Mecánica Clásica (2022)

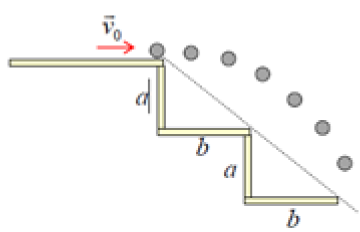
Práctico 1

Cinemática de la Partícula y Movimiento Relativo

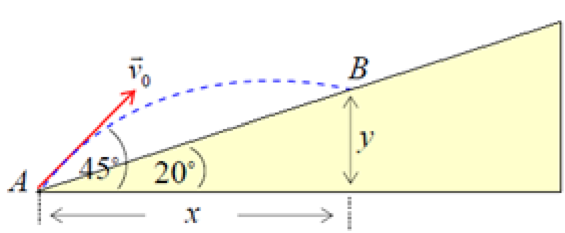
1.
   a) Calcule la aceleración centrípeta que experimenta un punto de la superficie de la Tierra en Montevideo (34,9 ° latitud sur).

   b) Sabiendo que luz que nos llega desde el Sol demora 8 minutos, calcule la aceleración centrípeta de la Tierra en su órbita alrededor del Sol.

2. Una bolita sale rodando horizontalmente con velocidad $v_0 = 3\,m/s$ por el hueco de una escalera (ver figura). Los escalones tienen alto $a = 18\,cm$ y ancho $b = 32\,cm$. Encuentre el escalón en el cual la bolita cae por primera vez. *Desprecie la resistencia del aire.*



3. Se lanza una pelota desde el punto A con una rapidez inicial de $25\,m/s$, con un ángulo de $\theta = 45\,°$ con respecto a la horizontal, tal como se muestra en la figura. Encuentre la distancia horizontal x recorrida por la pelota hasta llegar a chocar con el plano inclinado en B. *Desprecie la resistencia del aire.*



4. Un jugador de basketball recibe una falta y le conceden dos tiros libres. El centro del aro está a una distancia horizontal de 4,21 m, y a una altura de 3,05 m.

   a) En el primer intento, el jugador lanza la pelota a $4,88\,m/s$ con un ángulo de $35\,°$ desde una altura de 1,83 m y falla por mucho ¿a qué distancia cae la pelota sobre el piso?

   b) El segundo tiro lo consigue encestar manteniendo el ángulo de lanzamiento pero variando la rapidez inicial v_0. Calcule v_0.

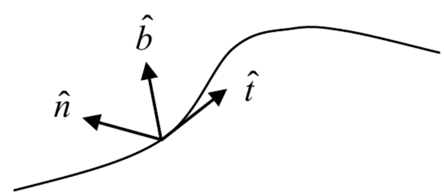
5. Para la cicloide:

$$\begin{cases} x(t) = a\big(\omega t + sen(\omega t)\big) \\ y(t) = a\big(1 - cos(\omega t)\big) \end{cases} \qquad -\pi < \omega t \leq \pi$$

   a) Halle la longitud del arco $s(t)$ y muestre que si θ es el ángulo que forma la recta tangente a la cicloide con Ox, entonces $\text{sen}(\theta) = \kappa s$, con κ una constante.

   b) Determine los versores tangente, normal y binormal.

6. Obtenga las fórmulas de Frenet (derivadas de los versores del triedro de Frenet respecto al parámetro de arco):



   a) Muestre que $\frac{d\hat{t}}{ds} = \kappa\hat{n}$. Dónde κ es la curvatura, que se relaciona con el radio de curvatura ρ según $\kappa = \rho^{-1}$.

