CLASE 3

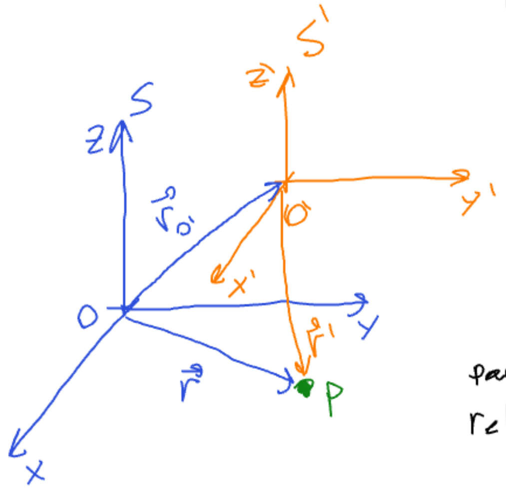
Movimiento relativo

Está claro desde el comienzo que las mediciones de posiciones, velocidades, etc. dependen del estado de mov. del observador.

Debido a esto, resulta relevante poder convertir las descripciones de un referencial a otro

Consideremos dos sist. de referencia S y S' moviendose uno respecto del otro. El movimiento puede ser de traslación (caso 1), rotación (caso 2) o una combinación (caso 3).

Caso 1



Tomamos $x // x'$, $y // y'$, $z // z'$ y O' se mueve con velocidad $\vec{V}_{O'}$ respecto a O

Notación

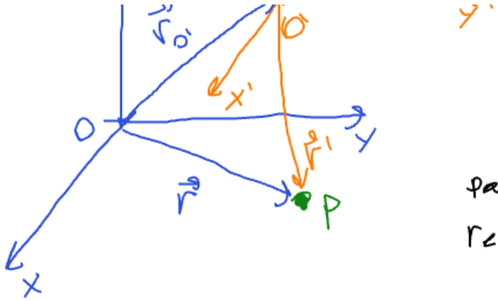
$\vec{A}'$ es el vector $\vec{A} - \vec{O}'$

$\vec{A}$ es el vector $\vec{A} - \vec{O}$

$\vec{V}_{O'}$ es el vector $\dfrac{d(\vec{O}' - \vec{O})}{dt}$

Es claro que la posición de una partícula P en el referencial S se relaciona con la de S' como

(Postulado)



Es claro que la posición de una partícula P en el referencial S se relaciona con la de S' como

$$\vec r = \vec r_{o'} + \vec r' \quad (1) \qquad \left(\overset{\text{Postulado}}{t = t'}\right)$$

La velocidad $\vec v$ de P medido en S es:

$$\vec V = \frac{d\vec r}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat i + \frac{dy}{dt}\hat j + \frac{dz}{dt}\hat k$$

y en S' es:

$$\vec V' = \frac{dx'}{dt}\hat i' + \frac{dy'}{dt}\hat j' + \frac{dz'}{dt}\hat k'$$

Pero $\hat i = \hat i'$, $\hat j = \hat j'$ y $\hat k = \hat k'$

$$\vec V_{o'} = \frac{dx_{o'}}{dt}\hat i + \frac{dy_{o'}}{dt}\hat j + \frac{dz_{o'}}{dt}\hat k$$

$$\vec{V}_{o'} = \frac{dx_{o'}}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy_{o'}}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz_{o'}}{dt}\hat{k}$$

Derivando (1) es:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}_{o'} + \vec{r}\,') = \vec{v}_{o'} + \vec{v}\,'$$

se denomina velocidad de transporte.

Es la velocidad de un objeto en reposo relativo en S'

Derivando de nuevo es inmediato

$$\vec{a} = \vec{a}_{o'} + \vec{a}\,'$$

aceleración de transporte

$$\vec{a}_{o'} = \ddot{x}_{o'}\hat{\imath} + \ddot{y}_{o'}\hat{\jmath} + \ddot{z}_{o'}\hat{k}$$

