Mecánica Clásica (2022)

Práctico 6

Transformaciones de velocidades, aceleraciones y dinámica relativista

1. ¿A qué velocidades difieren en un $2\,\%$ las expresiones de Galileo y Lorentz para u'_x?

2.
   a) Un cohete $\mathcal{A}$ viaja a la derecha, y otro cohete $\mathcal{B}$ a la izquierda, a velocidades de $0,8\,c$ y $0,6\,c$ ¿Cuál es la velocidad de $\mathcal{A}$ medida desde $\mathcal{B}$?

   b) Repita el cálculo si ahora el cohete $\mathcal{A}$ viaja a una velocidad de $0,8\,c$ en dirección $+y$ respecto a la tierra y el cohete $\mathcal{B}$ mantiene su velocidad en la dirección $-x$.

3. A $t = 0$, un observador O emite un fotón que viaja a una rapidez c formando un ángulo de $60\,^\circ$ con el eje x. Un segundo observador O' viaja a $0,6\,c$ a lo largo del eje común $x - x'$ ¿Qué ángulo forma el fotón con el eje x' de O'?

4.
   a) ¿Cuál es la rapidez de un electrón que se acelera a través de una diferencia de potencial de $10^5\,V$?

   b) Se aumenta el potencial por un factor de 10. ¿Cuál será la cantidad de movimiento del electrón?

5. La masa en reposo de un múon μ es $207m_e$, dónde m_e es la masa en reposo del electrón, y su tiempo de vida promedio equivale a $2 \times 10^{-6}\,s$. ¿Cuál es la masa de un múon μ si su tiempo de vida promedio en el laboratorio asciende a $7 \times 10^{-6}\,s$?

6. Cuando se fisiona un núcleo de ^{235}U (Uranio 235) libera $200\,MeV$ de energía. ¿Qué porcentaje de la energía equivalente total del núcleo de ^{235}U representa esta energía? (la masa del ^{235}U es $235{,}044u$, donde $u = 1,66054 \times 10^{-27} kg$ es la unidad de masa atómica).

7.
   a) Una partícula tiene una energía total de $6 \times 10^3\,MeV$ y un momento de $3 \times 10^3\,\frac{MeV}{c}$ ¿Cuál es su masa en reposo?

   b) ¿Cuál es la energía de la partícula si su momento es de $5 \times 10^3\,\frac{MeV}{c}$?

8. *a*) Dos cuerpos idénticos, cada uno con masa en reposo m_0, se aproximan el uno del otro con velocidades iguales u, y se pegan en un choque perfectamente inelástico. Determine la masa en reposo del cuerpo compuesto.

   b) ¿Cuál es la masa compuesta determinada por un observador que se encuentra en reposo con respecto a uno de los dos cuerpos iniciales?

9. Se quiere producir una partícula de masa M_0 haciendo colisionar dos protones, de masa m_0.

   a) Si se dispara uno de los protones con energía cinética K contra el otro en reposo, muestre que se obtiene:

$$M_0 = 2m_0\sqrt{1 + \frac{K}{2m_0c^2}}$$

   b) Si ahora son disparados uno contra el otro con energía cinética K cada uno, muestre que:

$$M_0 = 2m_0\left(1 + \frac{K}{2m_0c^2}\right)$$

10. Una partícula 1 de masa en reposo m_1, y que se mueve en la dirección del eje x con energía cinética K_1, colisiona con una partícula 2 de masa en reposo m_2, inicialmente en reposo. Durante la colisión las partículas 1 y 2 se convierten en otras dos partículas, 3 y 4, de masas en reposo m_3 y m_4. La partícula 3 sale con cantidad de movimiento p_3 en la dirección del eje y.

    Determine:

    a) La dirección en que es emitida la partícula 4. Es decir, halle θ_4 siendo éste el ángulo que se desvía la partícula.

    b) La cantidad de movimiento de esta partícula, $\vec{p}_4$.

    c) Calcule θ_4 y $\vec{p}_4$ en el caso que la partícula 1 tenga masa $m_1 = 0$ y energía cinética $K_1 = 10\,MeV$, y la cantidad de movimiento de la partícula 3 sea $p_3 = 20\,MeV/c$.

