CLASE 2

Cinemática

Estudio del movimiento
(No nos importan las causas)

Empezamos considerando los cuerpos como partículas lo cual es válido si las distancias características del mov d_{mov} son mucho mayores a las dimensiones del cuerpo d_{cue} $(d_{mov} \gg d_{cue})$

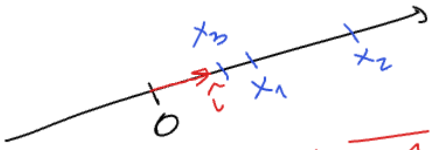
Posición

Para describir el mov en una dimensión necesitamos definir un punto de ref "O" respecto al cual medir

Además necesitamos asignar un sentido mediante un versor $\hat{i}$

Asi podemos comenzar a describir el mov.

es decir, podemos medir el cuerpo u objeto de estudio en distintas posiciones



$$\boxed{\hat{e}_1 = \hat{i}}$$

etiqueta	pos
x_1	10
x_2	20
x_3	7
⋮	⋮

$$\boxed{\vec{r}_i = x_i\,\hat{e}_1}$$

Posición

<u>Desplazamiento</u>: entre medidas ℓ, n es la diferencia vectorial de las posic. en dichas medidas

$$\Delta \vec{r}_{\ell\to n} = \vec{r}_n - \vec{r}_\ell = x_n\,\hat{e}_1 - x_\ell\,\hat{e}_1 = (x_n - x_\ell)\,\hat{e}_1 = \Delta x_{\ell\to n}\,\hat{e}_1$$

Podemos describir mejor el mov. indicando cuándo pasó por dichos posic.

Velocidad

etiqueta	pos	tiempo
x_1	10	0
x_2	20	3
x_3	7	8
⋮	⋮	⋮

Esto nos permite decir que tan rápido se movio

La velocidad media de una partícula entre las medidas l y n se define como el cociente entre su desplazamiento y el intervalo de tiempo

$$\vec{V}_{m_{l\to n}} = \frac{\vec{r}_n - \vec{r}_l}{t_n - t_l} = \frac{\Delta x_{l\to n}}{\Delta t}\hat{e}_1 = V_{m_{x,l\to n}}\hat{e}_1 \qquad \underline{\text{vel. media}}$$

con una mejor descripción podemos definir esta cant. para intervalos de tiempo cada vez menores.

cambiando $\vec{r}_i \to \vec{r}(t)$ en el límite podemos definir la velocidad instantánea en el tiempo t como:

$$\vec{V}(t) \equiv \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{t+\Delta t - t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{X(t+\Delta t) - X(t)}{\Delta t}\hat{e}_1 = \frac{dx}{dt}\hat{e}_1 = V_x(t)\,\hat{e}_1$$

$\Delta t \to 0 \qquad t+\Delta t \; - t \qquad \Delta t$

Aceleración

De la misma forma podemos la aceleración media $\vec{a}_m$ en el intervalo de las medidas ℓ y m como el cambio en la velocidad dividido el intervalo de tiempo

$$\vec{a}_{m\,\ell\to m} = \frac{\vec{V}_m - \vec{V}_\ell}{t_m - t_\ell} = \frac{V_{mx} - V_{\ell x}}{\Delta t}\hat{e}_1 = \frac{\Delta V_{x\,\ell\to m}}{\Delta t}\hat{e}_1$$

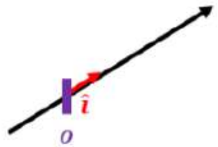
de nuevo, en el límite de una descripción cada vez más fina, podemos definir la aceleración instantanea en el tiempo t como

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{V_x(t+\Delta t) - V_x(t)}{\Delta t}\hat{e}_1 = \frac{dV_x}{dt}\hat{e}_1 = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{e}_1$$

la aceleración instantanea en el tiempo t como

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}\, \hat{e}_1 = \frac{dv_x}{dt}\,\hat{e}_1 = \frac{d^2x}{dt^2}\,\hat{e}_1$$

Cuando una partícula se mueve en línea recta, describimos su posición respecto de un sistema de referencia (origen o punto de referencia O + sentido y dirección de movimiento dado por el versor $\hat{\imath}$) mediante una única coordenada, x.