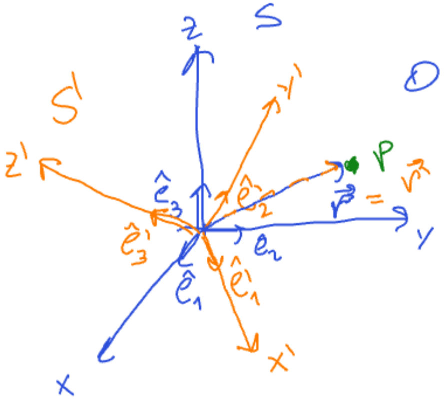
$$\vec{a}\,' = \ddot{x}'\hat{\imath} + \ddot{y}'\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k}$$

Caso 2 : rotación pura

Ojo : $\hat{e}_1 \neq \hat{e}_1'$

? S

Caso 2: rotación pura



$O = O'$ $\qquad$ $\vec r = \vec r'$

Ojo: $\hat e_1 \neq \hat e_1'$

$\hat e_2 \neq \hat e_2'$

$\hat e_3 \neq \hat e_3'$

$\Rightarrow$ Un vector genérico $\vec A$

con componentes en S y S'

$$\vec A = A_x \hat e_1 + A_y \hat e_2 + A_z \hat e_3$$
$$= A_x' \hat e_1' + A_y' \hat e_2' + A_z' \hat e_3'$$

Cuando derivo respecto del tiempo tengo

$$\frac{d\vec A}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A_x \hat e_1 + A_y \hat e_2 + A_z \hat e_3\right) = \underbrace{\frac{dA_x}{dt}\hat e_1 + \frac{dA_y}{dt}\hat e_2 + \frac{dA_z}{dt}\hat e_3}_{\left(\frac{d\vec A}{dt}\right)_A} + \overbrace{A_x \cancelto{0}{\frac{d\hat e_1}{dt}} + A_y \cancelto{0}{\frac{d\hat e_2}{dt}} + A_z \cancelto{0}{\frac{d\hat e_3}{dt}}}^{\text{tomo S como sist. absoluto}}$$

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d}{dt}(A'_x \hat{e}'_1 + A'_y \hat{e}'_2 + A'_z \hat{e}'_3) = \underbrace{\frac{dA'_x}{dt}\hat{e}'_1 + \frac{dA'_y}{dt}\hat{e}'_2 + \frac{dA'_z}{dt}\hat{e}'_3}_{\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R} + A'_x \frac{d\hat{e}'_1}{dt} + A'_y \frac{d\hat{e}'_2}{dt} + A'_z \frac{d\hat{e}'_3}{dt}$$

visto desde S los versores $\hat{e}'_1$, $\hat{e}'_2$ y $\hat{e}'_3$ varían en el tiempo.

¿qué es $\frac{d\hat{e}'_i}{dt}$?

$$\frac{d\hat{e}'_1}{dt} = a_{11}\hat{e}'_1 + a_{12}\hat{e}'_2 + a_{13}\hat{e}'_3$$

$$\frac{d\hat{e}'_2}{dt} = a_{21}\hat{e}'_1 + a_{22}\hat{e}'_2 + a_{23}\hat{e}'_3$$

$$\frac{d\hat{e}'_3}{dt} = a_{31}\hat{e}'_1 + a_{32}\hat{e}'_2 + a_{33}\hat{e}'_3$$

siempre se cumple $\hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j = \delta_{ij}$ $\forall\, t$.

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\hat{e}'_i \cdot \hat{e}'_j) = 0 \Rightarrow \underbrace{\frac{d\hat{e}'_i}{dt} \cdot \hat{e}'_j}_{= a_{ij}} = -\underbrace{\frac{d\hat{e}'_j}{dt} \cdot \hat{e}'_i}_{a_{ji}}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{ij} = -a_{ji}} \Rightarrow$$ en particular $a_{ii} = 0$

$\Rightarrow$ Voy a escribir, porque puedo, a_{ij} como

$\rightarrow$ $a_{ij} = \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\,\omega_k$ cumple todo

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i,j,k) \in \{(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)\} \\ -1 & \text{si } (i,j,k) \in \{(3,2,1),(2,1,3),(1,3,2)\} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\,\hat{e}_j = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\,\omega_k\,\hat{e}_j = \vec{\omega}\times\hat{e}_i}$$