11. Se da el siguiente decaimiento alfa: $Cs_{55}^{112} \rightarrow I_{53}^{108} + He_2^4$.

    Donde un núcleo de Cesio experimenta un decaimiento alfa, resultando en un núcleo de Yodo y un núcleo de Helio.

    a) Halle la energía del núcleo del Helio en función sólo de la velocidad de la luz y de las masas. (Puede ser útil la relación $\gamma^2\beta^2 = \gamma^2 - 1$).

    b) Exprese el momento del Helio en función de la velocidad de la luz, la masa del Cesio y la función triangular $\lambda(M_{Cs}^2, M_{He}^2, M_I^2)$, siendo:

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$$

12. Calcule el radio de la trayectoria de un electrón de $10\,MeV$ que se desplaza perpendicularmente a un campo magnético uniforme de intensidad $2\,T$.

    a) Primero resuelva este problema de acuerdo con la física clásica.

    b) Luego, resuélvalo de acuerdo con la teoría de la relatividad.

13. Un astronauta experimenta una aceleración continua de $9,8\,m/s^2$ en su sistema de reposo instantáneo. Si parte del reposo desde la Tierra, ¿qué distancia ha recorrido al cabo de un tiempo terrestre t? ¿Cuánto tarda en alcanzar una velocidad de $c/2$? *Sugerencia: Emplee la transformación de aceleraciones en la dirección del movimiento relativo, haciendo $u'_x = 0$ y observe que en este caso $\gamma(v)$ es una función del tiempo.*

14. *a*) De acuerdo con la física clásica, ¿qué diferencia de potencial acelerará electrones a la velocidad de la luz?

    b) Con esta diferencia de potencial, ¿qué velocidad adquirirá un electrón según la teoría de la relatividad?

    c) ¿Cuál sería su masa a esta velocidad? ¿Cuál su energía cinética?

    d) Si el electrón situado en $x = 0$ se acelera partiendo del reposo en un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$, que está dirigido en el sentido positivo del eje x, demuestre que su aceleración está dada por:

$$a_x = \frac{e|E|}{m_0}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

    e) Demuestre que la velocidad y posición del electrón en cualquier instante t están dadas por:

$$u_x(t) = \frac{e|E|t}{m_0\sqrt{1 + \left(\frac{e|E|t}{m_0 c}\right)^2}} \qquad\qquad x(t) = \frac{m_0 c^2}{e|E|}\left[\sqrt{1 + \left(\frac{e|E|t}{m_0 c}\right)^2} - 1\right]$$

15. La masa de Clark Kent es de $90\,kg$ y su estatura es de $1,9\,m$. Sabiendo que Superman vuela horizontalmente a $0,9\,c$.

    a) Encuentre la estatura de Superman según Luisa Lane (en reposo).

    b) Encuentre la "masa relativista" de Superman según Luisa Lane.

    c) Si para Superman transcurren $10\,s$, ¿Cuánto tiempo ha transcurrido para Luisa?

    d) Compare c) con la situación de Clark Kent viajando horizontalmente en un avión comercial a $800\,km/h$.

16. Sea $\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2$ el cuadrado del intervalo que separa dos eventos.

   a) Muestre que dos eventos E_1 y E_2 separados por un intervalo de tipo tiempo ($\Delta s^2 < 0$) ocurren en el mismo punto en algún referencial.

   b) Muestre que dos eventos E_1 y E_2 separados por un intervalo de tipo espacio ($\Delta s^2 > 0$) son simultáneos en algún referencial. (Sugerencia: para simplificar, considere una única coordenada espacial x).

   c) Concluya que el orden temporal entre dos eventos (el significado de "antes" y "después") es invariante si están separados por un intervalo de tipo tiempo, mientras que depende del referencial si el intervalo que los separa es de tipo espacio.

17. *a*) Demuestre la siguiente propiedad de la función $\gamma(v)$ (en el sistema geométrico de unidades, $c = 1$):

$$\gamma(v_1)\gamma(v_2)(1 + v_1 v_2) = \gamma\left(\frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2}\right)$$

   b) Compruebe que dicha propiedad permite escribir el producto de transformaciones de Lorentz en direcciones paralelas al eje x de la siguiente forma: $\Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_3$ con: $v_3 = \frac{v_1+v_2}{1+v_1 v_2}$.

   c) Utilice este resultado para deducir la ley de adición de velocidades relativista en la dirección paralela al eje x:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v}$$

   donde u'_x es la componente x de la velocidad de una partícula respecto al sistema S' que se mueve con velocidad v respecto al sistema S (siendo u_x la velocidad de la partícula respecto a S). Escribir esta ley en el sistema usual de unidades.

   d) Para el caso anterior de movimiento relativo en la dirección x, deducir la ley de transformación de velocidades para las componentes transversales ((u'_y, u'_z) en el sistema móvil y (u_y, u_z) en el sistema fijo) de la velocidad de la partícula.