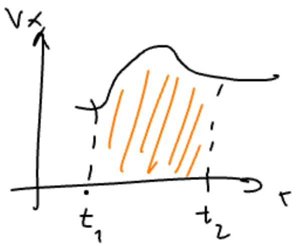


La velocidad media de la partícula, $v_{med,x}$ entre los tiempos t_1 y t_2 es igual al desplazamiento $\Delta x = x_2 - x_1$ dividido entre $\Delta t = t_2 - t_1$.	$v_{med,x} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ $\vec{v}_{med} = v_{med,x}\hat{\imath}$
La velocidad instantánea v_x en un instante t es igual a la velocidad media entre los tiempos t y $t + \Delta t$ en el límite en que $\Delta t \to 0$ (v_x es la derivada de la función posición respecto al tiempo).	$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$ $\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{\imath}$
La aceleración media $a_{med,x}$ entre los tiempos t_1 y t_2 es igual al cambio de velocidad $\Delta v_x = v_{2,x} - v_{1,x}$ en ese lapso dividido el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$.	$a_{med,x} = \frac{v_{2,x} - v_{1,x}}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$ $\vec{a}_{med} = a_{med,x}\hat{\imath}$
La aceleración instantánea a_x en el instante t es igual a la aceleración media entre los tiempos t y $t + \Delta t$ en el límite en que $\Delta t \to 0$ (a_x es la derivada de la función velocidad instantánea v_x respecto del tiempo)	$a_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$ $\vec{a}(t) = a_x(t)\hat{\imath}$

Interpretación gráfica

Interpretación gráfica

- La pendiente de la curva x vs t es la velocidad instantánea (v_x)
- La pendiente de la curva v_x vs t es la aceleración instantánea (a_x)
- el área bajo la curva v_x vs t entre t_1 y t_2 es el desplazamiento. (Δx)



$$\int_{t_1}^{t_2} v_x(t')\,dt' = \int_{t_1}^{t_2} \cancel{\frac{dx}{dt'}}(t')\,\cancel{dt'} = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} dx = x(t_2) - x(t_1)$$

en lugar de integrar en la variable t' hago un cambio de variable a $x(t')$

$\rightarrow \quad dx = \dfrac{dx}{dt'}\,dt'$

- el área bajo la curva a_x vs t entre t_1 y t_2 es el cambio en la velocidad entre dichos instantes

$$\int_{t_1}^{t_2} a_x(t')\,dt' = v_x(t_2) - v_x(t_1)$$

En 3 Dimensiones

La posición la vamos a definir a partir de un punto de ref. "O" y 3 versores ortonormales $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$ formando una base directa $\therefore$ • $\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = \delta_{ij}$

$\hat{e}_1 = \hat{\imath}$, $\hat{e}_2 = \hat{\jmath}$, $\hat{e}_3 = k$ • $\hat{e}_i \times \hat{e}_j = \sum_k \varepsilon_{ijk}\, \hat{e}_k$

La posición es $\vec{r}_n = x_n \hat{\imath} + y_n \hat{\jmath} + z_n \hat{k}$

El desplazamiento se generaliza a $\Delta \vec{r}_{\ell \to n} = \vec{r}_n - \vec{r}_\ell = \Delta x_{\ell \to n}\hat{\imath} + \Delta y_{\ell \to n}\hat{\jmath} + \Delta z_{\ell \to n}\hat{k}$

La velocidad media se generaliza a $\vec{V}_{m\, \ell \to n} = \dfrac{\vec{r}_n - \vec{r}_\ell}{t_n - t_\ell} = \dfrac{\Delta x_{\ell \to n}}{\Delta t}\hat{\imath} + \dfrac{\Delta y_{\ell \to n}}{\Delta t}\hat{\jmath} + \dfrac{\Delta z_{\ell \to n}}{\Delta t}\hat{k}$

La velocidad inst. se generaliza a $\vec{V}(t) = V_x(t)\hat{\imath} + V_y(t)\hat{\jmath} + V_z(t)\hat{k} = \dfrac{dx}{dt}\hat{\imath} + \dfrac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \dfrac{dz}{dt}\hat{k}$

La aceleración media se generaliza a $\vec{a}_{m\, \ell \to n} = \dfrac{\Delta V_{x\, \ell \to n}}{\Delta t}\hat{\imath} + \dfrac{\Delta V_{y\, \ell \to n}}{\Delta t}\hat{\jmath} + \dfrac{\Delta V_{z\, \ell \to n}}{\Delta t}\hat{k}$

La aceleración inst. se generaliza a $\vec{a}(t) = a_x(t)\hat{\imath} + a_y(t)\hat{\jmath} + a_z(t)\hat{k} = \dfrac{dV_x}{dt}\hat{\imath} + \dfrac{dV_y}{dt}\hat{\jmath} + \dfrac{dV_z}{dt}\hat{k} = \dfrac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \dfrac{d^2y}{dt^2}\hat{\jmath} + \dfrac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$

