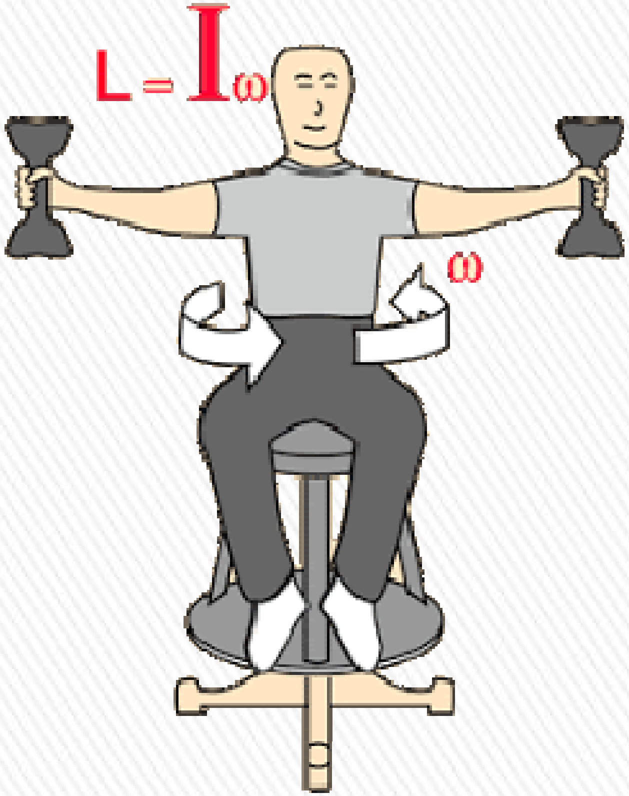
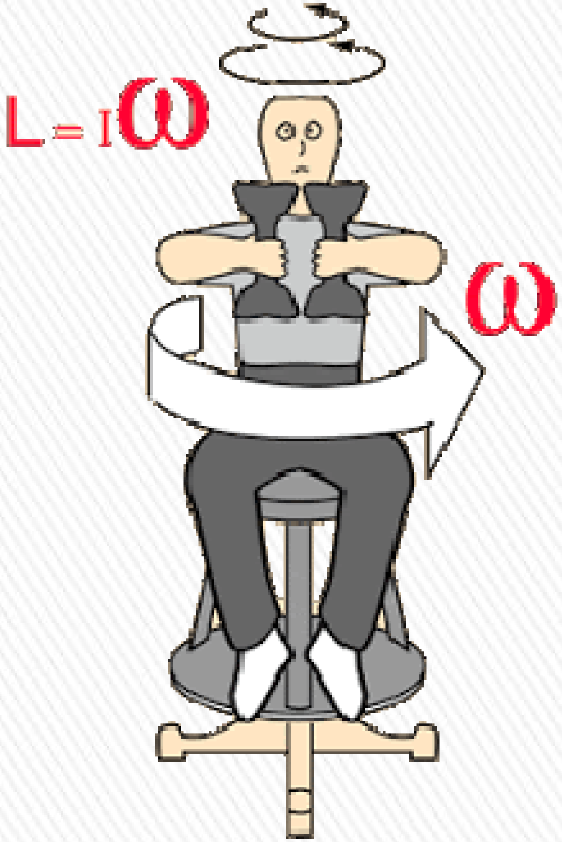
19- Momento angular





- Momento lineal o cantidad de movimiento o ímpetu.
- Impulso.
- Conservación del momento lineal.
- Colisiones

ANUNCIOS

1- Horario adicional de consultas: miércoles 18:30-20:00

Se sigue manteniendo la del sábado a las 9:00 y las posteriores a los teóricos

Sesión de Zoom para los teóricos de la tarde y clases de consultas con HK:

