Mecánica Clásica (2022)

Práctico 7

Centro de Masas, Tensor de Inercia y Cinemática del Rígido

1. Halle el centro de masa de las siguientes figuras homogéneas (con densidad de masa uniforme):

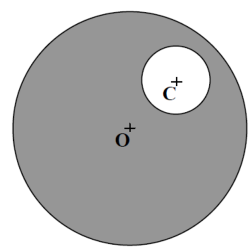
   a) Sector de círculo de ángulo al centro 2α.

   b) Arco de circunferencia de ángulo al centro 2α.

   c) Triángulo isósceles de base $2r$ y altura h.

   d) Cono de revolución de radio r y altura h.

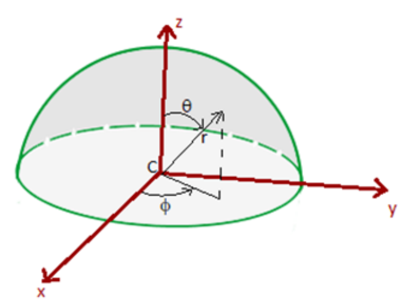
2. Halle el centro de masa de un disco de radio a que tiene un agujero circular de radio b. Este agujero está centrado en un punto C que dista d del centro O del disco. Supondremos se verifica que $0 < d < a - b$.



3. Considere una semiesfera de masa M y radio R.

   a) Halle el centro de masas de la semiesfera (es conveniente utilizar el sistema de referencia de la figura siguiente).

   b) Halle el tensor de inercia de la semiesfera en torno al punto C, en el sistema de referencia de la figura.



4. Si el torque de las fuerzas externas para un sistema de partículas respecto a un punto de referencia $Q1$ se define como:

$$\vec{\mathcal{T}}_{Q1}^{ext} = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_{Q1}) \times \vec{F}_i^{(ext)}$$

   a) Mostrar que respecto a otro punto de referencia Q2 el torque se puede expresar como:

$$\vec{\mathcal{T}}_{Q1}^{ext} = \vec{\mathcal{T}}_{Q2}^{ext} + \vec{F}_{neta} \times (\vec{r}_{Q1} - \vec{r}_{Q2}).$$

b) Análogamente, obtenga que para el momento angular se tendrá:

$$\vec{L}_{Q1}^{ext} = \vec{L}_{Q2}^{ext} + \vec{p} \times (\vec{r}_{Q1} - \vec{r}_{Q2}).$$

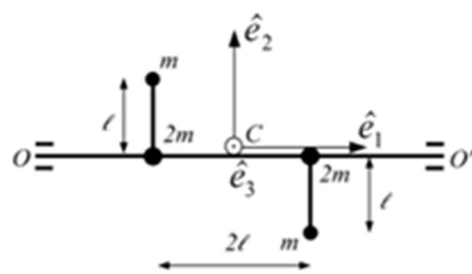
5. *a*) Demuestre que el conjunto de ecuaciones dado por una primera cardinal y una segunda cardinal, aplicada en un punto $\vec{r}_Q$, es equivalente a una primera cardinal y una segunda cardinal aplicada en otro punto $\vec{r}_R$ cualquiera. Es decir:

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\vec{P}} = M\vec{a}_{cm} = \vec{F}_{neta} \\ \dot{\vec{L}}_Q = \vec{P} \times \dot{\vec{r}}_Q + \vec{\mathcal{T}}_Q^{ext} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{\vec{P}} = M\vec{a}_{cm} = \vec{F}_{neta} \\ \dot{\vec{L}}_R = \vec{P} \times \dot{\vec{r}}_R + \vec{\mathcal{T}}_R^{ext} \end{array}\right.$$

b) Demuestre análogamente que el conjunto de ecuaciones dado por una primera cardinal y una segunda cardinal en un punto $\vec{r}_Q$, es equivalente al conjunto de tres ecuaciones obtenido de aplicar la segunda cardinal en tres puntos no alineados cualesquiera, por ejemplo, $\vec{r}_Q$, $\vec{r}_R$ y $\vec{r}_S$ (Sugerencia: usar fórmulas de cambio de momentos):