La aceleración inst. se generaliza a $\vec{a}(t) = a_x(t)\hat{\imath} + a_y(t)\hat{\jmath} + a_z(t)\hat{k} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} = \frac{dx}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt^2}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt^2}\hat{k}$

$$\vec{v}_{med} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\imath} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\jmath} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k}$$

$$\vec{v}_{med} = v_{med,x}\hat{\imath} + v_{med,y}\hat{\jmath} + v_{med,z}\hat{k}$$

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\imath} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\jmath} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\hat{k} += \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{\imath} + v_y(t)\hat{\jmath} + v_z(t)\hat{k}$$

$$\vec{a}_{med} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{\imath} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{\jmath} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\hat{k}$$

$$\vec{a}_{med} = a_{med,x}\hat{\imath} + a_{med,y}\hat{\jmath} + a_{med,z}\hat{k}$$

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}\hat{\imath} + \frac{\Delta v_y}{\Delta t}\hat{\jmath} + \frac{\Delta v_z}{\Delta t}\hat{k} += \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\hat{\imath} + a_y(t)\hat{\jmath} + a_z(t)\hat{k}$$

Trayectoria y ley horaria

La trayectoria son los puntos del espacio por los cuales transita el cuerpo en su evolución.

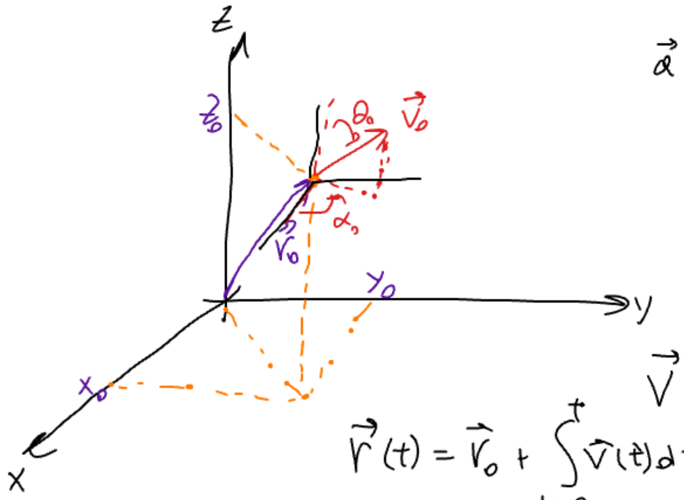
La ley horaria es su evolución temporal $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$

Ejemplo: En un movimiento circular uniforme en el plano x, y centrado en el origen

La trayectoria es el circulo mientras que la ley horaria es su evolución en t $\quad \vec{r}(t) = R\cos(\omega t)\hat{i} + R\,\mathrm{sen}(\omega t)\hat{j}$

Ejercicio: Hallar la ley horaria para un movimiento proyectil

Ejercicio: Hallar la ley horaria para un movimiento proyectil



$$\vec{a} = -g\hat{k}$$

$$\Rightarrow \vec{V}(t) = \vec{V}(0) + \int_{t=0}^{t} \vec{a}(t')\,dt'$$

$$\vec{V}(t) = \underbrace{V_0 \,\mathrm{sen}\,\theta_0 \cos\alpha_0 \,\hat{i} + V_0 \,\mathrm{sen}\,\theta_0 \,\mathrm{sen}\,\alpha_0 \,\hat{j} + V_0 \cos\theta_0 \,\hat{k}}_{\vec{V_0}} + \int_{t=0}^{t} -g\hat{k}\,dt'$$

$$\vec{V}(t) = V_0 \,\mathrm{sen}\,\theta_0 \cos\alpha_0 \,\hat{i} + V_0 \,\mathrm{sen}\,\theta_0 \,\mathrm{sen}\,\alpha_0 \,\hat{j} + (V_0 \cos\theta_0 - gt)\,\hat{k}$$

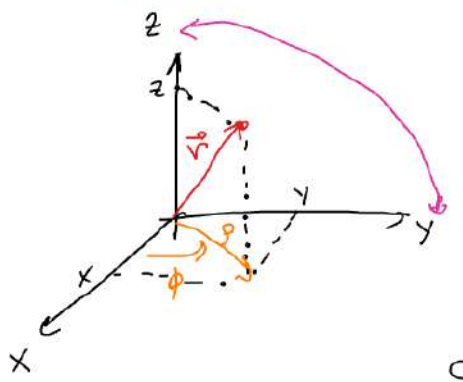
$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_{t=0}^{t} \vec{V}(t')\,dt'$$

