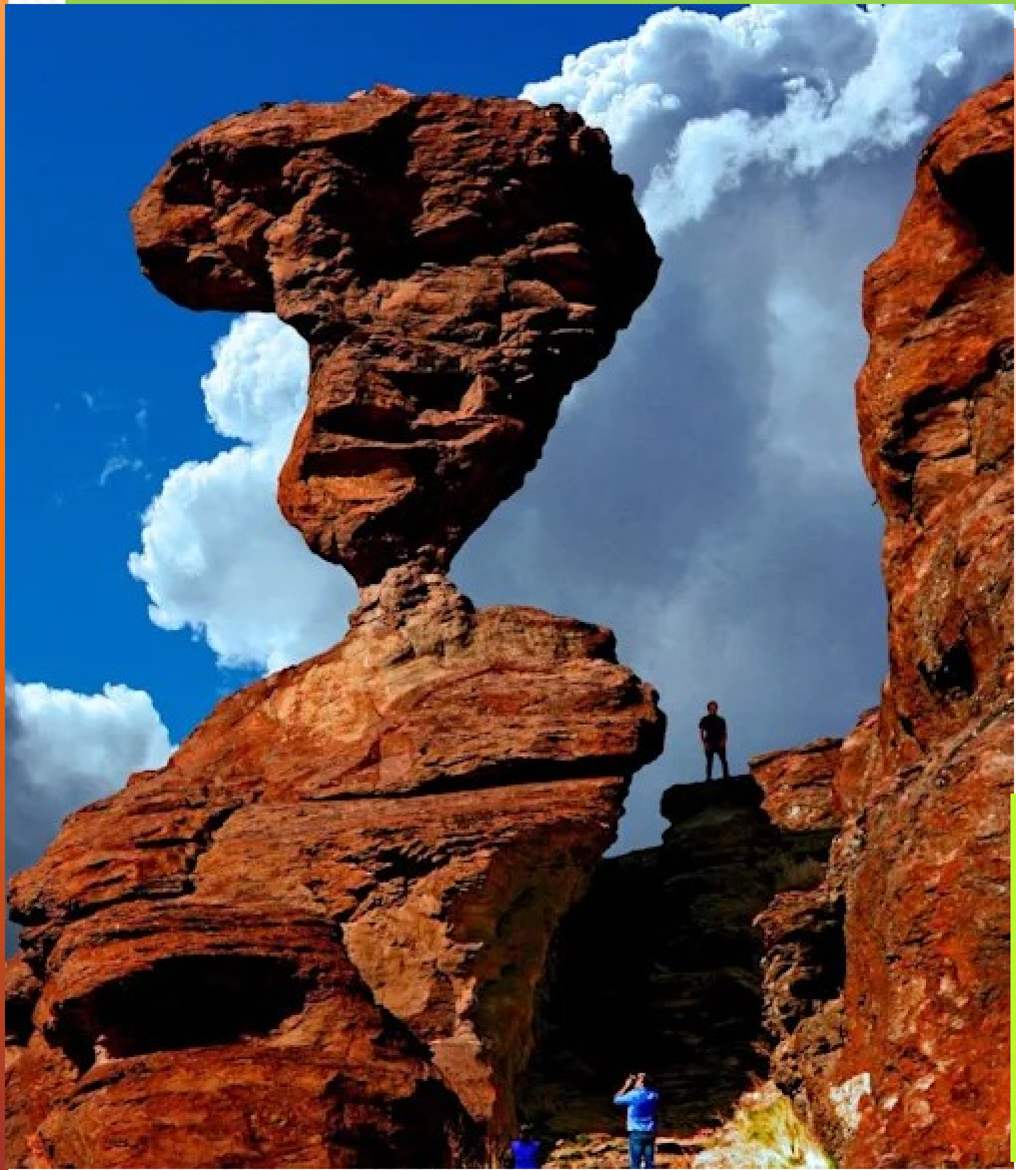
11 LEYES DEL MOVIMIENTO Y EQUILIBRIO ESTÁTICO



Parte III: Equilibrio estático. Producto vectorial. Momentos o torques. Condiciones de equilibrio de un cuerpo rígido. Centro de gravedad. Estabilidad y equilibrio.

Balanced Rock Park (EE.UU.)
Con más de 15 m de altura y 40 toneladas de peso, esta roca tallada por el viento se sostiene a duras penas por un pedestal de solo un metro y 43 cm de extensión.

ESTÁTICA

Estática es el estudio de las fuerzas que actúan sobre un objeto que está en equilibrio y en reposo.
Permite hallar las fuerzas que actúan sobre las distintas partes de estructuras tanto ingenieriles como biológicas (mandíbulas, miembros o columna vertebral de animales), como geológicas (formaciones rocosas en equilibrio).
Permite comprender la **multiplicación de fuerzas** o ***ventaja mecánica*** *obtenida con* ***las máquinas simples****, tales* como las diversas palancas que se encuentran en el cuerpo humano.
También le conciernen problemas de **equilibrio y estabilidad** tanto para objetos como para animales.
Antes de considerar aplicaciones de la estática, hemos de analizar las condiciones de equilibrio de un ***sólido rígido*** *(o simplemente* ***rígido****):*
***objeto ideal que ocupa un lugar en el espacio* y que no cambia su forma ni su tamafio al ser sometido a diferentes esfuerzos.**

Los objetos reales están constituidos por un gran número de partículas (átomos y moléculas) que se mantienen unidas por fuerzas que actuán entre ellas, y éstos pueden vibrar o doblarse al ser sometidos a fuerzas.
Sin embargo, objetos como los huesos y las vigas de acero son suficientemente rígidos como para que dichas **deformaciones resulten despreciables**.

ESTÁTICA

Un sólido rígido estará en equilibrio si se cumplen dos condiciones.

1) Que la fuerza neta sea nula es suficiente para asegurar que una partícula permanezca en reposo y para un rígido significa que el cuerpo como un todo no se acelerará, o que se encuentra en ***equilibrio de traslación***.

Sin embargo, un rígido puede girar si actúan sobre él fuerzas de modo que haya un efecto neto de rotación, o *momento (torque).*

2) Ausencia **de un momento neto o que el torque neto sea cero**. es la segunda condición necesaria para el equilibrio de un sólido rígido.