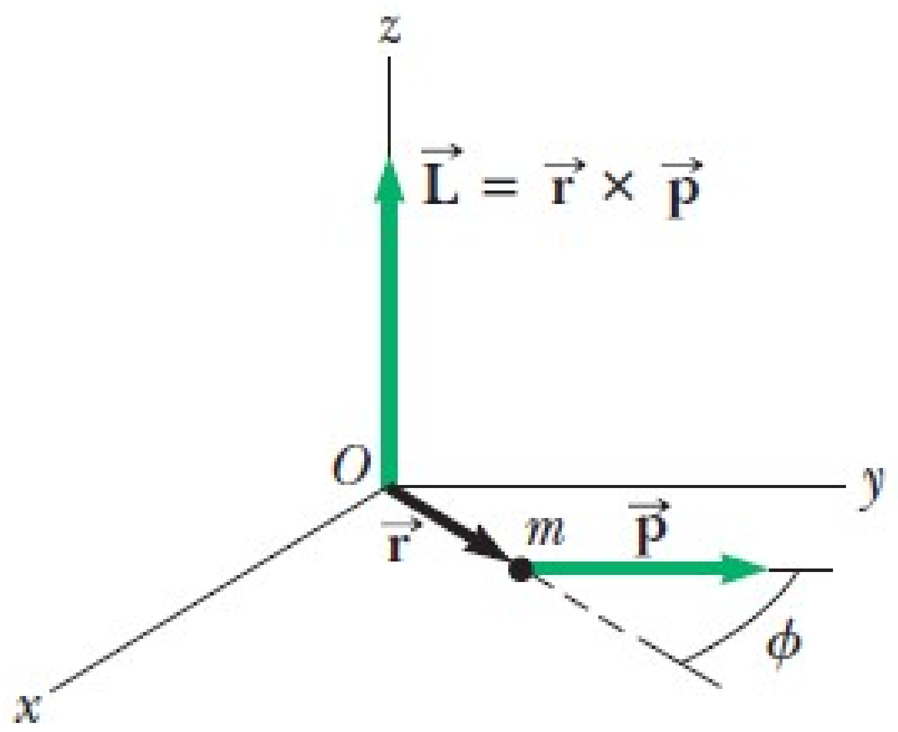
https://us02web.zoom.us/j/89613708683?pwd=V2hUai9LREtHZmtCdU1xdHQ5cjdHdz09

ID de reunión: 896 1370 8683 Código de acceso: 402653

2- Evaluación corta N° 5 – Se realiza desde el jueves 1/07 hasta el sábado 3/07 hasta las 23:55.

3- Evaluaciones cortas 1 a 4: Se habilitó hasta el sábado 17 inclusive, el segundo intento para mejorar las calificaicones.

MOMENTO ANGULAR



Momento* angular** de una partícula de masa constante *m, velocidad* ***v *momento lineal* ***p*** = *m****v*** *y vector de posición* ***r*** *con respecto* al origen *O de un* ***marco inercia****l:*

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} = \bar{r} \times m\bar{v}$$

El valor del momento angular depende del origen *O elegido, ya que en él interviene el vector de posición* de la partícula respecto al origen.

Unidades de L: kg.m^2/s.

$$L = mvr\sin\phi$$

Análogo del ***momento lineal de una partícula*** *en el movimiento de rotación es el* ***momento angular***

MOMENTO ANGULAR

Vamos a demostrar que para una partícula la ***rapidez de cambio del momento angular es igual al torque de la fuerza neta.***

$$\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p} = \bar{r} \times m\bar{v}$$

Derivamos con respecto al tiempo usando la regla de la derivada de un producto:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v}\right) + \left(\bar{r} \times m\frac{d\bar{v}}{dt}\right) = (\bar{v} \times m\bar{v}) + (\bar{r} \times m\bar{a})$$

El primer término del 2do. miembro es nulo (producto vectorial de un vector por sí mismo)

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{\tau}$$

La rapidez de cambio del momento angular de una partícula (dL/dt) es igual al torque de la fuerza neta que actúa sobre ella.

MOMENTO ANGULAR PARA UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

El torque resultante de un sistema de partículas es la suma de los torques individuales que actúan sobre el sistema.

