Mecánica Clásica (2022)

Práctico 4

Fuerzas Centrales

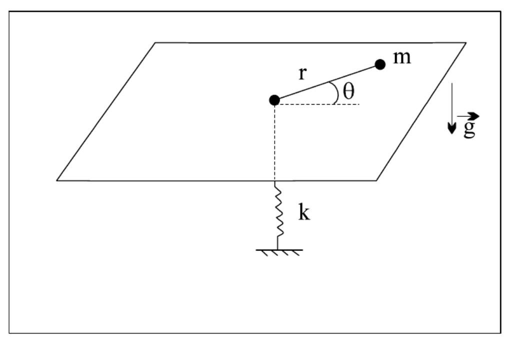
1. Una partícula P de masa m se mueve sin rozamiento sobre una mesa horizontal, unida a un hilo flexible, inextensible y sin masa que pasa por un orificio situado en la mesa. Inicialmente la partícula está describiendo un movimiento circular uniforme de radio a con velocidad v_a. Una persona tira *lentamente* del hilo (se puede considerar que en todo instante la velocidad radial es nula) hasta que la partícula describe una circunferencia de radio b.

   a) Calcule la velocidad v_b de la partícula cuando ésta describe la circunferencia de radio b, y comparela con v_a.

   b) Calcule las tennsiones en el hilo, en los movimientos inicial y final.

   c) Calcule el trabajo realizado por la persona.

2. La partícula de masa m de la figura se mueve sobre una mesa lisa horizontal. La cuerda (flexible, inextensible y sin masa) unida a la partícula, pasa a través de un orificio en la mesa y está atada a un resorte de constante k. La longitud natural del resorte es tal que la fuerza del mismo es nula cuando r (distancia del orificio a la partícula) es igual a cero. En el instante inicial $r = R$, la velocidad radial de la partícula es nula y su velocidad angular ω.



   a) Escriba las ecuaciones del movimiento de la partícula y hallar $L = \vec{r} \times \vec{p}$ en función de los datos iniciales del problema.

   b) Determinar la expresión de $\dot{r}^2$, en función de r^2 y los otros datos del problema.

   c) ¿Para qué valor de ω la trayectoria es circular? Sea ω_0 ese valor.

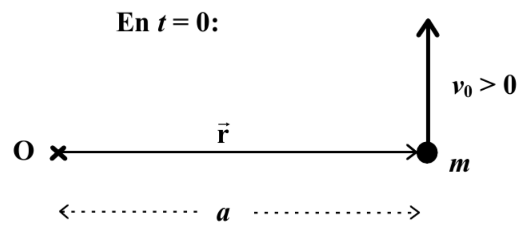
   d) Si $0 < \omega < \omega_0$ ¿llegará la partícula al orificio por donde pasa el hilo? Justifique su respuesta. En el caso en que su respuesta sea negativa ¿cuál es el valor mínimo de r de la trayectoria?

   e) Si $\omega > \omega_0$, calcule el valor de r máximo de esta nueva trayectoria.

3. Una partícula de masa m se mueve en un campo gravitatorio y existe además una fuerza proporcional a r^{-3}, ambos campos son centrales con centro O. La fuerza central resultante es:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{k_1}{r^2}\hat{e}_r - \frac{k_2}{r^3}\hat{e}_r$$

con $k_1 > 0$ y $k_2 > 0$. La partícula parte con velocidad v_0 perpendicular al eje Ox del dibujo y a una ditancia R del origen O.



a) Si $v_0^2 > \frac{k_2}{mR^2}$, bosqueje el potencial efectivo visto por la partícula. Halle la condición para que el movimiento sea acotado.

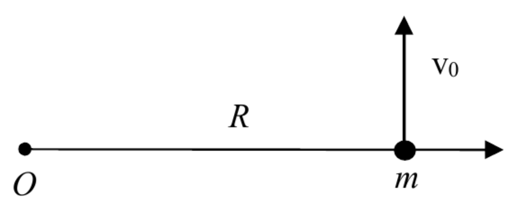
b) Suponga que v_0 cumple la condición para que el movimiento sea acotado hallada en la parte a) y determine la ecuación polar de la trayectoria de la partícula: $r = r(\theta)$.

c) Halle la separación angular entre dos máximos consecutivos de r y determine la condición que deben verificar los parámetros para que la órbita sea cerrada.