Al considerar el **equilibrio** y la **estabilidad** necesitaremos utilizar el concepto de ***centro de gravedad***, es decir **el punto en que se puede considerar concentrado el peso de un sólido rígido.**

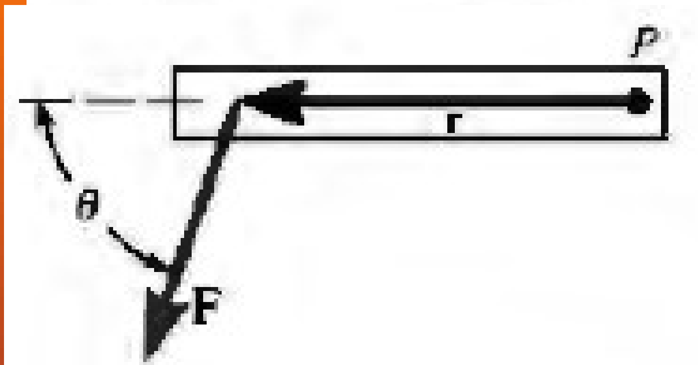
Momento o torque

Consideremos un taburete de asiento giratorio, si aplicamos dos fuerzas opuestas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2} = -\mathbf{F_1}$ en lados opuestos del asiento, éste empezará a girar. El asiento no permanece en reposo aun cuando la fuerza neta sea cero.

Por tanto además de Σ **F** = O**,** (fuerza neta igual a cero) necesitamos otra condición de equilibrio para excluir la posibilidad de movimiento de rotación.

La **magnitud que indica la capacidad de una fuerza para producir rotación** se llama ***momento o torque***.

Un sólido rígido está en equilibrio de rotación cuando no actúa sobre él ningún momento o torque neto.

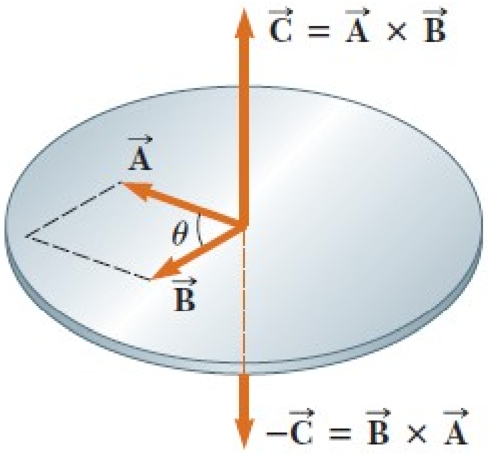


El ***momento*** *o* ***torque*** τ *depende de la* ***fuerza F,*** *de la* ***distancia r*** *desde* un punto del eje de rotación hasta el punto en que actúa la fuerza y del **ángulo θ** *entre r y F.*

El módulo del momento o torque alrededor del punto *P* vale: $\tau = r.F sen\,\theta$
Y corresponde al módulo de un producto vectorial.

PRODUCTO VECTORIAL

Es otro vector **C** cuyo módulo vale C=A B senθ, es perpendicular al plano determinados por los vectores **A** y **B**, y sentido dado por la regla de la mano derecha.



Regla de la mano derecha

$$\vec{\mathbf{C}} = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

$$C = AB \operatorname{sen} \theta$$

Producto vectorial entre versores

$$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = -\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = \hat{k}$$

$$\hat{\jmath} \times \hat{k} = -\hat{k} \times \hat{\jmath} = \hat{\imath}$$

$$\hat{k} \times \hat{\imath} = -\hat{\imath} \times \hat{k} = \hat{\jmath}$$

PRODUCTO VECTORIAL -Propiedades

1- No es conmutativo, en realidad es anticonmutativo: $\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = -\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}}$

2- El producto vectorial de dos vectores paralelos (θ = 0 ó 180°) es nulo.

3- El módulo del producto vectorial de dos vectores perpendiculares es igual al producto de los módulos. $|\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}| = AB.$

4- El producto vectorial cumple con la propiedad distibutiva respecto a la suma: $\vec{\mathbf{A}} \times (\vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{C}}) = \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} + \vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{C}}$

5- Producto vectorial a través de componentes de los vectores:

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\hat{\imath} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\jmath} + (A_xB_y - A_yB_x)\hat{k}$$

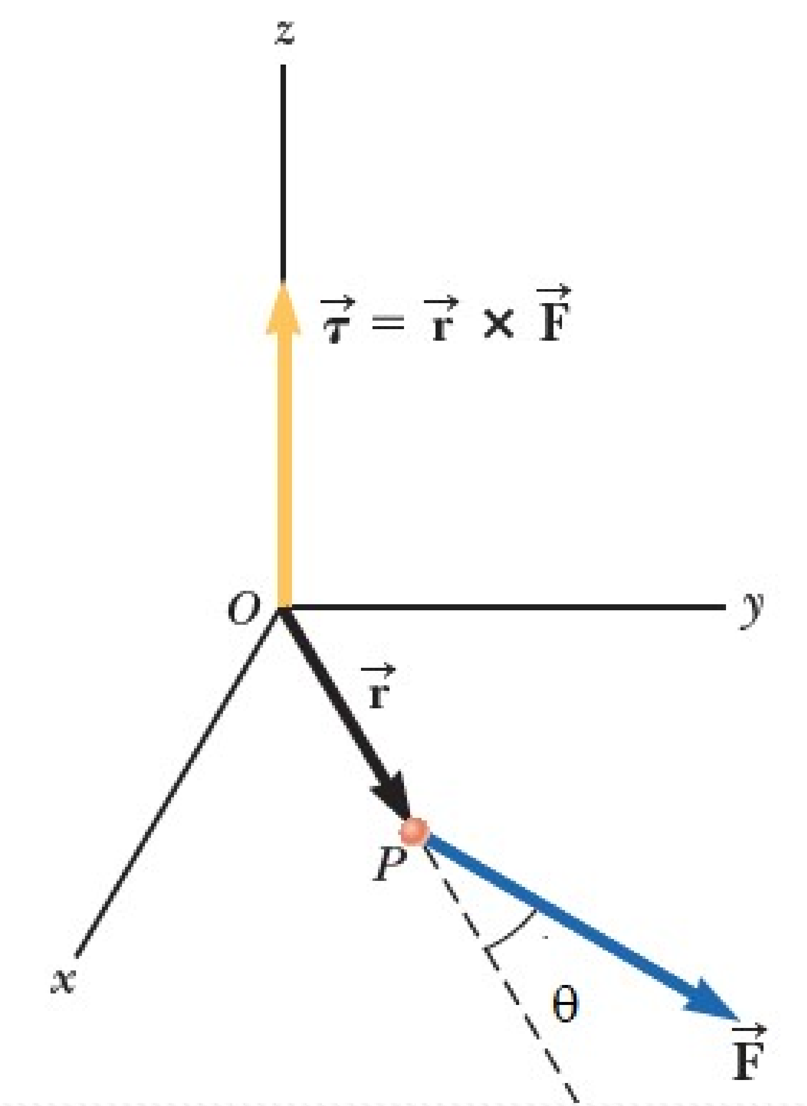
$$\begin{aligned}
\vec{A} \times \vec{B} &= (A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}) \times (B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}) \\
&= A_x\hat{\imath} \times B_x\hat{\imath} + A_x\hat{\imath} \times B_y\hat{\jmath} + A_x\hat{\imath} \times B_z\hat{k} \\
&\quad + A_y\hat{\jmath} \times B_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} \times B_y\hat{\jmath} + A_y\hat{\jmath} \times B_z\hat{k} \\
&\quad + A_z\hat{k} \times B_x\hat{\imath} + A_z\hat{k} \times B_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \times B_z\hat{k}
\end{aligned}$$

PRODUCTO VECTORIAL

El producto vectorial también puede expresarse en forma de determinante:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

MOMENTO O TORQUE (τ)



Torca, torque, momento de torsión o *simplemente* ***momento de una fuerza:*** medida cuantitativa de la tendencia de una fuerza para provocar o modificar el movimiento de rotación de un cuerpo.