Generalizando el resultado de una partícula para un sistema de partículas:

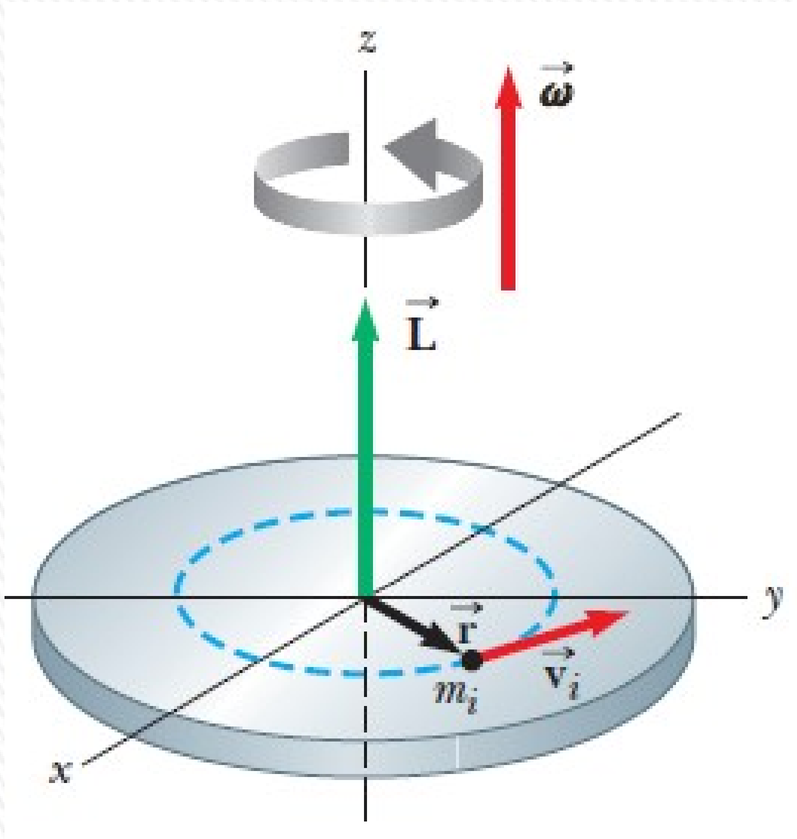
$$\sum_i \bar{\tau}_i = \sum_i \frac{d\bar{L}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \bar{L}_i = \frac{d\bar{L}_{sist}}{dt}$$

La sumatoria de los torques incluye la de las fuerzas internas y externas.

Por el **principio de acción y reacción**, las fuerzas internas son iguales y de sentido opuesto, y actúan sobre la misma línea, por lo que los brazos de palanca serán iguales, y por tanto estos **torque internos se cancelan entres sí.**

$$\boxed{\bar{\tau}^{ext.}_{neto} = \frac{d\bar{L}_{sist}}{dt}}$$

MOMENTO ANGULAR DE UN CUERPO RÍGIDO



Consideremos un objeto rígido giratorio en torno a un eje fijo que coincide con el eje *z de un* sistema coordenado.

Cada *partícula del objeto da vueltas en el plano xy en torno* al eje *z con una rapidez angular ω. La magnitud del momento angular* de una partícula de masa m_i *en torno al eje z es* $m_i v_i r_i$. *Como* $v_i = r_i\omega$, *la* magnitud del *momento angular* de esta partícula se expresa como: $L_i = m_i r_i^2 \omega$

El vector $\boldsymbol{L}_i$ se dirige a lo largo del eje z, como el vector $\boldsymbol{\omega}$.

Podemos encontrar el módulo del momento angular (que en esta situación sólo tiene una componente z) de todo el objeto tomando la suma de L_i sobre todas las partículas:

$$L_z = \sum_i L_i = \sum_i m_i r_i^2 \omega = \left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega$$

$$L_z = I\omega$$

donde *I* es el momento de inercia *del objeto en torno al eje z*

En general, la expresión **L= *I*ω** no siempre es válida. Si un objeto rígido da vueltas en torno a un eje *arbitrario,* ***L*** y **ω** pueden apuntar en diferentes direcciones. En este caso, el momento de inercia no se trata como un escalar. En un sentido estricto, **L= *I*ω** sólo se aplica a objetos rígidos de cualquier forma que dan vueltas en torno a uno de tres ejes mutuamente perpendiculares (llamados *ejes principales)* a través del centro de masa.