   b) Escribiendo $\frac{d\hat{n}}{ds} = \alpha\hat{t} + \beta\hat{n} + \gamma\hat{b}$, muestre que:

$$\frac{d\hat{n}}{ds} = -\kappa\hat{t} + \tau\hat{b},$$

   dónde τ es una constante de proporcionalidad que se interpretará en c). *Sugerencia: desarrolle las derivadas respecto de los productos* $\frac{d(\hat{n}\cdot\hat{n})}{ds} = 0$ *y* $\frac{d(\hat{t}\cdot\hat{n})}{ds} = 0$.

   c) A partir de $\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n}$ muestre que:

$$\frac{d\hat{b}}{ds} = -\tau\hat{n}.$$

   De aquí se deduce que $|\tau| = \left|\frac{d\hat{b}}{ds}\right|$. A la función $\tau(s)$ se la llama torsión y $\sigma = \tau^{-1}$ se denomina radio de torsión (*note que tiene dimensiones de longitud*).

7. Una partícula P está sometida a una aceleración de la forma $\vec{a} = -\omega^2 R\hat{e}_\rho$ expresada en coordenadas cilíndricas, siendo ω y R constantes. En el instante inicial la partícula se encuentra a una distancia R del eje Oz y tiene una velocidad de la forma:

$$\vec{v}(0) = \omega R\hat{e}_\theta + v_0\hat{k}$$

   a) Halle las leyes horarias del movimiento en coordenadas cilíndricas. *Sugerencia: Observar que la aceleración es de un tipo de movimiento conocido pero que las condiciones iniciales son diferentes, por lo que se recomienda buscar soluciones de distancia al eje Oz constante.*

   b) Escriba esas ecuaciones en coordenadas cartesianas y decir de qué tipo de trayectoria se trata.

   c) Escribirlas ahora en coordenadas intrínsecas, escribiendo también los versores del triedro de Frenet en función de los de la base de coordenadas cilíndricas.

   d) Darle interpretación física a las cantidades $c = \sqrt{\omega^2 R^2 + v_0^2}$ y el ángulo α definido por $cos(\alpha) = \omega R/c$ y $sen(\alpha) = v_0/c$. Estudiar el movimiento discutiendo según sea $\omega R \gg v_0$ o $\omega R \ll v_0$.

8. El vector de Darboux se define como: $\vec{D} = \tau\hat{t} + \kappa\hat{b}$.

   a) Muestre que las fórmulas de Frenet se pueden escribir:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{t}}{ds} = \vec{D} \times \hat{t} \\ \dfrac{d\hat{n}}{ds} = \vec{D} \times \hat{n} \\ \dfrac{d\hat{b}}{ds} = \vec{D} \times \hat{b} \end{cases}$$

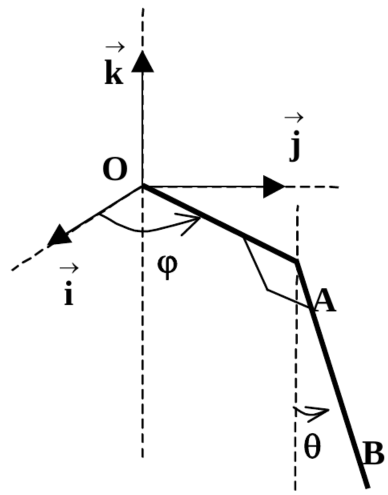
   b) Cómo se relaciona $\vec{D}$ con el vector velocidad angular del triedro? Describa la rotación instantánea del triedro de Frenet e interpretando las componentes de $\vec{D}$.

9. Un niño se encuentra, en $t = 0$, en el centro de una calesita que gira con velocidad ω constante. En ese instante, el niño comienza a moverse a lo largo de un radio dibujado en el piso de la calesita con una velocidad constante v_0 relativa a la misma.

   a) Hallar la velocidad y aceleración absolutas del niño trabajando en el sistema móvil, es decir, expresarlas en los versores del sistema móvil.

   b) Repita la parte anterior pero respecto a los versores del sistema absoluto.

