km)	Real (km)
Lanzagrandas	0,23	40,00	76,00	0,59	0,40
Mortero	4.2	81,00	240,00	5,90	3,74
Pistola Cal. 0.45	0,00162	11,40	262,00	7,00	1,50
Mortero	11,80	106,70	299,00	9,10	5,61
Cañón/obús M198	43,00	155,00	376,00	14,40	9,87
Cañón/obús 8 pulg. MI	90,70	203,00	594,00	36,00	16,60
Rifle M-14	0,00101	7,62	853,00	74,00	3,70
Rifle M-16	0,0036	5,56	991,00	100,00	2,60
Gran Berta	120,00	210,00	2000,00	407,89	115

El fuego se hacía con un ángulo de elevación de 52º y el proyectil describía un enorme arco, cuyo punto culminante se encontraba a 40 km de altura sobre la tierra, es decir, bien entrado en la estratosfera.
Este proyectil tardaba en recorrer los 115 km, que mediaban entre el emplazamiento del cañón y París, 3,5 minutos, de los cuales, 2 minutos volaba en la estratósfera.

ALCANCE DE UN PROYECTIL

Deduciremos las ecuaciones vinculadas a la altura máxima alcanzada y el alcance máximo cuando se dispara un proyectil, y la altura de disparo es la misma que la de llegada, como se muestra en la figura.



La altura máxima, se alcanza cuando la componente vertical de la altura se anula. Llamaremos t* al instante en que esto se produce.

$$v_y = v_o \sin\theta - g t^* = 0$$

$$t^* = \frac{v_o \sin\theta}{g}$$

La altura máxima se acanza para ese instante:

$$h_{máx} = y(t^*) = v_o \sin\theta \, t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} = v_o \sin\theta \left(\frac{v_o \sin\theta}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_o \sin\theta}{g}\right)^2 =$$

$$h_{máx} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

ALCANCE DE UN PROYECTIL

Como el tiempo de subida es el mismo que el de bajada, el alcance *R*= *x*(2*t**)

$$R = x(2t^*) = v_0 \cos\theta\,(2t^*) = v_0 \cos\theta \left(2\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)$$

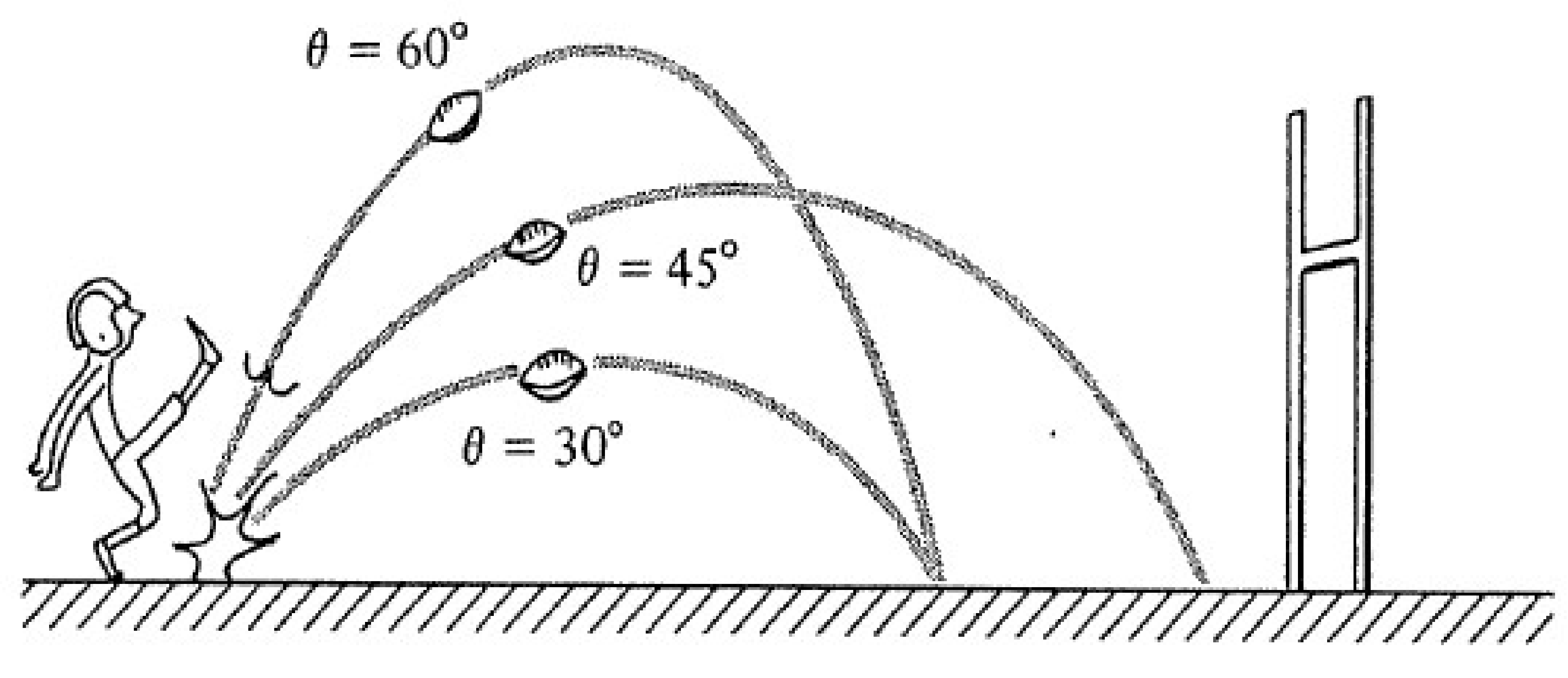
Teniendo en cuenta que: 2sinθ.cosθ= sin 2θ