Se define el torque de la fuerza **F**, que se aplica en el punto P, respecto al punto O como el producto vectorial del vector **r** (que va desde O a P) por la fuerza **F**.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

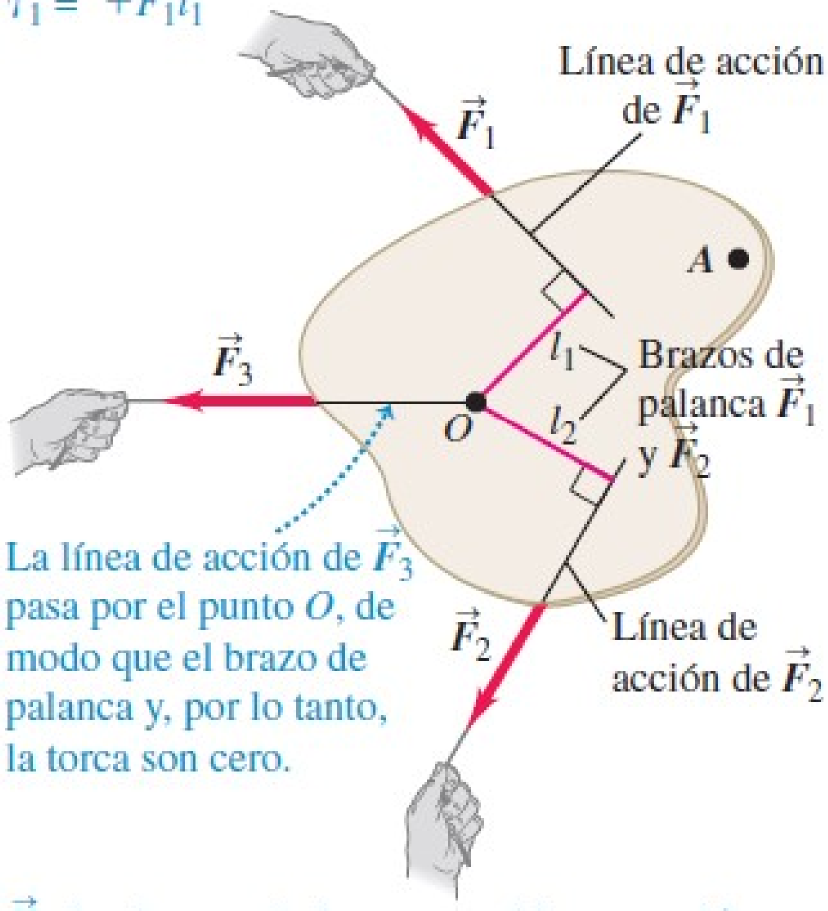
El módulo del torque vale:

$$\tau = r.F\text{sen}\ \theta$$

La magnitud , dirección y punto de aplicación de la fuerza son importantes para provocar la rotación.

MOMENTO O TORQUE (τ)

$\vec{F}_1$ tiende a provocar una rotación en *sentido antihorario* alrededor del punto *O*, por lo que su torca es *positiva*:
$\tau_1 = +F_1 l_1$



$\vec{F}_2$ tiende a producir una rotación en *sentido horario* alrededor del punto *O*, por lo que su torca es *negativa*: $\tau_2 = -F_2 l_2$

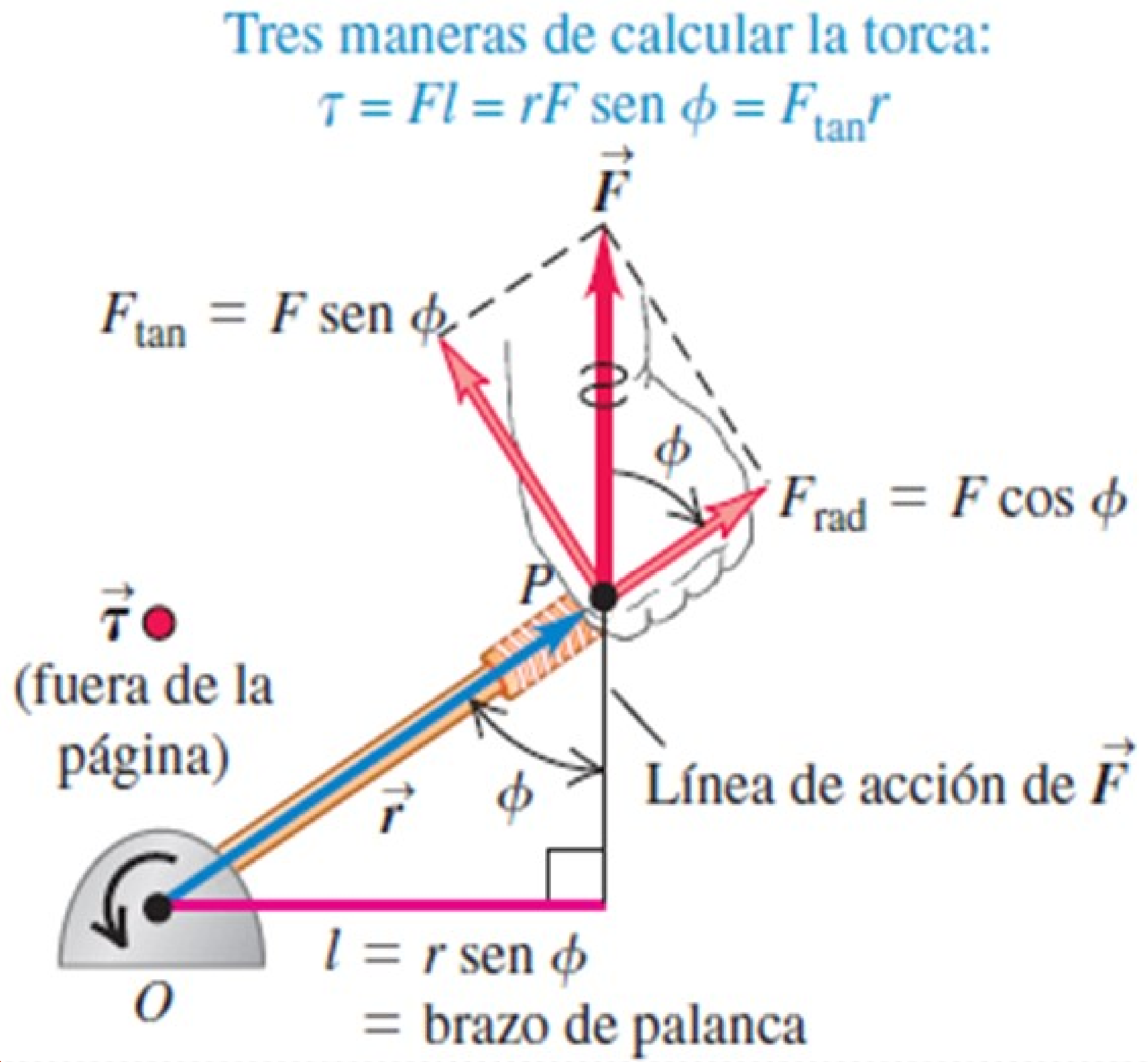
La tendencia de F_1, en provocar una rotación alrededor de *O depende: del módulo de* F_1, *y de la distancia perpendicular l_1 (entre el punto O y la línea de acción de la fuerza) que es el* ***brazo de* palanca o brazo de momento.**