MOMENTO ANGULAR DE UN CUERPO RÍGIDO

$L_z = I\omega$ derivando esta expresión respecto al tiempo, y teniendo en cuenta que para un rígido el momento de inercia *I* es constante:

$$\frac{dL_z}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

donde α es la aceleración angular relativa al eje de rotación. Como dL_z/dt *es igual al* momento de torsión externo neto, esta ecuación resulta

$$\sum \tau_{ext} = I\alpha$$

El torque externo neto que actúa sobre un objeto rígido giratorio en torno a un eje fijo es igual al momento de inercia en torno al eje de rotación multiplicado por la aceleración angular del objeto en relación con dicho eje.

Este resultado ya lo habíamos obtenido anteriormente, y representa el equivalente rotacional de la 2da. Ley de Newton.
Esta ecuación también es válida para un objeto rígido giratorio en torno a un eje móvil siempre que el eje en movimiento 1) pase a través del centro de masa y 2) sea un eje de simetría.
Si un objeto simétrico da vueltas en torno a un eje fijo que pasa a través de su centro de masa, se puede escribir la ecuación vectorial $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$, siendo **L** el momento angular total del objeto medida respecto al eje de rotación.
La expresión es válida para cualquier objeto, sin importar su simetría, si **L** representa la componente de cantidad de movimiento angular a lo largo del eje de rotación.

CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

Vimos antes que el momento lineal total de un sistema de partículas permanece constante si el sistema está aislado; es decir, si la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema es cero. Se tiene una ley de conservación análoga en el movimiento rotacional.

La cantidad de movimiento angular total de un sistema es constante tanto en magnitud como en dirección si el torque neto que actúa sobre el sistema es cero, es decir, si el sistema está aislado (Principio de conservación del momento angular).

Este principio es consecuencia directa de lo siguiente: $\sum \bar{\tau}_{ext} = \frac{d\bar{L}_{sistema}}{dt} = 0$

Por lo tanto: $\bar{L}_{sistema} = constante$

$$\bar{L}_{inicial} = \bar{L}_{final}$$

Si un sistema giratorio aislado es deformable, de modo que su masa se somete a redistribución en alguna forma, el momento de inercia del sistema cambia. Como la magnitud del momento angular del sistema es $L = I\omega$, *la conservación* de la cantidad de movimiento angular requiere que el producto de I y ω *permanezca* constante.

