

Del caos al orden



Figura: Dibujo matemático de Anatoli Fomenko

Probabilidad - Clase 9

Teorema **integral** de De Moivre-Laplace

Ernesto Mordecki

Facultad de Ciencias, Universidad de la República. Montevideo, Uruguay

Curso de la Licenciatura en Matemática - 2020

Contenidos

Teorema límite integral de De Moivre-Laplace

Enunciado

Demostración

Aplicación

Solución en R

Previos

- ▶ Consideremos $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, \mathbf{P})$ una serie de n experimentos de Bernoulli
- ▶ Sea $\mu(\omega)$ la cantidad de éxitos en los n experimentos.
- ▶ Queremos obtener una expresión aproximada, para la probabilidad de un suceso de la forma

$$\{\omega \in \Omega_n: \alpha < \mu(\omega) \leq \beta\}$$

donde $\alpha < \beta$ son arbitrarios.

- ▶ Designamos

$$\mathbf{P}(\alpha < \mu \leq \beta) = \mathbf{P}(\{\omega \in \Omega_n: \alpha < \mu(\omega) \leq \beta\}).$$

Teorema (Teorema límite integral de De Moivre–Laplace)

- ▶ Consideremos n experimentos independientes, con probabilidad de éxito p ($0 < p < 1$), $q = 1 - p$.
- ▶ Sea μ la cantidad de éxitos que ocurren en esta serie.
- ▶ Sean a, b dos números que verifican $-\infty \leq a < b \leq \infty$ (incluimos $a = -\infty$ y $b = \infty$).
- ▶ Entonces, si $n \rightarrow \infty$,

$$\mathbf{P} \left(a < \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \leq b \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx \rightarrow 0, \quad (1)$$

uniformemente, para todos los valores de a, b considerados.

Una manera alternativa de escribir la convergencia que tiene lugar en (1), es, para $n \rightarrow \infty$, tenemos

$$\sup_{-\infty \leq a < b \leq \infty} \left| \mathbf{P} \left(a < \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \leq b \right) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-x^2/2} dx \right| \rightarrow 0,$$

La demostración de este teorema se basa en la aplicación del Teorema límite **local** de De Moivre–Laplace y en el siguiente resultado. Sea para eso

$[x]$ es la parte entera de x ,

es decir el mayor entero que no supera a x .

Lema

Es válida la desigualdad

$$P_n(m) \leq P_n([(n+1)p]),$$

para todo m ($0 \leq m \leq n$).

Demostración del lema. Según la fórmula binomial tenemos

$$\begin{aligned}\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} &= \frac{\binom{n}{m+1} p^{m+1} q^{n-m-1}}{\binom{n}{m} p^m q^{n-m}} \\ &= \frac{p}{q} \times \frac{n! m! (n-m)!}{(m+1)! (n-m-1)! n!} = \frac{p}{q} \times \frac{n-m}{m+1}.\end{aligned}$$

Entonces

$$P_n(m+1) > P_n(m) \text{ si y sólo si } (n-m)p > (m+1)q$$

$$\begin{aligned}np - mp &> (m+1)(1-p) = m+1 - mp - p \\ (n+1)p - 1 &> m.\end{aligned}$$

Dando vuelta:

$P_n(m+1) < P_n(m)$ (crece) cuando y solo cuando $m < (n+1)p-1$

Conclusión:

- ▶ Si $(n+1)p$ no es natural, entonces $P_n([(n+1)p])$ es el máximo (porque $m_0 = [(n+1)p]$ es el mayor entero en la zona donde crece).
- ▶ Si $(n+1)p$ es natural, entonces el máximo es $P_n(m_0 - 1) = P_n(m_0)$ (hay dos valores) porque las probabilidades en nuestra cuenta son iguales.

Eso concluye la demostración de $P_n(m) \leq P_n([(n+1)p])$.

Demostración del teorema integral.

Introduzcamos las notaciones

$$\blacktriangleright P_n(a, b) = \mathbf{P} \left(a < \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \leq b \right),$$

$$\blacktriangleright x_{n,m} = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \quad (\text{como la clase pasada}).$$

Demostramos la convergencia primero con a y b finitos.

Recordemos que $x_{n,m} = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}$. Calculamos

$$P_n(a, b) = \sum_m P_n(m), \quad (2)$$

donde la suma se efectúa en los valores de m , para los cuales $a < x_{n,m} \leq b$. Tenemos $x_{n,m+1} - x_{n,m} = 1/\sqrt{npq}$, y además

$$x_{n,0} = -\frac{np}{\sqrt{npq}} \rightarrow -\infty \quad (n \rightarrow \infty),$$

$$x_{n,n} = \frac{n-np}{\sqrt{npq}} \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow \infty).$$