Se usa la letra griega τ (tau) para el torque.

$$\tau = F\,l$$

CUIDADO ! El torque siempre se mide con respecto a un punto.
Si modificamos la posición de este punto, el torque de cada fuerza también cambia.

MOMENTO O TORQUE (τ)



$$\tau = Fl = rF \text{ sen } \phi = F_{tan} r$$

3 formas para calcular el torque:

1) Encontrar el brazo de palanca *l y utilizar*

$\tau = Fl.$

2. Determinar el ángulo Φ entre los vectores **F** y **r**; el brazo de palanca es *r sen Φ, por lo que*

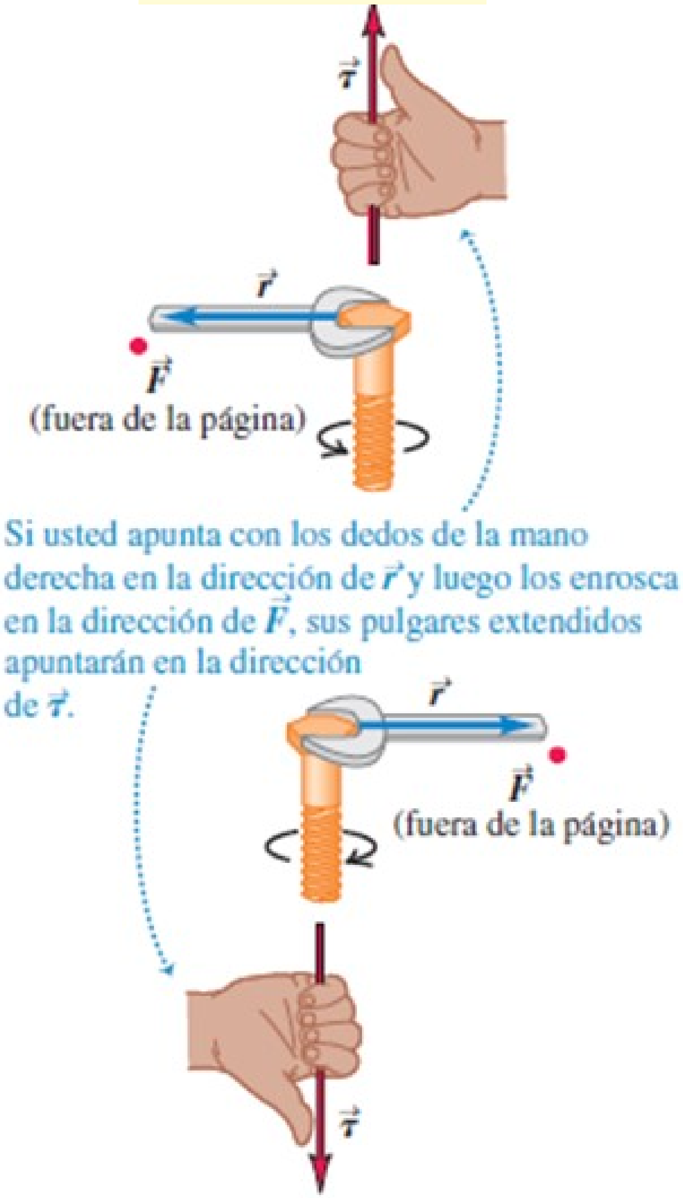
$\tau = rF \text{ sen } \Phi.$

*3. Descomponer **F** en F_{tan} y F_{rad} con respecto a la dirección de **r**.*

$\tau = r(F\text{sen } \Phi) = r.F_{tan}.$

MOMENTO O TORQUE (τ)

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$



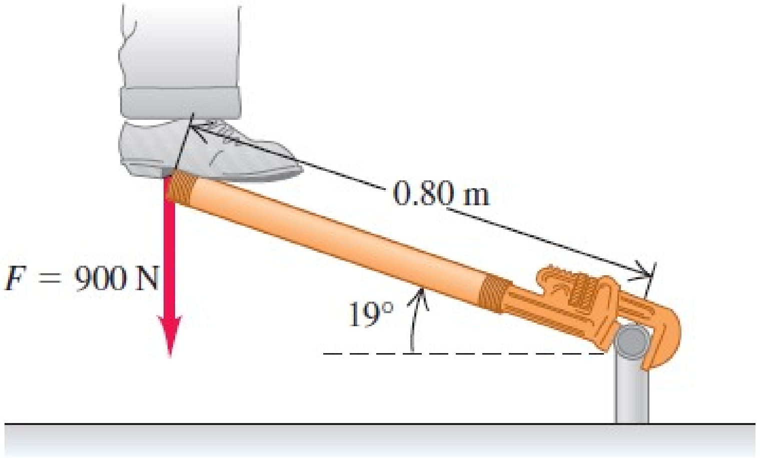
Los torques pueden provocar rotación en cualquier *sentido (antihorario u horario).*

Se debe **elegir un sentido de giro positivo**. Habitualmente se elige que los ***torques en sentido antihorario son positivos.***

La **unidad del SI del torque es el newton-metro**.
Como el torque *no es trabajo ni* energía se expresa en newton-metros, *no en joules.*