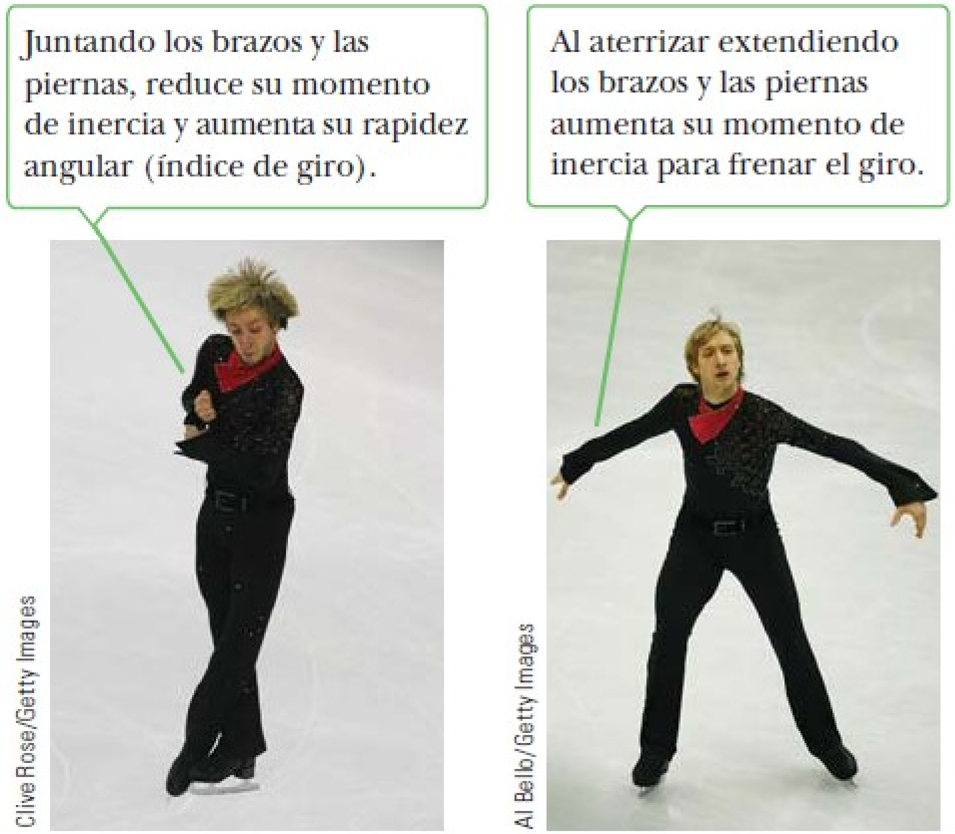
CONSERVACIÓN DEL MOMENTO ANGULAR

Por lo tanto, un cambio en *I para un sistema aislado requiere un cambio en ω.*

En este caso, el principio de conservación de cantidad de movimiento angular se expresa como: $I_i\omega_i = I_f\omega_f = constante$

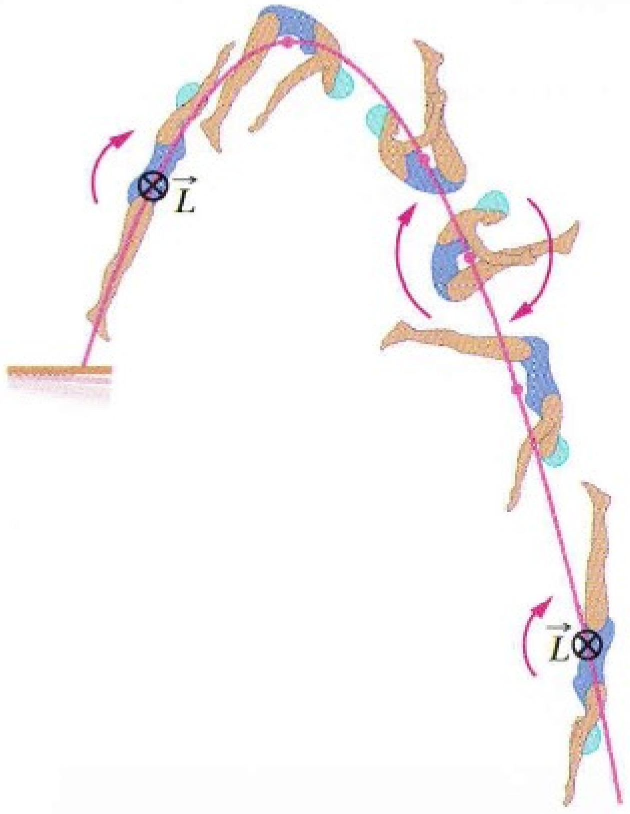
La conservación del momento angular se aplica a objetos macroscópicos, como planetas y personas, así como a átomos y moléculas. Hay muchos ejemplos de conservación del momento angular; uno de los más espectaculares son los giros que ejecuta un patinador artístico al final de su acto.

En la figura a), el patinador pone los brazos y las piernas cerca de su cuerpo, reduciendo la distancia al eje de rotación y, por lo tanto, también reduciendo su momento de inercia. En la conservación del momento angular, una reducción de su momento de inercia debe aumentar su velocidad angular. Saliendo de la vuelta en la figura b), necesita reducir su velocidad angular, así que extiende sus brazos y las piernas otra vez, aumentando su momento de inercia, y de ese modo retardar su rotación.



MOMENTO ANGULAR DE UN CUERPO RÍGIDO

De modo semejante, cuando una clavadista desea hacer varios saltos mortales, jala sus manos y pies hacia el tronco de su cuerpo para rotar a una mayor rapidez angular.
En este caso, la fuerza externa debido a la gravedad actúa a través de su centro de gravedad y, por lo tanto, no ejerce ningún torque sobre su eje de rotación, así que el momento angular sobre su centro de gravedad se conserva.
Por ejemplo, cuando una clavadista desea doblar su rapidez angular, debe reducir su momento de inercia a la mitad de su valor inicial.