¿son iguales? sí

$$\vec{\omega}\times\hat{e}_i = \sum_{l=1}^{3}\omega_l\,\hat{e}_l \times \hat{e}_i = \sum_{l=1}^{3}\omega_l \sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{lik}\,\hat{e}_k = \sum_{l=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{lik}\,\omega_l\,\hat{e}_k = \sum_{l,k}\varepsilon_{ikl}\,\omega_l\,\hat{e}_k$$

$\vec{\omega} = \sum_{l=1}^{3}\omega_l\,\hat{e}_l$

$\vec{A}\times\vec{B} = \sum_{ijk} A_i B_j\,\hat{e}_k\,\varepsilon_{ijk}$

renombro $k \to j$, $l \to k$

y listo

$$\Rightarrow \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_A = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R + A_x\,\vec{\omega}\times\hat{e}_1 + A_y\,\vec{\omega}\times\hat{e}_2 + A_z\,\vec{\omega}\times\hat{e}_3 = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_R + \vec{\omega}\times\vec{A}$$

Para la posición

$$\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_A = \vec{V} = \underbrace{\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_R}_{\vec{V}'} + \vec{\omega} \times \vec{r} \Rightarrow \boxed{\vec{V} = \vec{V}' + \vec{\omega} \times \vec{r}}$$

Teorema de Roberval

si $\vec{V}' = 0$

$$\Rightarrow \vec{V} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \vec{V}_T$$

velocidad de transporte

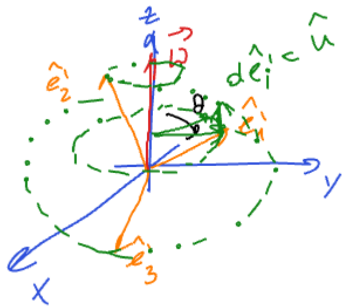
La derivada absoluta de un vector es igual a la derivada relativa más la derivada absoluta si se encontrase en reposo en el sist. relativo

observación: si $\vec{A}$ es $\vec{\omega}$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_A = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt}\right)_R + \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \left(\frac{d\omega}{dt}\right)_R$$

$\Rightarrow$ Podemos hablar de $\vec{\omega}$ sin ambigüedad.

$\vec{\omega}$ es la velocidad angular de S' respecto a S



$$\frac{d\hat e_i}{dt} = \vec\omega \times \hat e_i \quad \Rightarrow \quad d\hat e_i = \omega\, \underset{}{\overset{|\hat e_i|}{1}}\, \mathrm{sen}\theta\, dt\ \hat u$$

En resumen la velocidad de P en S se relaciona con la de S' por

$$\vec V = \vec V' + \vec\omega \times \vec r$$

y la aceleración

$$\vec a = \left(\frac{d\vec V}{dt}\right)_A = \frac{d}{dt}\left(\vec V' + \vec\omega\times\vec r\right)_A = \overbrace{\left(\frac{d\vec V'}{dt}\right)_R}^{\vec a'} + \vec\omega\times\vec V' + \overbrace{\frac{d}{dt}\left(\vec\omega\times\vec r\right)_A}^{\frac{d\vec\omega}{dt}\times\vec r + \vec\omega\times\left(\frac{d\vec r}{dt}\right)_A} = \vec a' + \vec\omega\times\vec V' + \dot{\vec\omega}\times\vec r + \vec\omega\times\Big[\overbrace{\left(\frac{d\vec r}{dt}\right)_R}^{\vec V'} + \vec\omega\times\vec r\Big]$$

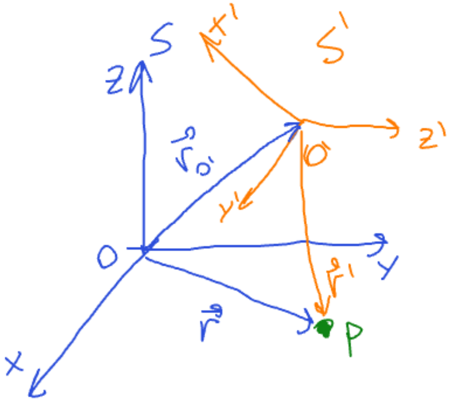
$$\Rightarrow \quad \vec a = \vec a' + \underbrace{2\vec\omega\times\vec V'}_{\vec a_c} + \underbrace{\dot{\vec\omega}\times r + \vec\omega\times[\vec\omega\times\vec r]}_{\vec a_T}$$ teorema de coriolis