$$\vec{r}(t) = \underbrace{x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}}_{\vec{r}_0} + \int_{t=0}^{t} \Big[\overbrace{V_0 \,\mathrm{sen}\,\theta \cos\alpha}^{V_{0x}}\,\hat{i} + \overbrace{V_0 \,\mathrm{sen}\,\theta_0 \,\mathrm{sen}\,\alpha_0}^{V_{0y}}\,\hat{j} + (\overbrace{V_0 \cos\theta_0}^{V_{0z}} - gt)\,\hat{k}\Big]\,dt'$$

$$\Rightarrow \vec{r}(t) = \underbrace{(x_0 + V_{0x}t)}_{\text{MRU}}\,\hat{i} + \underbrace{(y_0 + V_{0y}t)}_{\text{MRU}}\,\hat{j} + \underbrace{\left(z_0 + V_{0z}t - \frac{gt^2}{2}\right)}_{\text{MRUA}}\,\hat{k}$$

Sistemas de coordenadas

Coord cilíndricas



$$\left.\begin{array}{l} \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k} \\ x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\phi \\ z = z \end{array}\right\} \boxed{\vec{r} = \rho\cos\phi\,\hat{i} + \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\,\hat{j} + z\hat{k}}$$

vamos a def. un versor asociado a la coord. η

como $\hat{e}_\eta \equiv \dfrac{\frac{d\vec{r}}{d\eta}}{\left|\frac{d\vec{r}}{d\eta}\right|}$

$$\Rightarrow \hat{e}_\rho \equiv \frac{\frac{d\vec{r}}{d\rho}}{\left|\frac{d\vec{r}}{d\rho}\right|}, \quad \frac{d\vec{r}}{d\rho} = \cos\phi\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\phi\,\hat{\jmath}$$

Además se da que $\left|\frac{d\vec{r}}{d\rho}\right| = 1$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{e}_\rho = \cos\phi\,\hat{\imath} + \operatorname{sen}\phi\,\hat{\jmath}}$$

$$\hat{e}_\phi \equiv \frac{\frac{d\vec{r}}{d\phi}}{\left|\frac{d\vec{r}}{d\phi}\right|}, \quad \frac{d\vec{r}}{d\phi} = -\rho\operatorname{sen}\phi\,\hat{\imath} + \rho\cos\phi\,\hat{\jmath}, \quad \left|\frac{d\vec{r}}{d\phi}\right| = \sqrt{\rho^2\operatorname{sen}^2\phi + \rho^2\cos^2\phi} = \rho$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{e}_\phi = -\operatorname{sen}\phi\,\hat{\imath} + \cos\phi\,\hat{\jmath}}$$

$$\hat{e}_z = \frac{\frac{d\vec{r}}{dz}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dz}\right|} = \hat{k}$$

$\hat{e}_\rho(\phi)$, $\hat{e}_\phi(\phi)$ son funciones de ϕ

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\hat{e}_\rho}{d\phi} &= -\operatorname{sen}\phi\,\hat{\imath} + \cos\phi\,\hat{\jmath} = \hat{e}_\phi \\ \frac{d\hat{e}_\phi}{d\phi} &= -\cos\phi\,\hat{\imath} - \operatorname{sen}\phi\,\hat{\jmath} = -\hat{e}_\rho \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{d\hat{e}_\rho}{dt} &= \dot{\phi}\,\hat{e}_\phi \\ \frac{d\hat{e}_\phi}{dt} &= -\dot{\phi}\,\hat{e}_\rho \end{aligned}$$

¿Para qué quiero esto?

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{\imath} + y(t)\hat{\jmath} + z(t)\hat{k} = \rho(t)\hat{e}_\rho + z(t)\hat{k}$$

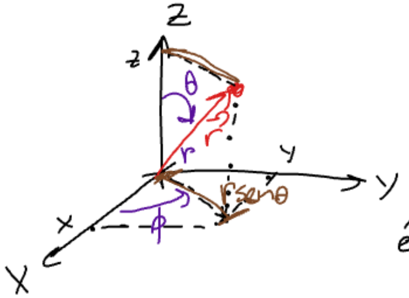
$$\Rightarrow \vec{V}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\rho}{dt}\hat{e}_\rho + \rho\frac{d\hat{e}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\frac{d\hat{e}_\rho}{d\phi}\overbrace{\frac{d\phi}{dt}}^{\dot{\phi}} + \dot{z}\hat{k} \Rightarrow \boxed{\vec{V} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{z}\hat{k}}$$

$$\frac{d}{dt}(A) \equiv \dot{A}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{V}}{dt} = \ddot{\rho}\hat{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\hat{e}}_\rho + \dot{\rho}\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \rho\ddot{\phi}\hat{e}_\phi + \rho\dot{\phi}\dot{\hat{e}}_\phi + \ddot{z}\hat{k}$$