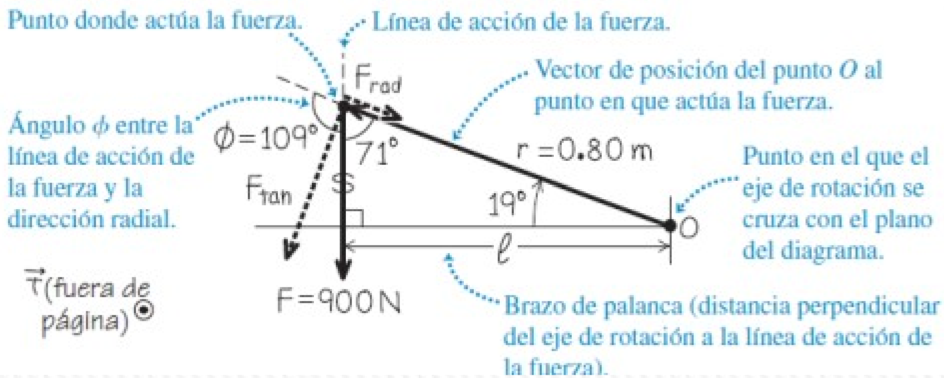
Vectores perpendiculares al plano
(x) entrante al plano
(•) saliente al plano

Ejemplo: Aplicación de un torque



Para aflojar una junta de tubería, un plomero inserta un pedazo de tubo (una "extensión") en el mango de su llave. Se coloca de pie en el extremo del tubo, aplicando todo su **peso de 900 N** en un punto a **0,80 m del centro de la j**unta. *El mango de la llave y la* extensión forman un ángulo de **19° con la horizontal**. Encuentre la magnitud y dirección del torque que se aplica en torno al centro de la junta.

$$l = r \text{ sen } \phi = (0.80 \text{ m}) \text{ sen } 109° = (0.80 \text{ m}) \text{ sen } 71° = 0.76 \text{ m}$$



$$\tau = Fl = (900 \text{ N})(0.76 \text{ m}) = 680 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$\tau = rF \text{ sen } \phi = (0.80 \text{ m})(900 \text{ N})(\text{sen } 109°) = 680 \text{ N} \cdot \text{m}$$

CONDICIONES DE EQUILIBRIO

Una partícula está en ***equilibrio*** (no tiene aceleración) en un marco de referencia inercial, si la suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre ella es cero:

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = 0$$

Para un cuerpo *extenso:* **el centro de masa del cuerpo no tiene aceleración cuando la resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo es cero**.

Primera condición de equilibrio:

$$\sum \overline{\boldsymbol{F}} = 0$$

$$\sum F_x = 0 \qquad \sum F_y = 0 \qquad \sum F_z = 0$$

Otra condición para que un rígido se encuentre en equilibrio es que no debe tener tendencia a *girar.*
Para que el cuerpo no comience a girar en torno a ese punto, la rapidez de cambio del momento angular *también* debe ser cero. Por lo tanto **la suma de los torques externos con respecto a cualquier punto debe ser cero**.

Segunda condición de equilibrio:

$$\sum \overline{\tau} = 0$$

Alrededor de cualquier punto

CONDICIONES DE EQUILIBRIO

Dos condiciones de equilibrio:

$$\sum \overline{F} = 0 \qquad \sum \bar{\tau} = 0$$

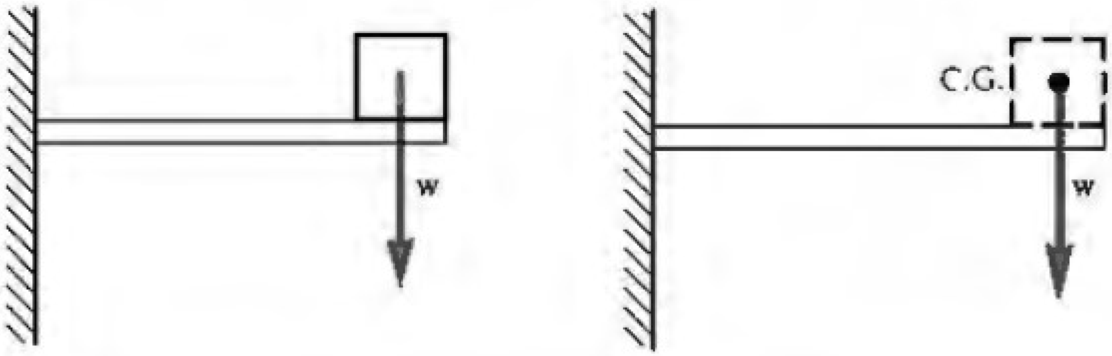
Alrededor de cualquier punto

Las situaciones en las que un cuerpo rígido está en reposo (sin traslación ni rotación). Se dice que tal cuerpo se encuentra en **equilibrio estático**.

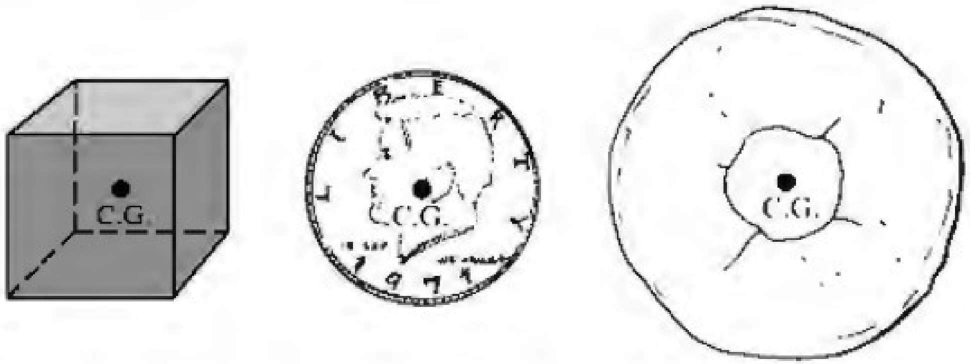
Sin embargo, las mismas condiciones son válidas para un cuerpo rígido con movimiento de *traslación* uniforme (sin rotación), como un avión que vuela con rapidez, dirección y altura constantes.
Un cuerpo así está en equilibrio, pero no es estático.