aceleración de coriolis $\vec a_c$

$\vec a_T$ aceleración de transporte

Caso general

$\vec r = \vec r_{O'} + \vec r'$ ojo $\vec r \neq \vec r'$



Para la velocidad

$$\to \left(\frac{d\vec r}{dt}\right)_A = \left(\frac{d\vec r_{O'}}{dt}\right)_A + \left(\frac{d\vec r'}{dt}\right)_A = \vec v_{O'} + \underbrace{\vec\omega \times \vec r'}_{\vec v_x} + \vec v'$$

$$\left(\frac{d\vec r}{dt}\right)_A \downarrow \vec v \qquad \left(\frac{d\vec r_{O'}}{dt}\right)_A \downarrow \vec v_{O'} \qquad \left(\frac{d\vec r'}{dt}\right)_A \downarrow \left(\frac{d\vec r'}{dt}\right)_R + \vec\omega \times \vec r'$$

$$\left(\frac{d\vec r'}{dt}\right)_R \downarrow \vec v'$$

$$\vec v = \vec v_{O'} + \vec\omega \times \vec r' + \vec v'$$

Para la aceleración

igual que el caso 2

Para la aceleración

igual que el caso 2

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_A = \vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}_{O'} + \vec{\omega}\times\vec{r}\,' + \vec{v}\,'\right)_A = \vec{a}_{O'} + \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\,' + \vec{v}\,'\right) = \underbrace{\vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{r}\,']}_{\vec{a}_T} + \underbrace{2\vec{\omega}\times\vec{v}\,'}_{\vec{a}_c} + \vec{a}\,'$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{a}\,' + \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\omega}}\times\vec{r}\,' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}\,') + 2\vec{\omega}\times\vec{v}\,'}$$

Adición de velocidades angulares

Consideremos S, S' y S'' con mov. rel.

queremos la vel. ang. de S'' respecto de S

Adición de velocidades angulares

Consideremos S, S' y S'' con mov. rel.

queremos la vel. ang. de S'' respecto de S en términos de la vel. ang. de S' respecto de S y de S'' respecto de S'

$\Rightarrow$ Un vector en reposo en S'', $\vec{A}$

S' y S'' $\quad \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S'} = \cancel{\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S''}}^{\,0} + \vec{\omega}_{S''/S'} \times \vec{A} = \vec{\omega}_{S''/S'} \times \vec{A} \quad (*)$

S y S'' $\quad \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S} = \vec{\omega}_{S''/S} \times \vec{A}$

S y S' $\quad \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S} = \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega}_{S'/S} \times \vec{A} \overset{(*)}{=} \vec{\omega}_{S''/S'} \times \vec{A} + \vec{\omega}_{S'/S} \times \vec{A} = \vec{\omega}_{S''/S} \times \vec{A}$

S' y S'' $\quad \left(\dfrac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S'} = \cancelto{0}{\left(\dfrac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S''}} + \vec{\omega}_{S''/S'} \times \vec{A} = \vec{\omega}_{S''/S'} \times \vec{A} \quad (*)$

S y S'' $\quad \left(\dfrac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S} = \vec{\omega}_{S''/S} \times \vec{A}$

S y S' $\quad \left(\dfrac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S} = \left(\dfrac{d\vec{A}}{dt}\right)_{S'} + \vec{\omega}_{S'/S} \times \vec{A} \overset{(*)}{=} \vec{\omega}_{S''/S'} \times \vec{A} + \vec{\omega}_{S'/S} \times \vec{A} = \vec{\omega}_{S''/S} \times \vec{A}$

$\Rightarrow \vec{\omega}_{S''/S} \times \vec{A} = \left(\vec{\omega}_{S''/S'} + \vec{\omega}_{S'/S}\right) \times \vec{A}$ válido $\forall\, \vec{A}$ fijo en S''

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\omega}_{S''/S} = \vec{\omega}_{S''/S'} + \vec{\omega}_{S'/S}}$$