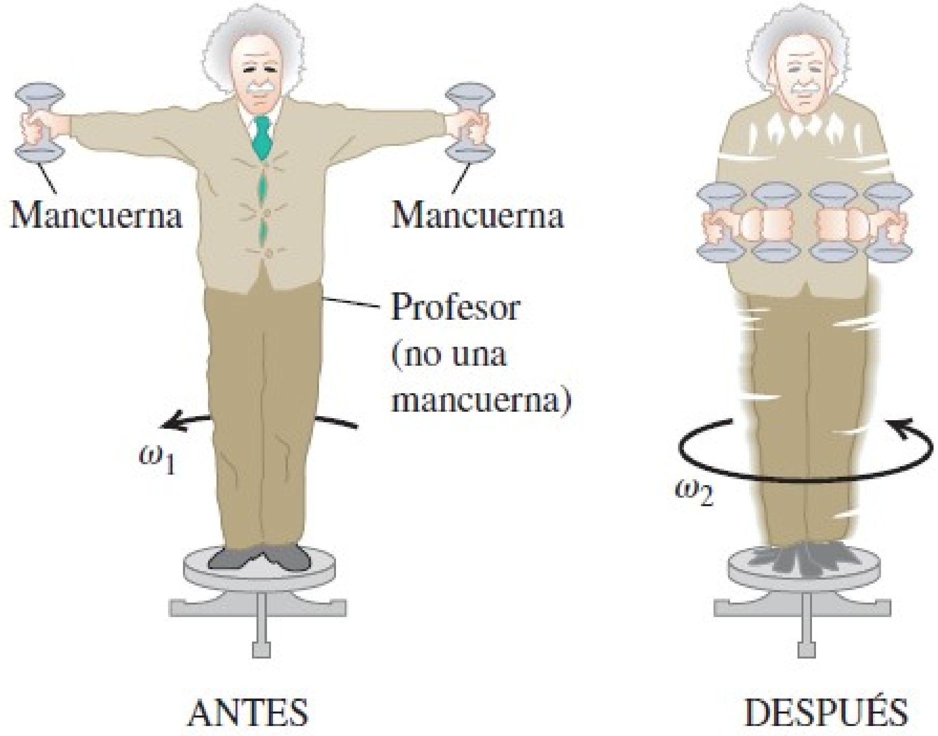
EJEMPLO: CUALQUIERA PUEDE BAILAR BALLET

Un ágil profesor de física se pone de pie en el centro de una mesita giratoria y sin fricción con los brazos extendidos horizontalmente y una mancuerna de 5,0 kg en cada mano. Se le pone a girar sobre un eje vertical, dando una revolución cada 2,0 s.

Calcule la velocidad angular final del profesor si él pega las mancuernas a su abdomen.

Su momento de inercia (sin las mancuernas) es de 3,0 kgm^2 con los brazos extendidos, y baja a 2,2 kg m^2 si coloca las manos en el abdomen.

Las mancuernas están a 1,0 m del eje al principio y a 0,20 m al final.



Con estas hipótesis se conserva el momento angular y podemos escribirlo como: $L = I\omega$

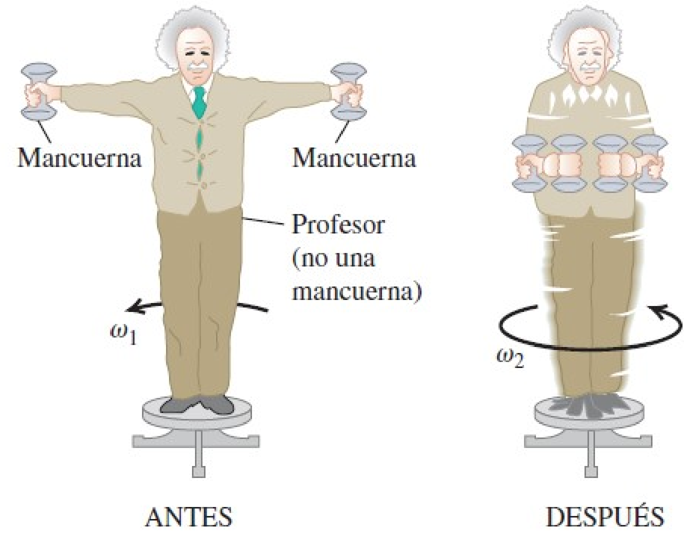
Modelamos al sistema profesor + mancuernas + mesa como uno sobre el que no se le aplican toques externos.