$$\left.\begin{array}{l} \dot{\vec{P}} = M\vec{a}_{cm} = \vec{F}_{neta} \\ \dot{\vec{L}}_Q = \vec{P} \times \dot{\vec{r}}_Q + \vec{\mathcal{T}}_Q^{ext} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dot{\vec{L}}_Q = \vec{P} \times \dot{\vec{r}}_Q + \vec{\mathcal{T}}_Q^{ext} \\ \dot{\vec{L}}_R = \vec{P} \times \dot{\vec{r}}_R + \vec{\mathcal{T}}_R^{ext} \\ \dot{\vec{L}}_S = \vec{P} \times \dot{\vec{r}}_S + \vec{\mathcal{T}}_S^{ext} \end{array}\right.$$

6. El rígido de la figura de abajo está formado por dos masas $2m$, separadas una distancia $2l$ y montadas simétricamente con respecto al punto medio C del eje OO', sujetas a dos masas m por medio de barras de largo l perpendiculares al eje OO'. El conjunto de las cuatro masas está en un mismo plano. Tanto las barras que une las masas como el eje OO' son de masa despreciable.



a) Calcule las componentes del tensor de inercia respecto a C.

b) Pasando a ejes principales, diagonalice el tensor de inercia obtenido en *a*).

7. Halle el tensor de inercia en el centro de masa G de los siguientes sistemas rígidos homogéneos:

a) Disco de radio R.

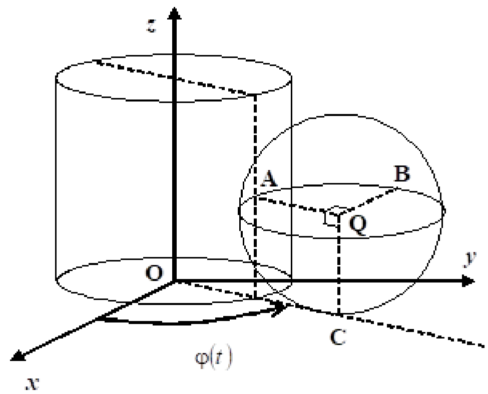
b) Placa rectangular de lados a y b.

c) Superficie esférica de radio R.

d) Esfera de radio R.

e) Elipsoide de semiejes a, b y c.

8. Un cilindro circular de radio R está fijo verticalmente sobre un plano horizontal. Una esfera, también de radio R, se mueve de modo que rueda sin deslizar simultáneamente sobre el plano horizontal y sobre la superficie del cilindro. Llamaremos Q a su centro, A al punto de contacto entre esfera y cilindro, C al punto de contacto entre la esfera y el plano y B a un punto que se ubica en el extremo del radio vector perpendicular a QA y QC. En coordenadas cilíndricas con eje en el eje del cilindro y origen en la intersección de este con el plano horizontal (ver figura).

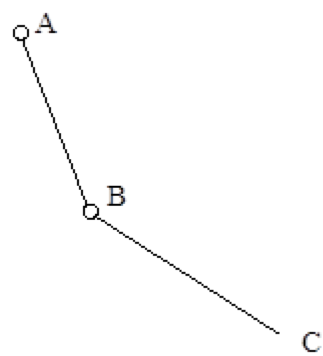


   a) Hallar el vector $\vec{\omega}$, velocidad angular de la esfera, en función del ángulo $\varphi(t)$.

   b) Determinar la ecuación diferencial que debe verificar el ángulo $\varphi(t)$ para que el punto B tenga su velocidad y aceleración perpendiculares en todo instante.

   c) Expresar la aceleración del punto B en función de la velocidad inicial del centro de la esfera y del tiempo.

9. Se consideran las dos barras iguales AB y BC de la figura. Las barras tienen masa m y longitud $2l$ y están articuladas en A y B, con A fijo, siendo ambas articulaciones cilíndricas y lisas, de forma que las barras se mueven manteniéndose siempre contenidas en el mismo plano. Este sistema, bajo la acción de la gravedad, se conoce como péndulo doble.



   a) Calcular la energía cinética total K del sistema formado por las dos barras.

   b) Calcular el momento angular respecto al punto B de la barra BC.

   c) Calcular el momento angular respecto al punto A del sistema total.