

# Mecánica Clásica (2022)

## Práctico 5

Antecedentes relativistas, Transformaciones de Lorentz y Medidas Relativistas de Espacio y Tiempo

1. Una estrella de un sistema binario se desplaza en una trayectoria circular a velocidad uniforme  $v$ . Considere dos posiciones: en  $(I)$  la estrella se aleja de la Tierra a lo largo de la recta que los une y en  $(II)$  la estrella se acerca a la Tierra a lo largo de la recta que los une (ver figura). El período orbital de la estrella es  $T$  y su distancia a la Tierra es  $l$ . Supongamos que  $l$  es lo suficientemente grande de modo que las posiciones  $(I)$  y  $(II)$  se encuentran a una separación igual a la mitad de la órbita. Suponiendo que las teorías de emisión son correctas:

- a) Demuestre que parece que la estrella va de la posición  $(I)$  a la  $(II)$  en un tiempo:

$$\tau_1 = \frac{T}{2} - \frac{2lv}{c^2 - v^2},$$

y de la posición  $(II)$  a la  $(I)$  en un tiempo:

$$\tau_2 = \frac{T}{2} + \frac{2lv}{c^2 - v^2},$$

- b) Demuestre que la estrella parecería estar en ambas posiciones al mismo tiempo si

$$\frac{T}{2} = \frac{2lv}{c^2 - v^2},$$

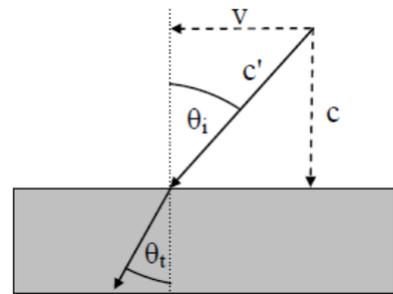


2. En 1810 François Arago halló experimentalmente que el ángulo de aberración de una estrella, medido con un telescopio, no variaba al colocar un material refringente en el tubo del telescopio, como podría esperarse debido a la refracción. Para explicar este resultado negativo, Fresnel introdujo la hipótesis de arrastre parcial del éter: Supuso que en un medio cuyo índice de refracción es  $n$ , la densidad del éter es proporcional a  $n^2$  y que cuando un cuerpo se mueve a través del éter con velocidad  $v$ , el exceso de éter que contiene (respecto al que existe en el espacio libre) es arrastrado junto con el cuerpo; pero con una velocidad:

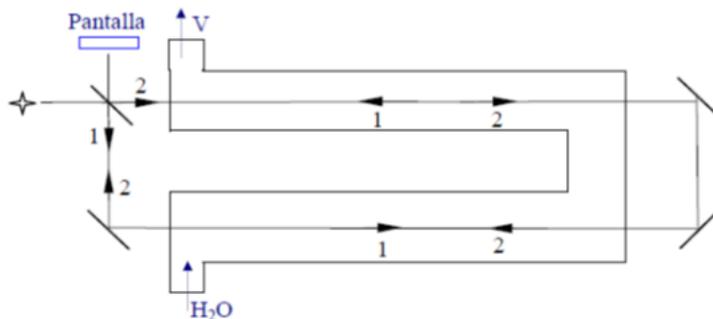
$$v_r = v \left( 1 - \frac{1}{n^2} \right)$$

donde la fracción  $1 - \frac{1}{n^2}$  se llama coeficiente de arrastre de Fresnel. Con esta modificación se puede ver que la ley de Snell se verifica siempre desde el punto de vista de un observador moviéndose con el material refringente. Esto explica que el ángulo de aberración no sea modificado por la presencia del material: al orientar el telescopio con el ángulo de aberración, se consigue que la incidencia del rayo de luz sea normal a la lente; de modo que el rayo no será refractado aunque haya un material refringente siempre que se cumpla la ley de Snell para el observador terrestre (que es el que se mueve con el material refringente).

Considere el caso simple de un rayo de luz que incide normalmente desde el vacío sobre la superficie plana de un medio de índice de refracción  $n$ . Si el medio se mueve respecto al éter con velocidad  $v$  paralela a la superficie plana, el rayo en el interior del medio adquiere una componente horizontal de velocidad de acuerdo con la hipótesis del arrastre parcial. Describa la situación desde el punto de vista de un observador en reposo respecto al medio refringente (ver figura) y utilizando la hipótesis de Fresnel, demuestre que para él vale la ley de Snell.



3. En 1851, Fizeau llevó a cabo un experimento para poner a prueba la hipótesis de Fresnel para la velocidad de la luz en medios móviles. En la figura se muestra esquemáticamente el arreglo experimental de Fizeau:



Dentro de los tubos se establece una corriente de agua con velocidad  $V$ . La fuente emite luz que es dividida, mediante un espejo semitransparente, en los rayos 1 y 2, de modo que el rayo 1 recorre los tubos (de longitud  $L$  cada uno) a favor de la corriente de agua y el rayo 2 en contra.

Si el índice de refracción del agua es  $n$  y  $c$  es la velocidad de la luz, utilizando la hipótesis de arrastre parcial de Fresnel, demuestre que la diferencia de tiempos de recorrido es, para  $V \ll c$ :

$$\delta t = 4n^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{VL}{c^2}$$

y que la diferencia de fase es:

$$\delta = 2\pi \left[ 4n^2 \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \frac{VL}{\lambda c} \right]$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda en el vacío.