CENTRO DE GRAVEDAD

El torque con respecto a cualquier punto producido por el peso de un objeto es igual al que produciría un objeto puntual con su mismo peso y situado en un punto llamado ***centro de gravedad (C.G.).***



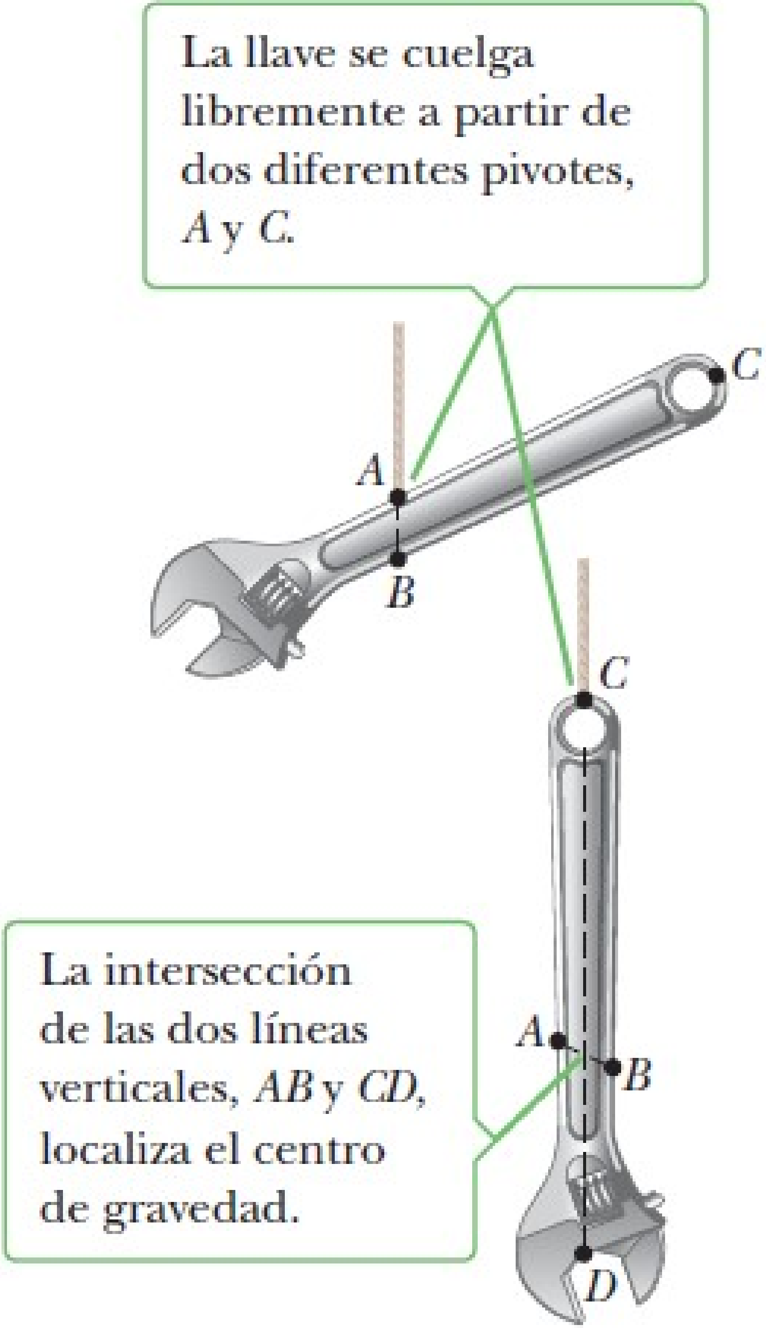
Los centros de gravedad de objetos simétricos y uniformemente densos están situados en sus centros geométricos.
Para objetos no simétricos, el C.G. puede calcularse matemáticamente o localizarse experimentalmente.



Un objeto suspendido siempre cuelga de manera que su C.G. se encuentra directamente por debajo del punto de suspensión, ya que en esta posición el torque que resulta del peso con respecto a ese punto es cero.
Esta observación proporciona una manera de localizar el C.G. experimentalmente.

CENTRO DE GRAVEDAD

Una técnica experimental para determinar el centro de gravedad de una llave.

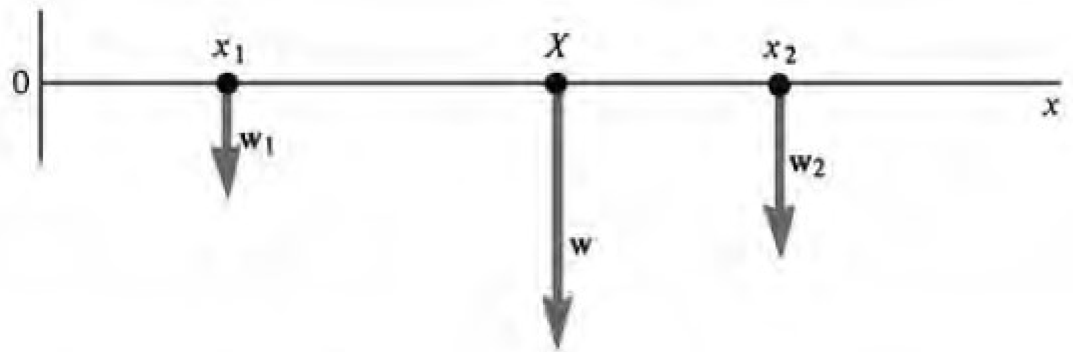


Este soporte de una botella de vino es una sorprendente muestra de equilibrio estático.

CENTRO DE GRAVEDAD

Mostraremos ahora cómo encontrar matemáticamente el C.G. empezando por el sistema más simple posible: dos masas puntuales en los extremos de una barra sin peso dirigida a lo largo del eje *x.*

El C.G. es un punto desconocido *X. A partir de la definición, un peso* $w = w_1 + w_2$ *,* concentrado en el punto *X* *producirá un torque* igual a la suma de los torques debidos a w_1 y w_2.



El momento de cada uno de ellos respecto al origen es $\tau_1 = -x_1.w_1$ y $\tau_2 = -x_2.w_2$.
El torque total respecto a O vale: $\tau = \tau_1 + \tau_2 = -x_1.w_1 - x_2.w_2$

Un solo peso *w* en el punto *X* produce un torque $\tau = -Xw$.
Igualando ambas expresiones parar encontramos que el C.G. está situado en:

$$X = \frac{-x_1.w_1 - x_2.w_2}{-w} = \frac{x_1.w_1 + x_2.w_2}{w_1 + w_2}$$

Si hay más de dos pesos, el C.G. se encuentra de la misma manera:

$$X = \frac{x_1.w_1 + x_2.w_2 + x_3.w_3 + \cdots}{w_1 + w_2 + w_3 + \cdots} = \frac{\sum_i x_i.w_i}{\sum_i w_i}$$

CENTRO DE GRAVEDAD

La ecuación anterior del centro de gravedad contiene los pesos tanto en el numerador como en el denominador. Si sustituimos $w_i = m_i g$ *para cada peso, los factores g se anulan (suponiendo que el valor de g no varía).*

Entonces, *X se expresa en función de las masas en* vez de en función de los pesos y se denomina ***centro de masas (C.M.)****.*

No hay diferencia entre el C.G. y el C.M. mientras **g tenga la misma dirección y módulo para** cada peso.