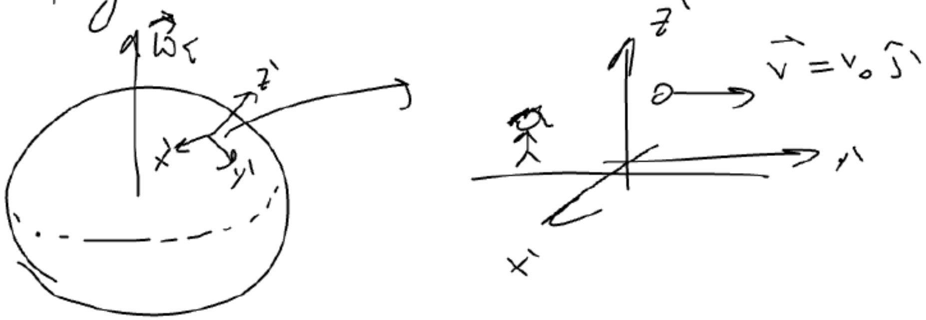
Teo. de adición de velocidades ang.

Ejemplo típico es el mov. resultante debido a la rotación terrestre

Ejemplo típico es el mov. resultante debido a la rotación terrestre.

En gral los efectos debido a la rot. terrestre, son dominantes respecto a la rot. alrededor del sol, etc. $\Rightarrow$ En consecuencia, podemos considerar que un sist. solidario a la tierra se encuentra en rotación pura respecto a un sist. de referencia inercial.

1) supongamos $\vec{\omega}_T = c^{te}\,\hat{k}$



debido a la rotación terrestre

$$\vec{a}\,' = \vec{a} - \vec{a}_T - \vec{a}_c$$

aceleración extra

terrestre

$$\vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_T - \vec{a}_c$$

aceleración extra

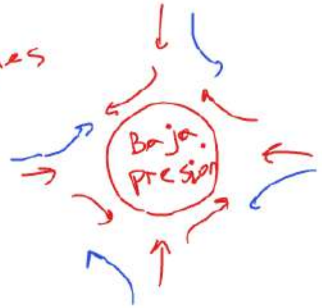
me centro en $\vec{a}_c$ $\qquad -2\vec{\omega}\times\vec{v}'$ extra

$\vec{a}'$ mide una aceleración exta

En el hemisf. norte $\vec{\omega}\cdot\hat{k}' > 0$ $\qquad -2(\underbrace{\vec{\omega}\cdot\hat{k}'}_{\omega_{z'}}\hat{k}' + \vec{\omega}\cdot\hat{j}'\hat{j}')\times v_0\hat{j}' = 2\omega_z' v_0\hat{i}'$

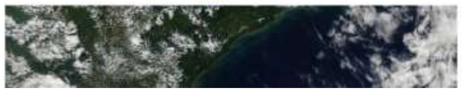
" " " sur $\vec{\omega}\cdot k' < 0$

>0 Norte $\qquad <0$ sur



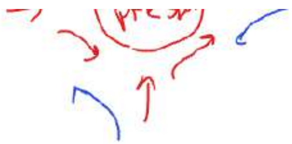
Esto tiene implicancias grandes en la formación de huracanes. El aire fluye hacia las zonas de bajas presiones (centro de la tormenta) y en un hemisferio rotara en sentido horario mientras que en el otro rotará en sentido antihorario

Sur



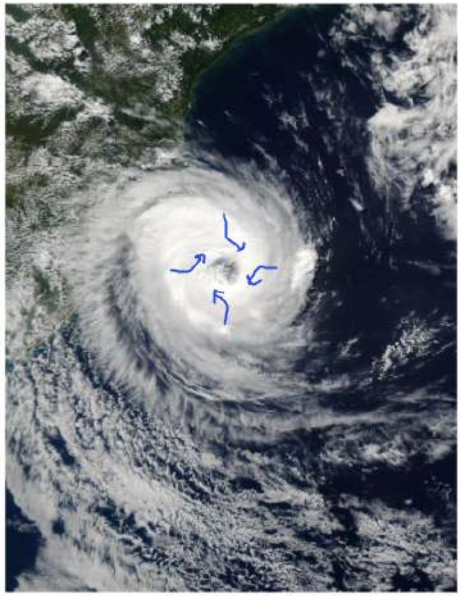
Norte

Norte
sur



de huracanes. El aire fluye hacia las zonas de
bajas presiones (centro de la tormenta) y en
un hemisferio rotara en sentido horario mientras
que en el otro rotará en sentido antihorario

sur



Norte