4. Sobre una partícula de masa m actúa una fuerza central atractiva inversamente proporcional al cubo de la distancia al origen O, o sea, una fuerza de componente radial $-k/r^3$. Vectorialmente esto se escribe como:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{k}{r^3}\hat{e}_r,$$

con $k > 0$. En el instante inicial la partícula se encuentra a una distancia a del origen y su velocidad inicial, de magnitud v_0, es perpendicular a $\vec{r}$.



a) Halle la energía potencial, si es que existe, asociada a dicha fuerza.

b) Escriba el Teorema de la Energía para este problema y grafique el potencial efectivo del movimiento radial de la partícula, para diferentes valores de v_0. A partir de dicha figura discuta en qué regiones del plano es posible el movimiento de la partícula según sea v_0.

c) A partir de las ecuaciones de movimiento verifique que existe una velocidad inicial para la que el movimiento de la partícula sea circular uniforme. ¿Cuál es esa velocidad?

d) Para una velocidad menor que la hallada en la parte anterior, determine cuál es la trayectoria que seguirá la partícula y verifique que la misma colapsa hacia el origen.

5. Una partícula de masa m se mueve bajo la influencia de una fuerza central, cuyo potencial es de la forma: $U(r) = -K/r^{\alpha}$.

   a) Halle la frecuencia de una órbita circular con momento angular L dado.

   b) Suponga que se perturba ligeramente la órbita circular por una cantidad radial z, de modo que: $r = r_0 + z$. Demuestre que el movimiento de z es periódico y halle su frecuencia. Para esto desarrolle $U'_{ef}(r)$ en la ecuación de Newton radial: $m\ddot{r} = -U'_{ef}(r)$ a primer orden en z en torno a r_0 y halle la ecuación diferencial que cumple $z(t)$.

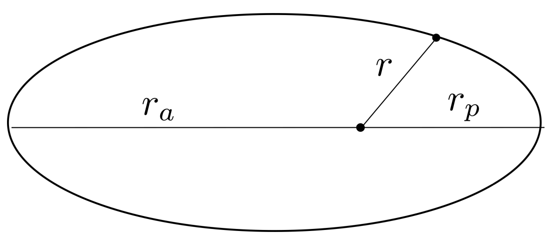
   c) Halle la condición que debe cumplir α para que la órbita perturbada sea cerrada, esto es, que la frecuencia de oscilación radial sea un múltiplo de la frecuencia de la órbita circular.

6. Un planeta esférico e inmóvil tiene masa M y radio R. Una partícula de masa m se dispara desde su superficie con velocidad $v = \frac{3}{4}v_{esc}$, siendo v_{esc} la velocidad de escape. Calcule la máxima distancia alcanzada por la partícula (medida desde el centro de fuerza) si se dispara:

   a) Radialmente

   b) Tangencialmente a la superficie del planeta. En este caso bosquejar el potencial efectivo visto por la partícula.

7. Considere un satélite de masa m que se lanza desde la superficie de la Tierra verticalmente hacia arriba a gran altura y despreciando el rozamiento del aire.

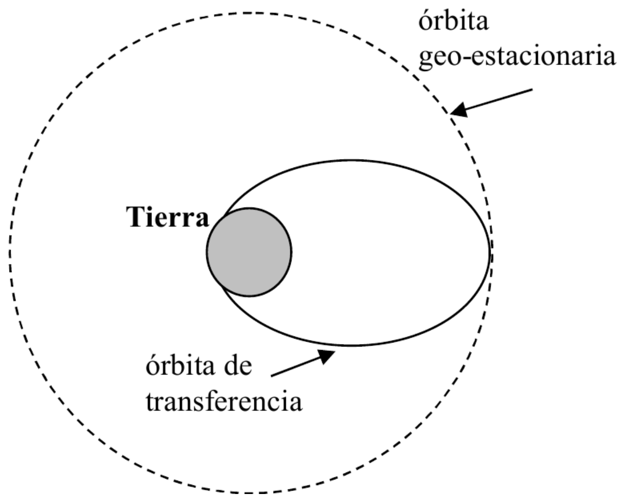


   a) Si la velocidad inicial del satélite es v_0, exprese su velocidad v en función de su distancia r al centro de la Tierra.