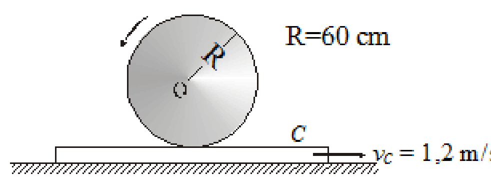
10. En el sistema de la figura, la barra OA está contenida en el plano Oxy y gira alrededor de Oz. La barra AB está contenida en un plano perpendicular a OA y gira alrededor de ésta última.



  a) Determinar la velocidad angular de la barra AB en función de φ (ángulo entre la barra OA y el eje Ox) y θ (ángulo entre la barra AB y una paralela al eje Oz por el punto A).

  b) Expresar dicha velocidad angular en una base solidaria a AB.

11. Una rueda, de radio $R = 60\,cm$, está rodando sin deslizar sobre una placa horizontal (ver figura). Ésta, a su vez, tiene una velocidad de $1,2\,m/s$ hacia la derecha, y la rueda una velocidad angular de $0,5\,rad/s$ en el sentido contrario al de las agujas del reloj. Llamémosle v_0 a la velocidad del centro O de la rueda.



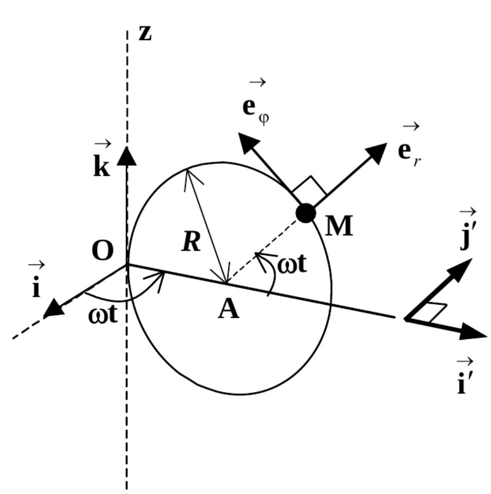
  a) Escribir la velocidad de punto de contacto P entre la rueda y la placa expresada como:

    i. Un punto fijo a la placa.

    ii. Un punto solidario a la rueda. Dejarlo expresado en función de v_0.

  b) Determinar la velocidad v_0 del centro O de la rueda, para que se cumpla la condición de rodadura sin deslizamiento.

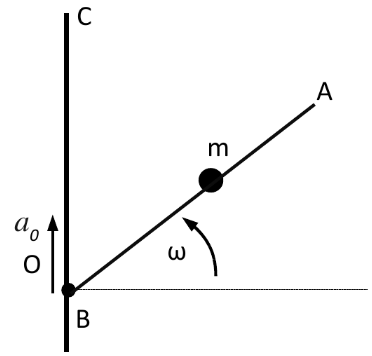
12. La circunferencia de radio R es tangente a Oz en O, y está contenida en un plano que pasa por dicho eje. La misma gira con una velocidad angular ω constante alrededor de Oz. Sobre la circunferencia se mueve un punto M, que tiene movimiento relativo a ella uniforme, de velocidad angular ω idéntica a la anterior. Utilizando los sistemas fijo y móvil indicados en la figura, hallar:



  a) Velocidad relativa, de arrastre y absoluta de M.

  b) Aceleración relativa, de arrastre absoluta de M.

13. Una partícula m se mueve sin rozamiento sobre la guía rectilínea OA, sin escapar de ella. El extremo O de la guía recorre una recta BC con aceleración constante a_0. Todo el sistema se encuentra en un plano horizontal. Además la guía gira en torno a un eje vertical que pasa por O, con velocidad angular ω constante. Inicialmente O está quieto, la partícula está en O con velocidad v_0 relativa a la guía, y ésta es perpendicular a la recta BC.



a) Escriba la velocidad y aceleración absolutas de m expresada en versores fijos respecto a BC (absolutos).

b) Escriba la velocidad y aceleración absolutas de m expresada en versores solidarios a la guía OA.