El procedimiento para hallar el centro de gravedad de configuraciones más complicadas es básicamente el mismo. Si los pesos se hallan en diversos puntos en un plano, entonces el C.G. se encuentra en un punto *(X. Y.) del plano.*

Usamos la ecuación anterior para hallar *X y una ecuación análoga para* las coordenadas *y de los pesos se emplea para obtener Y.*

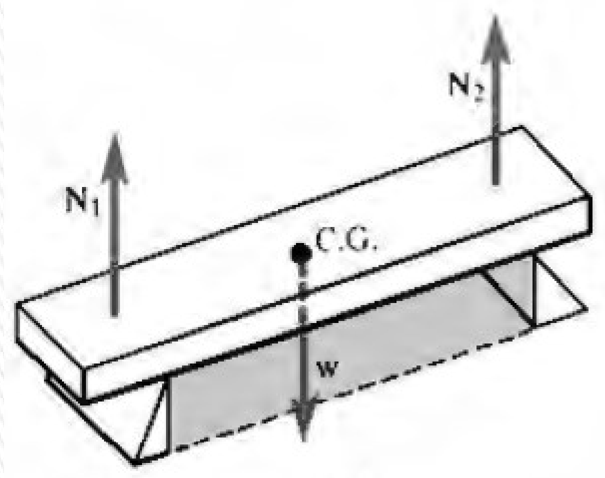
$$X = \frac{x_1 . w_1 + x_2 . w_2 + x_3 . w_3 + \cdots}{w_1 + w_2 + w_3 + \cdots} = \frac{\sum_i x_i . w_i}{\sum_i w_i}$$

$$Y = \frac{y_1 . w_1 + y_2 . w_2 + y_3 . w_3 + \cdots}{w_1 + w_2 + w_3 + \cdots} = \frac{\sum_i y_i . w_i}{\sum_i w_i}$$

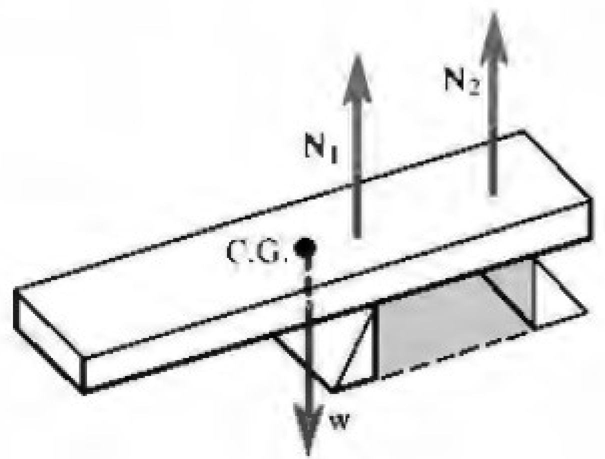
ESTABILIDAD Y EQUILIBRIO

El número y posición de las patas de un animal se han determinado parcialmente, según sus necesidades de estabilidad y de equilibrio. La idea básica se ilustra mediante el tablón de la figura.

Si su C.G. se halla entre los soportes, los torques en torno al C.G. debidos a $\mathbf{N_1}$ y a $\mathbf{N_2}$ son opuestos y se anulan, y por lo tanto el tablón se halla en equilibrio.

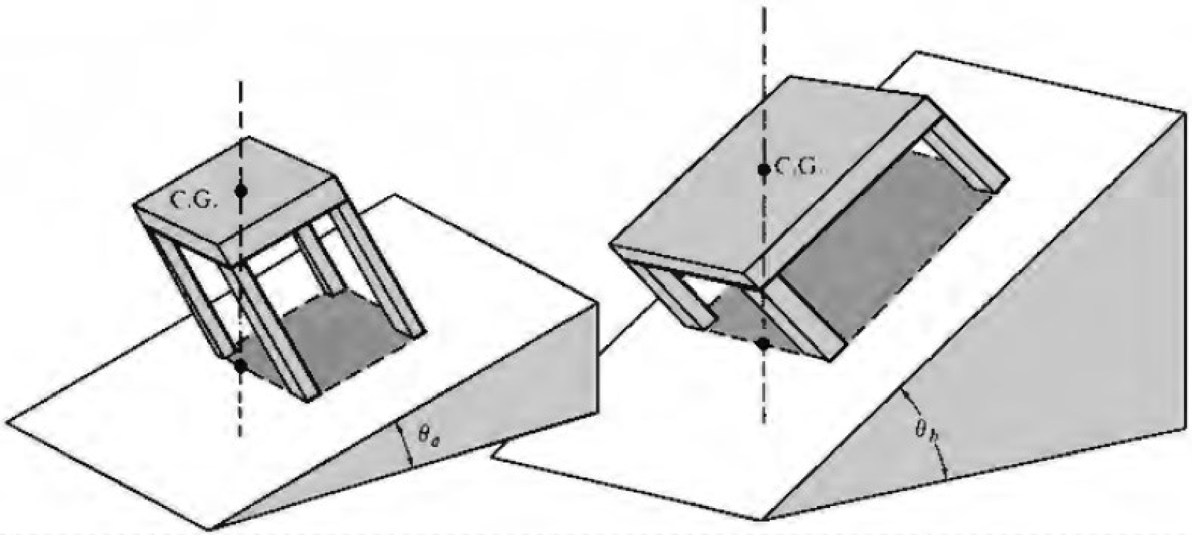


Sin embargo, cuando el centro de gravedad se halla a la izquierda de ambos soportes, los torques de $\mathbf{N_1}$ y $\mathbf{N_2}$ con respecto al C.G. son ambos positivos.
Como el torque neto no es nulo, el tablón se cae.
Así, **un objeto se halla en equilibrio sólo cuando *su centro de gravedad se halla por encima del área de la base definida* por sus soportes.**



Un animal que se sostiene sobre cuatro patas es análogo a una mesa. Una mesa colocada sobre una superficie que se vaya inclinando gradualmente, acaba por caerse cuando su centro de gravedad ya no se halla sobre la superficie delimitada por los extremos de sus cuatro patas.