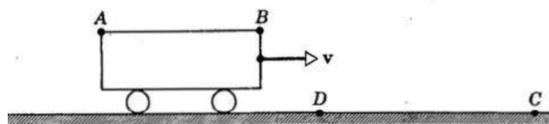
4. TRANSFORMACIONES DE GALILEO Un pasajero de un tren que se mueve a  $30 \text{ m/s}$  pasa a una persona que se encuentra en la plataforma de la estación en  $t = t' = 0 \text{ s}$ . Veinte segundos después, la persona en la plataforma calcula que un pájaro volando a lo largo de las vías en la misma dirección que el tren se encuentra a  $800 \text{ m}$ .

- ¿Cuáles son las coordenadas del pájaro estimadas por el pasajero?
- Cinco segundos después de hacer la primera medición de coordenadas, la persona en la plataforma estima que el pájaro se encuentra a  $850 \text{ m}$ . A partir de esta información, encuentre la velocidad del pájaro (suponiendo que es constante) determinada tanto por la persona sobre la plataforma como por el pasajero del tren.

5. Considere la ecuación de ondas electromagnéticas:

$$\nabla^2 \varphi \equiv \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

- Demuestre que la ecuación de onda electromagnética no es invariante bajo las transformaciones de Galileo.
  - Demuestre que la ecuación sí es invariante bajo las transformaciones de Lorentz.
6. Una varilla se mueve de izquierda a derecha. Cuando su extremo izquierdo pasa por una cámara se toma una fotografía de la varilla junto con una regla calibrada estacionaria. Al revelar la fotografía el extremo izquierdo de la varilla coincide con la marca cero, y el derecho con  $0,9 \text{ m}$  de la regla. Si la varilla se mueve a  $0,8c$  con respecto a la cámara, determine su longitud real.
7. Un vagón de tren se mueve a velocidad constante  $v$  (véase la figura).  $A$  y  $B$  están en los extremos del vagón del tren y los observadores  $C$  y  $D$  están de pie junto a la vía. Se define el evento  $AC$  como ocurrencia de  $A$  al pasar frente a  $C$ , y los otros similarmente.



- De los cuatro eventos  $BD$ ,  $BC$ ,  $AD$ ,  $AC$ , ¿cuáles sirven para que los observadores que están sobre la vía midan el paso de un reloj llevado por  $A$ ?

- b) Sea  $\Delta t$  el intervalo de tiempo entre estos dos eventos para los observadores que están a un lado de la vía. ¿Qué intervalo de tiempo marca el reloj en movimiento?
- c) Suponga que los eventos  $BC$  y  $AD$  son simultáneos en el sistema de referencia de la vía. ¿Son simultáneos en el sistema de referencia del vagón? Si no, ¿cuál es primero?
8. Una regla graduada forma un ángulo de  $30^\circ$  respecto al eje  $x'$  de  $O'$ . ¿Cuál debe ser el valor de  $v$  si la regla forma un ángulo de  $45^\circ$  respecto al eje  $x$  de  $O$ ?
9. Considere dos observadores  $O$  y  $O'$  que se aproximan el uno del otro con velocidad relativa de  $0,6c$ .
- a) Si  $O$  mide la distancia inicial hasta  $O'$  igual a  $20m$ . ¿Cuánto tiempo pasará, de acuerdo con  $O$ , antes de que ambos se encuentren?
- b) ¿Cuánto tiempo pasará, en función de  $O'$ , antes de que se encuentren en  $O$ ?
10. El gemelo  $O'$ , se mueve a una velocidad de  $0,8c$  con respecto a una plataforma espacial; viaja a Alfa Centauro, la cual está a una distancia de 4 años-luz, y es la estrella más cercana a la plataforma. Cuando  $O'$  llega a la estrella, inmediatamente regresa a la plataforma a la misma velocidad.
- a) Compare la edad de  $O'$ , en el momento en que llega, con la de su hermano gemelo  $O$ , quien ha permanecido en la plataforma.
- b) Suponga que  $O$  envía cada año una señal luminosa a  $O'$ . ¿Cuántas señales son recibidas por  $O'$  en cada parte de su viaje? (En otras palabras, ¿qué es lo que en realidad vería el gemelo  $O'$  si mirara a su hermano  $O$  a través de un telescopio?)
11. Un cohete espacial de  $90m$  de longitud viaja a una velocidad constante de  $0,8c$  con respecto a la Tierra. Cuando la nariz de la nave pasa a un observador en la Tierra, el piloto activa una linterna hacia la cola de la nave.
- a) ¿En qué tiempo llega la señal, si es registrada por el piloto?
- b) ¿En qué tiempo llega la señal, si es registrada por el observador en la Tierra?
12. Una nave espacial pasa frente a la tierra a velocidad  $v = 0,9c$ . En ese instante un observador en la tierra y el tripulante de la nave sincronizan sus relojes, a las  $10hs$ . Luego de haber transcurrido una hora para el tripulante, éste envía una señal luminosa hacia el observador. Al recibir dicha señal, este último envía otra de confirmación. Determine:
- a) ¿A qué hora, según el reloj del observador, llega la señal de la nave?
- b) ¿A qué hora, según el reloj del tripulante, llega la señal de confirmación?