Tenemos que llegar a una integral que se aproxima por una suma de Riemann. Sea

$$\Pi_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq x_{n,0}, \text{ ó } x > x_{n,n} + \frac{1}{\sqrt{npq}} \\ \sqrt{npq}P_n(m), & \text{si } x_{n,m} < x \leq x_{n,m+1} \text{ (} m = 0, 1, \dots, n \text{)}. \end{cases}$$

y designamos mediante \underline{m} y \bar{m} , a los (únicos) naturales, que verifican las condiciones

$$a < x_{n,\underline{m}} \leq a + \frac{1}{\sqrt{npq}}, \quad b < x_{n,\bar{m}} \leq b + \frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

\sqrt{npq} es “ $1/\Delta x$ ”

De esa forma

$$\int_{x_{n,m}}^{x_{n,m+1}} \Pi_n(x) dx = \sqrt{npq} P_n(m) (x_{n,m+1} - x_{n,m}) = P_n(m),$$

para $m = 0, 1, \dots, n$, y la igualdad (2) puede ser escrita, como

$$P_n(a, b) = \sum_m \int_{x_{n,m}}^{x_{n,m+1}} \Pi_n(x) dx = \int_{x_{n,\underline{m}}}^{x_{n,\bar{m}}} \Pi_n(x) dx. \quad (3)$$

En síntesis, hay que probar que la suma converge a la integral en $[a, b]$ de

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad \text{Densidad normal}$$

. Esto se hace en dos etapas:

- (a) **Aproximación del intervalo:** se observa que la diferencia de integral de la función $\Pi_n(x)$ en los intervalos $[a, b]$ y $[x_{n,m}, x_{n,\bar{m}}]$ es arbitrariamente pequeña, para valores grandes de n (mediante el Lema)
- (b) **Aproximación de la integral:** se aproximan las integrales en el intervalo $[a, b]$ de las funciones $\Pi_n(x)$ y $\varphi(x)$ (aquí se utiliza el teorema local).

Comenzamos entonces dividiendo en tres el intervalo de integración en (3), obteniendo

$$P_n(a, b) = \int_a^b \Pi_n(x) dx - \int_a^{x_{n,\underline{m}}} \Pi_n(x) dx + \int_b^{x_{n,\bar{m}}} \Pi_n(x) dx,$$

de donde resulta, que

$$\left| P_n(a, b) - \int_a^b \Pi_n(x) dx \right| \leq \int_a^{x_{n,\underline{m}}} \Pi_n(x) dx + \int_b^{x_{n,\bar{m}}} \Pi_n(x) dx,$$

Los intervalos de integración son acotados por

$$\Delta x = \frac{1}{\sqrt{npq}}$$

Acotamos el integrando

$$\Pi_n(x) \leq \sqrt{npq}P_n(m_0), \quad \forall x, \text{ (Lema)}$$

donde $m_0 = [(n+1)p]$. Para aproximar por el teorema local, $x_{n,m_0} = (m_0 - np)/\sqrt{npq}$. Tenemos

$$(n+1)p - 1 \leq m_0 \leq (n+1)p$$

$$(n+1)p - 1 - np \leq m_0 - np \leq (n+1)p - np$$

$$\frac{(n+1)p - 1 - np}{\sqrt{npq}} \leq x_{n,m_0} \leq \frac{(n+1)p - np}{\sqrt{npq}}$$

$$\frac{p-1}{\sqrt{npq}} \leq x_{n,m_0} \leq \frac{p}{\sqrt{npq}}$$

Entonces, si n es suficientemente grande

$$-1 \leq x_{n,m_0} \leq 1.$$

Aplicamos el teorema local con $C = 1$ y tenemos

$$\frac{\sqrt{npq}P_n(m_0)}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x_{n,m_0}^2/2}} \rightarrow 1 \quad \text{cuando } n \rightarrow \infty.$$

De aquí, como $\varphi(x) \leq 1/\sqrt{2\pi}$, obtenemos

$$\Pi_n(x) \leq \sqrt{npq}P_n(m_0) < \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$$

para todo n suficientemente grande.

Teniendo en cuenta esta acotación, y la fórmula (15), obtenemos

$$\begin{aligned} \left| P_n(a, b) - \int_a^b \Pi_n(x) dx \right| &\leq \sqrt{npq} P_n(m_0) (x_{n,\underline{m}} - a + x_{n,\overline{m}} - b) \\ &\leq \sqrt{npq} P_n(m_0) \frac{2}{\sqrt{npq}} < \frac{4}{\sqrt{2\pi npq}}, \end{aligned} \quad (4)$$

para todo n suficientemente grande (esto concluye la etapa (a) Aproximación del intervalo).

Demostremos ahora, que

$$\Pi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} (1 + r_n(x)),$$

donde el resto $r_n(x)$ converge uniformemente a cero, es decir

$$\sup_{a \leq x \leq b} |r_n(x)| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (5)$$

Sea x fijo en el intervalo $[a, b]$. Si $x_{n,m} < x \leq x_{n,m+1}$, por el teorema local, tenemos

$$\Pi_n(x) = \sqrt{npq} P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_{n,m}^2}{2}} (1 + \gamma_n),$$

donde $\gamma_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) uniformemente con respecto a m .