ESTABILIDAD Y EQUILIBRIO

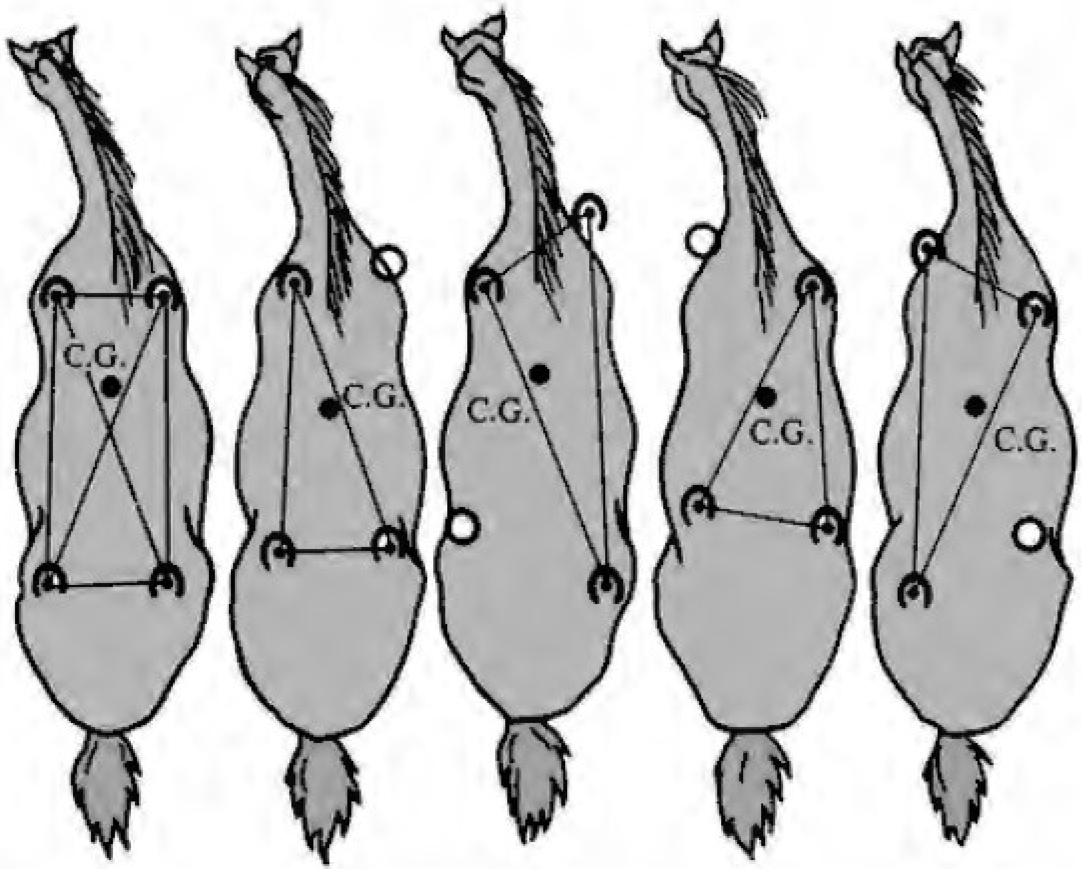


Cuanto más cortas sean las patas para una mesa de forma determinada, mayor será el ángulo θ *en que esto ocurra y mayor será su estabilidad;* una mesa baja es más estable que una mesa alta.

Análogamente, el C.G. de los automóviles, barcos y vasijas ha de mantenerse lo más bajo posible para asegurar la máxima estabilidad.
Se observa que las ratas y ardillas, cuyas piernas son relativamente cortas, están bien adaptadas para vivir en terrenos escarpados o en las ramas de los árboles. En cambio, el caballo y el antílope, cuyas patas son largas, se encuentran bien dispuestos para ser eficaces en la carrera sobre terrenos casi planos.

Si un cuadrúpedo levanta una pata, permanecerá en equilibrio si su C.G. se encuentra por encima del área triangular de la base delimitada por las tres patas restantes. Moviendo las patas en el orden correcto, puede andar lentamente manteniendo siempre tres patas en contacto con el suelo, y con el C.M. por encima del triángulo definido por ellas.

ESTABILIDAD Y EQUILIBRIO



El orden es: delantera derecha, trasera izquierda, delantera izquierda, trasera derecha.

Es el que siguen todos los animales cuadrúpedos y los niños que van a gatas.

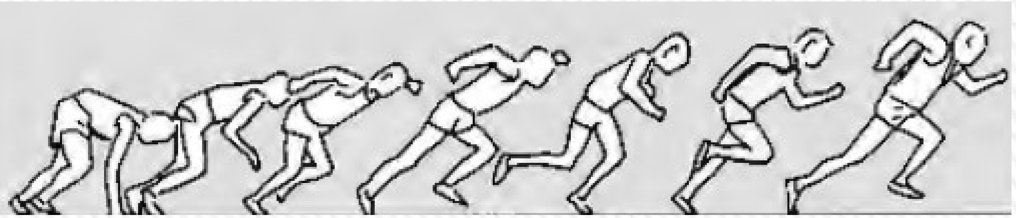
Los seres humanos, los pájaros y algunos animales pueden mantenerse en equilibrio sobre uno o dos pies, pero ello ocurre gracias a que sus pies son suficientemente anchos conio para permitírselo.

Cuando un cuadrúpedo corre velozmente, puede ocurrir que sólo una o dos de sus patas estén en el suelo en el mismo instante. La tendencia a inclinarse diagonalmente hacia adelante o a balancearse hacia los lados se ve contrarrestada cuando las otras patas bajan al suelo.

Así pues, se requieren breves períodos de inestabilidad para el movimiento rápido de cuadrúpedos o bípedos.

ESTABILIDAD Y EQUILIBRIO

Para que los animales de pies pequeños sean estables, es necesario que tengan como mínimo tres patas en el suelo, así los insectos, que tienen seis patas, pueden mover tres al mismo tiempo y ser todavía estables en cualquier instante.
Como su masa es muy pequeña, incluso un ligero soplo de aire los haría caer si tuvieran períodos de inestabilidad. La necesidad de ser estables incluso con viento moderado explica también por qué sus patas no son casi verticales como las de los mamíferos, sino que se doblan hacia afuera.
El hecho de que los animales tengan en general el mínimo número de patas compatibles con la estabilidad se relaciona aparentemente con razones de fuerza y de peso.
Una sola pata que pesara lo mismo que dos patas más delgadas es más adecuada para resistir los momentos que tienden a doblarla.
De acuerdo con ello, la fracción de peso del cuerpo correspondiente a las patas se hace mínima, manteniendo el número de patas lo más pequeño posible.



Un velocista, en la salida e incluso durante la carrera, tiene su centro de masas muy por delante de sus pies, como se muestra en este dibujo..

Esto significa que se encuentra en una posición muy inestable.
Logra mantener el equilibrio llevando sus piernas hacia adelante justo a tiempo de evitar la caída. Esta posición extrema ayuda al atleta a ejercer sobre el suelo una fuerza mayor que aumenta su aceleración.