   b) Calcule la velocidad v_0 mínima necesaria, en km/s, para el satélite de la parte a) pueda alcanzar una altura de $300km$ sobre la superficie terrestre (compárela con la velocidad de escape de la tierra).

   c) Considere ahora que el satélite se encuentra en órbita elíptica alrededor de la Tierra como se muestra en la figura. Si parte del apogeo (el punto más lejano a la Tierra) a una distancia máxima r_a, obtenga su velocidad en función de G, M_T (masa de la Tierra), r, r_a y r_p, siendo r_p la distancia en el perigeo (punto más cercano a la Tierra).

8. Julio Verne concibió un viaje a la Luna utilizando un cañón para lanzar una cápsula tripulada hacia nuestro satélite natural. Siendo menos ambiciosos que el mencionado novelista, consideraremos un viaje de ida a una órbita geo-estacionaria (Es decir una órbita para la cual la velocidad relativa entre el satélite y la Tierra es nula) utilizando su cañón. Ubicaremos dicho cañón sobre el ecuador y se lo apuntará según la vertical del lugar. Se tomará en cuenta la rotación de la Tierra (a una velocidad angular ω_T) pero se despreciarán los efectos disipativos de la atmósfera terrestre. Nuestra cápsula tendrá una masa m_C.



   a) Calcule el radio de la órbita geo-estacionaria R_G en función de g (aceleración de la gravedad en la superficie terrestre), R_T (radio de la Tierra) y ω_T.

   Se desea alcanzar la órbita geo-estacionaria a través de una órbita de transferencia elíptica tangente a la órbita geo-estacionaria como la que se muestra en la figura.

   b) Calcule el valor de la constante l (módulo del momento angular) para la órbita de transferencia.

   c) Calcule la energía de la órbita de transferencia considerada (exprese el resultado en función de los parámetros anteriormente citados).

   d) Calcule la velocidad v_c que deberá tener la cápsula a la salida del cañón (en relación a éste) para ubicarse en la órbita de transferencia.

   e) Calcule el semieje mayor de la órbita de transferencia y el tiempo necesario para el viaje suponiendo que éste corresponde (aproximadamente) al semiperíodo de la órbita de transferencia.

9. Utilice las ecuaciones de Binet para una partícula de masa reducida μ y energía E en un campo gravitatorio: $U(r) = -K/r$. La solución de la ecuación homogénea es una sinusoide $u_H(\theta) = Acos(\theta - \theta_0)$

   a) Obtenga a la amplitud A en función de μ, K, E y el momento angular l.

   b) Escriba la ecuación de la órbita en coordenadas polares.

   c) Escriba la ecuación de la órbita en coordenadas cartesianas.

   d) En el caso de una órbita elíptica, exprese los semiejes mayor a y menor b en términos del parámetro de la cónica p y su excentricidad ϵ.

10. Sea una masa μ sometida a una fuerza central $\vec{F}(\vec{r}) = -\frac{K}{r^3}\vec{r}$. Tome la segunda ley de Newton expresada como $\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{K}{r^3}\vec{r}$ y multiplique el lado derecho y el lado izquierdo vectorialmente por $\vec{L} = \vec{r} \times \mu\dot{\vec{r}}$.

   a) Muestre que el lado izquierdo de esa ecuación vectorial se puede escribir como una derivada total respecto al tiempo de un producto que involucra al momento angular $\vec{L}$.

   b) Muestre que el lado derecho de esa ecuación vectorial se puede escribir como una derivada total respecto al tiempo de un término proporcional a $\vec{r}$. Ayuda: utilice primero la regla para desarrollar el doble producto vectorial. Verifique que las dimensiones son correctas.

   c) ¿Qué puede decir del vector $\vec{C} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - K\dfrac{\vec{r}}{r}$? Suponga que la energía mecánica es $E < 0$. ¿Qué dirección tiene ese vector $\vec{C}$ en el punto de intersección de la trayectoria elíptica con el eje mayor?

   d) Calcule el modulo al cuadrado del vector $\vec{C}$ y expréselo en términos de E, l (modulo del momento angular), K y μ.