Además supondremos que el eje de rotación es eje de simetría.

Datos: ω_1= 0,50 rev/s; I_{P1}= 3,0 kgm^2 ; I_{P2}= 2,2 kgm^2 m= 5,0 kg; r_1=1,0 m; r_2=0,20 m

EJEMPLO: CUALQUIERA PUEDE BAILAR BALLET

Un ágil profesor de física se pone de pie en el centro de una mesita giratoria y sin fricción con los brazos extendidos horizontalmente y una mancuerna de 5,0 kg en cada mano. Se le pone a girar sobre un eje vertical, dando una revolución cada 2,0 s.
Calcule la velocidad angular final del profesor si él pega las mancuernas a su abdomen.
Su momento de inercia (sin las mancuernas) es de 3,0 kgm^2 con los brazos extendidos, y baja a 2,2 kg m^2 si coloca las manos en el abdomen.
Las mancuernas están a 1,0 m del eje al principio y a 0,20 m al final.



Voy a considerar que las mancuernas se comportan como masas puntuales.

Datos: ω_1= 0,50 rev/s; I_{P1}= 3,0 kgm^2 ; I_{P2}= 2,2 kgm^2 m= 5,0 kg; r_1=1,0 m; r_2=0,20 m

Como se conserva el momento angular del sistema: $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$

$$I_1 = I_{P1} + 2mr_1^2 = 3{,}0 + 2(5{,}0)(1{,}0)^2 = 13\,kg.m^2$$

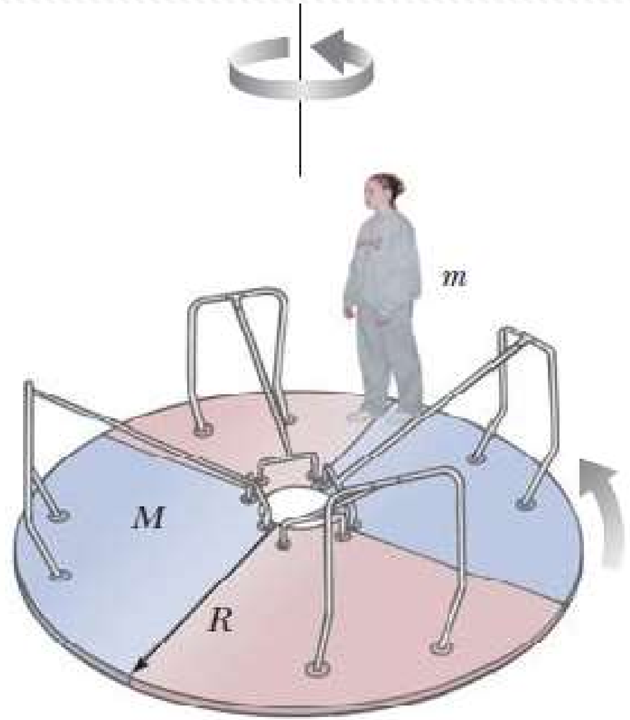
$$I_2 = I_{P2} + 2mr_2^2 = 2{,}2 + 2(5{,}0)(0{,}20)^2 = 2{,}6\,kg.m^2$$

$$\omega_2 = \frac{I_1}{I_2}\omega_1 = \frac{13}{2{,}6}\omega_1 = 5\omega_1$$

ω_2 =5 ω_1 = 2,5 rev/s

Pero ¿qué pasó con la energía cinética de rotación?

EJERCICIO 6.13



El carrusel - Una plataforma horizontal con la forma de un disco da vueltas libremente en un plano horizontal en torno a un eje vertical sin fricción. La plataforma tiene una masa M =100 kg y un radio R = 2,00 m. Una estudiante, cuya masa es m = 60,0 kg, camina lentamente desde el borde del disco hacia su centro. Si la rapidez angular del sistema es 2,00 rad/s cuando el estudiante está en el borde:

a) ¿cuál es la rapidez angular cuando alcanza un punto r = 0,500 m desde el centro?

b) ¿la energía cinética varía? Explique.