$$\vec{a}(t) = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{k}$$

Coord esféricas



$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

$$x = r\,\text{sen}\theta\cos\phi$$

$$y = r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\phi$$

$$z = r\cos\theta$$

$$\vec{r} = r\,\text{sen}\theta\cos\phi\,\hat{i} + r\,\text{sen}\theta\,\text{sen}\phi\,\hat{j} + r\cos\theta\,\hat{k}$$

$$\vec{r} = r\hat{e}_r$$

$$\hat{e}_r \equiv \frac{\frac{d\vec{r}}{dr}}{\left|\frac{d\vec{r}}{dr}\right|} = \text{sen}\theta\cos\phi\,\hat{i} + \text{sen}\theta\,\text{sen}\phi\,\hat{j} + \cos\theta\,\hat{k}$$

$$\hat{e}_\theta \equiv \frac{d\vec{r}}{d\theta}\Big/\left|\frac{d\vec{r}}{d\theta}\right| = \cos\theta\cos\phi\,\hat{i} + \cos\theta\,\text{sen}\phi\,\hat{j} - \text{sen}\theta\,\hat{k}$$

$$\hat{e}_\phi \equiv \frac{d\vec{r}}{d\phi}\Big/\left|\frac{d\vec{r}}{d\phi}\right| = -\text{sen}\phi\,\hat{i} + \cos\phi\,\hat{j}$$

$\hat{e}_r(\theta,\phi)$
$\hat{e}_\theta(\theta,\phi)$
$\hat{e}_\phi(\phi)$

mismo proced.

(precisamos $\frac{\partial\hat{e}_r}{\partial\theta}, \frac{\partial\hat{e}_r}{\partial\phi}, \frac{\partial\hat{e}_\theta}{\partial\theta}, \frac{\partial\hat{e}_\theta}{\partial\phi}, \frac{\partial\hat{e}_\phi}{\partial\theta}, \frac{\partial\hat{e}_\phi}{\partial\phi}$ + regla de la cadena)

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\,\text{sen}\theta\,\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi$$

$$\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\text{sen}^2\theta)\,\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2\text{sen}\theta\cos\phi)\,\hat{e}_\theta + (r\ddot{\phi}\,\text{sen}\theta + 2\dot{r}\dot{\phi}\,\text{sen}\theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta)\,\hat{e}_\phi$$

Varias cuentas !

Coord intrínsecas o curvilíneas

movimiento parametrizado por una única coord. s "Abscisa curvilínea"
y una ~~base~~ ortonormal directa llamada triedo de Frenet $\{\hat{t}, \hat{n}, \hat{b}\}$

tangencial normal binormal

Es útil cuando se conoce la trayectoria de antemano

$\Rightarrow$ conocemos $\vec{r}(\eta)$ en términos de un parámetro η

No tiene porque ser el tiempo

El cambio $d\vec{r}$ al varia $\eta \to \eta + d\eta$ es $d\vec{r} = \left(\frac{dx}{d\eta}\hat{\imath} + \frac{dy}{d\eta}\hat{\jmath} + \frac{dz}{d\eta}\hat{k}\right) d\eta$

s mide la distancia que se avanza sobre la trayectoria

$$ds = |d\vec{r}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\eta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\eta}\right)^2}\, d\eta$$

$$\Rightarrow S = \int_{\eta_0}^{\eta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\eta'}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\eta'}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\eta'}\right)^2}\, d\eta'$$

Si conocemos la ley horaria $\vec{r}(t)$, podemos usar como parámetro $t = \eta$

$$\Rightarrow S = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt' = \int_{t_0}^{t} |\vec{v}(t)|\, dt'$$

$$\boxed{\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \dot{s}\,\hat{t}}$$

$$\hat{t} \equiv \frac{d\vec{r}}{ds} \Rightarrow |\hat{t}|^2 = 1$$

versor tangencial

$$\hat{t} \perp \dot{\hat{t}}$$

$$\dot{\hat{t}} = \frac{d\hat{t}}{ds}\dot{s} \Rightarrow \hat{n} = \rho \frac{d\hat{t}}{ds}, \quad \rho \text{ radio de curvatura}$$

versor normal

$$\rho \equiv 1 \Big/ \left|\frac{d\hat{t}}{ds}\right|$$

ambiguedad con las rectas, $\hat{n}$ no está definido

$$\hat{b} \equiv \hat{t} \times \hat{n}$$

versor binormal

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{s}\,\hat{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\hat{n}}$$