Sumando y restando en el exponente, tenemos

$$\Pi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} e^{-(x^2 - x_{n,m}^2)/2} (1 + \gamma_n).$$

Es claro, que

$$\frac{|x^2 - x_{n,m}^2|}{2} = \frac{|(x - x_{n,m})(x + x_{n,m})|}{2} \leq \frac{1}{2\sqrt{npq}} 2 \max(|a|, |b|) \rightarrow 0,$$

si $n \rightarrow \infty$. Poniendo $r_n(x) = e^{-(x^2 - x_{n,m}^2)/2} (1 + \gamma_n) - 1$, la fórmula anterior es

$$\Pi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} (1 + r_n(x)),$$

y se verifica la convergencia uniforme del resto.

Para concluir la etapa (b) tenemos

$$\begin{aligned} & \left| P_n(a, b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \\ & \leq \left| P_n(a, b) - \int_a^b \Pi_n(x) dx \right| + \left| \int_a^b \Pi_n(x) dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \\ & \leq \frac{4}{\sqrt{2\pi npq}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{a \leq x \leq b} |r_n(x)| \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \rightarrow 0, \end{aligned}$$

si $n \rightarrow \infty$.

Faltan los extremos a, b infinitos.

Demostremos ahora el teorema 1 sin supuestos adicionales sobre a y b . Tiene lugar la igualdad

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}. \quad (6)$$

Sea ε un número positivo arbitrario. Sea c una constante positiva que verifica la condición

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\{|x|>c\}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx < \varepsilon. \quad (7)$$

Según se vió en la primera parte de la demostración, tiene lugar la acotación

$$\left| P_n(-c, c) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-c}^c e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| < \varepsilon. \quad (8)$$

si n es suficientemente grande.

Además,

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(\frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \leq -c\right) + \mathbf{P}\left(\frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} > c\right) = 1 - P_n(-c, c) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-c}^c e^{-\frac{x^2}{2}} dx - P_n(-c, c) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\{|x|>c\}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx < 2\varepsilon. \end{aligned} \tag{9}$$

para todo n suficientemente grande, en vista de la elección de c (fórmula 7) y la acotación (8).

Consideremos el caso en el que $a \leq -c < b \leq c$ (los otros dos casos a considerar son análogos). Tenemos

$$\begin{aligned}
 & \left| P_n(a, b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \\
 &= \left| P_n(a, -c) + P_n(-c, b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{-c} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-c}^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \\
 &\leq \left| P_n(a, -c) \right| + \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^{-c} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| + \left| P_n(-c, b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-c}^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right| \\
 &\qquad\qquad\qquad < 2\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon,
 \end{aligned}$$

para todo n suficientemente grande, teniendo en cuenta las acotaciones (9), (7) y (8). Esto concluye la demostración del teorema.

Aplicación

Del teorema 1 se obtiene, que para n suficientemente grande, tiene lugar la identidad aproximada

$$\mathbf{P} \left(a < \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \leq b \right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(b) - \Phi(a),$$

si introducimos la función

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (10)$$

definida para todo x real, la *función de distribución normal*

En R

- ▶ `pnorm(x)` da $\Phi(x)$
- ▶ `dnorm(x)` da $\varphi(x)$
- ▶ `rnorm(n)` **simula** n resultados de un experimento normal estándar, es decir, n valores, cada uno de los cuales tiene probabilidades que se calculan con las áreas de $\varphi(x)$.
- ▶ `qnorm(p)` da la función inversa de $\Phi(x)$:

```
> pnorm(2)
[1] 0.9772499
> qnorm(0.9772499)
[1] 2.000001
>
```

El teorema nos permite calcular $\mathbf{P}(\alpha \leq \mu \leq \beta)$, para α y β dados. Es claro, que

$$\mathbf{P}(\alpha \leq \mu \leq \beta) = \mathbf{P}\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} \leq \frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right),$$

de donde

$$\mathbf{P}(\alpha \leq \mu \leq \beta) \approx \Phi\left(\frac{\beta - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - np}{\sqrt{npq}}\right).$$

Ejemplo

Calcular $\mathbf{P}(\mu \leq 230)$.

▶ Tenemos $p = 0,02$, $q = 1 - p = 0,98$,

▶ $\alpha = 0$, $\beta = 230$, $n = 10000$,

▶

$$\mathbf{P}(\mu \leq 230) \approx \Phi\left(\frac{230 - 200}{14}\right) - \Phi\left(\frac{-200}{14}\right)$$

```
> pnorm((230-200)/14)- pnorm(-200/14)
```

```
[1] 0.9839377
```

```
>
```

Resta ver como hacer con las normales con parámetros (a, σ) .



Figura: ¡Buen finde!