Como no hay ningún torque externo que actúe sobre el sistema plataforma + estudiante, el momento angular se va a conservar y por tanto: Iω = cte.

Voy a tratar a la estudiante como una partícula, por lo que el momento de inercia del sistema será:

$$I_O = \frac{1}{2}MR^2 + mr^2$$

Siendo r, la posición de la estudiante. Entonces se cumplirá que:

$$\left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_0 = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mr^2\right)\omega_F$$

EJERCICIO: 6.13

$$\omega_F = \frac{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2}\omega_0 = \frac{\frac{1}{2}(100)(2{,}00)^2 + (60{,}0)(2{,}00)^2}{\frac{1}{2}(100)(2{,}00)^2 + (60{,}0)(0{,}500)^2}(2{,}00) = \frac{440\ kg.m^2}{215\ kg.m^2}(2{,}00) = \mathbf{4{,}1\ rad/s}$$

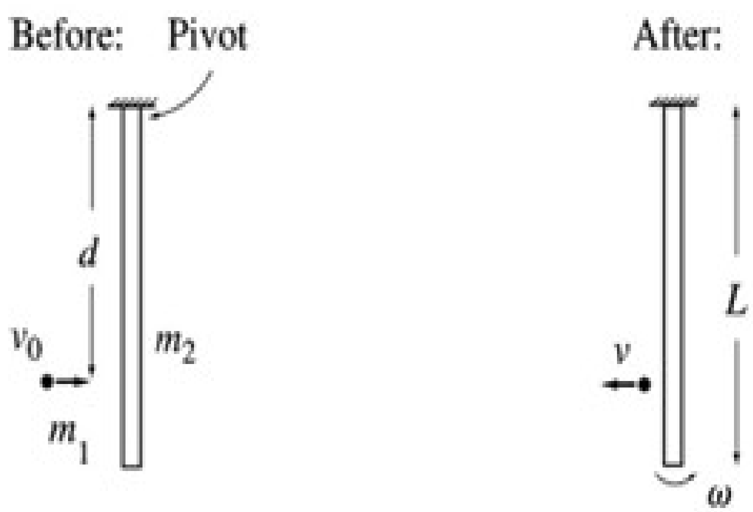
b) Vamos a calcular la energía cinética (de rotación) inicial y final:

$$K_I = \frac{1}{2}I_{OI}\omega_I^2 = \frac{1}{2}(440)(2{,}00)^2 = \mathbf{880\ J}$$

$$K_F = \frac{1}{2}I_{OF}\omega_F^2 = \frac{1}{2}(215)(4{,}10)^2 = \mathbf{1{,}81 \times 10^3\ J}$$

La energía aumenta.
Esto se debe a que la estudiante debe realizar trabajo para moverse ella misma hacia el centro de rotación, por tanto ese aumento de energía proviene de la energía interna del cuerpo de la estudiante.

EJERCICIO: 6.16



Una barra metálica delgada y uniforme, de 2,00 m de longitud y con un peso de 90,0 N, cuelga verticalmente del techo en un pivote sin fricción colocado en el extremo superior. De repente, una pelota de 3,00 kg, que viaja inicialmente a 10,0 m/s en dirección horizontal, golpea la barra 1,50 m abajo del techo. La pelota rebota en dirección opuesta con rapidez de 6,00 m/s.

a) Calcule la rapidez angular de la barra inmediatamente después del choque.

b) Durante el choque, ¿por qué se conserva el momento angular, pero no el momento lineal?

b) En esta situación se conserva el momento angular, ya que no hay ningún torque externo respecto al pivote realizado sobre el sistema barra-pelota. En cambio el momento lineal, no se va a conservar, ya que el pivote ejerce una fuerza externa sobre la barra, que le impide que se desplace, solamente puede girar.

El momento de inercia de una barra respecto a uno de sus extremos vale: $I_P = \frac{1}{3} M L^2$

Conservación del momento angular:

$$m v_0 d = -m v d + \frac{1}{3} M L^2 \omega \quad \omega = \frac{3m(v_0 + v)d}{M L^2} = \frac{3(3{,}00)(10{,}0+6{,}00)(1{,}50)}{\frac{90{,}0}{9{,}8}(2{,}00)^2} = \textbf{5,88 rad/s}$$