$$R = 2\frac{v_0^2}{g}\sin\theta\,\cos\theta = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta$$

Puede verse que:
El alcance máximo es cuando θ =45° y vale: $R_{máx} = \frac{v_0^2}{g}$

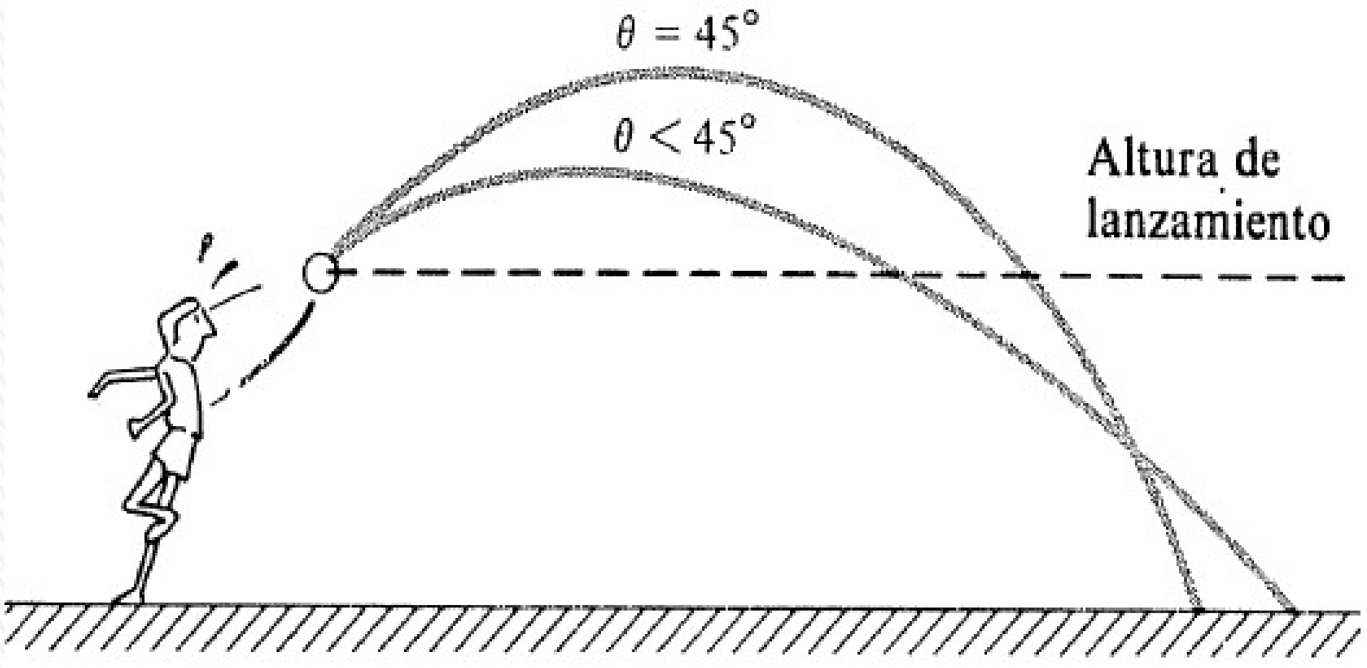
Además como el seno de un ángulo es igual al coseno del ángulo complementario, los proyectiles lanzados desde una superficie plana con un ángulo θ y con un ángulo 90- θ y con la misma rapidez tienen el mismo alcance, pero a mayor ángulo de tiro, mayor altura y mayor tiempo de vuelo.

MOVIMIENTO DE PROYECTILES



Aunque un lanzamiento con un ángulo de 45° produce el máximo alcance para terreno plano con una rapidez inicial dada, un animañ puede en general saltar en otro ángulo por razones relacionadas con sus necesidades o su estructura.
Por ejemplo las langostas a menudo saltan al aire y luego se ponen a volar. En este caso, el alcance del saltamontes es irrelevante, pero el tiempo de duración puede ser significatico. Empiecen a volar a on, las langostas acostumbran a saltar con un ángulo de 45° aproximadamente.

MOVIMIENTO DE PROYECTILES



Lanzamiento efectuado por encima del nivel del suelo. La trayectoria para un ángulo de tiro de 45° y otro más pequeñose cortan por debajo de la . altura de lanzamiento. La trayectoria más plana tiene un mayor alcance.