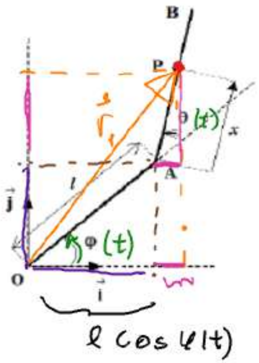
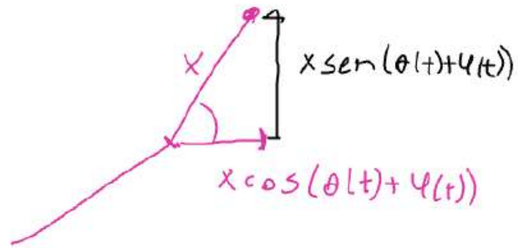
CLASE 4

10. Consideremos la configuración de las barras que se muestra en la Figura. Una barra OA, de longitud l, gira en torno a uno de sus extremos (O), que se encuentra fijo, de manera que siempre está contenida en el mismo plano. El ángulo que forma con el eje $O\hat{\imath}$ es $\varphi(t)$. La segunda barra AB está unida a ella en el punto A y gira respecto a este punto. El ángulo entre ella y la barra OA es $\theta(t)$ y ambas barras siempre se encuentran contenidas en el mismo plano. Una partícula P se mueve sobre la barra AB, siendo $x(t)$ su distancia al punto A. Dar expresiones para la velocidad y la ~~aceleración absoluta~~ del sistema por los siguientes métodos:





a. Escribiendo genéricamente el vector $\vec{r}_P$, posición del punto P, considerando O como origen de coordenadas y derivándolo directamente.

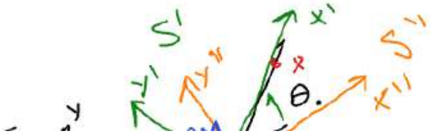
b. Utilizando el teorema de Roverbal y Coriolis para las expresiones de la velocidad y la aceleración absoluta de una partícula, en función de sus expresiones relativas a sistemas en movimiento, convenientemente elegidos.

velocidad

a) $\vec{r}_P = [l\cos\varphi + x\cos(\varphi+\theta)]\hat{i} + [l\,\mathrm{sen}\varphi + x\,\mathrm{sen}(\theta+\varphi)]\hat{j}$

$\vec{v}_P = \frac{d\vec{r}_P}{dt} = -[l\,\mathrm{sen}\varphi \cdot \dot{\varphi} + x\,\mathrm{sen}(\varphi+\theta)(\dot{\varphi}+\dot{\theta}) - \dot{x}\cos(\theta+\varphi)]\hat{i} + [l\cos\varphi \cdot \dot{\varphi} + x\cos(\theta+\varphi)(\dot{\varphi}+\dot{\theta}) + \dot{x}\,\mathrm{sen}(\theta+\varphi)]\hat{j}$

b) velocidad



$\vec{\omega}_{S'} = \vec{\omega}_{S'} + \vec{\omega}_{S''} = \dot{\theta}\hat{k} + \dot{\varphi}\hat{k}$

$\ldots x\,\mathrm{sen}(\varphi+\theta)(\dot\varphi+\dot\theta) - \dot x \cos(\theta+\varphi)]\,\hat\imath + [\dot x\cos\varphi\,.\,\dot\varphi + x\cos(\theta+\varphi)(\dot\varphi+\dot\theta) + \dot x\,\mathrm{sen}(\theta+\varphi)]\,\hat\jmath$

b) velocidad

$$\vec V = \vec V' + \vec V_T$$

$$\vec V_T = \vec V_{O'} + \vec\omega \times \vec r'$$

$$\vec r' = x\,\hat\imath'$$

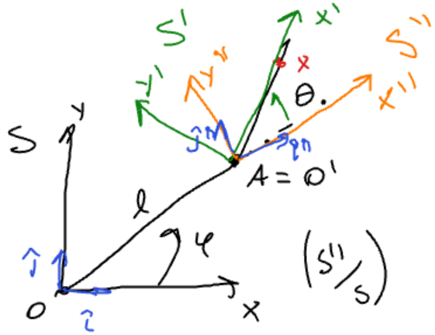
$$\vec r_{O'} = l\cos\varphi\,\hat\imath + l\,\mathrm{sen}\varphi\,\hat\jmath$$

$$\vec V_{O'} = -l\,\mathrm{sen}\varphi\,\dot\varphi\,\hat\imath + l\cos\varphi\,\dot\varphi\,\hat\jmath$$

$$\vec V' = \dot x\,\hat\imath'$$

$$\vec\omega \times \vec r' = (\dot\theta+\dot\varphi)\hat k \times x\,\hat\imath' = x(\dot\theta+\dot\varphi)\,\hat\jmath' = x(\dot\theta+\dot\varphi)\,\hat\jmath'$$

$$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp \mathrm{sen}(a)\,\mathrm{sen}(b)$$



$$\vec\omega_{S'/S} = \vec\omega_{S'/S''} + \vec\omega_{S''/S} = \dot\theta\,\hat k + \dot\phi\,\hat k = (\dot\theta+\dot\phi)\,\hat k$$

(S''/S)

$$\hat e'_1 = \hat e_\rho = \hat\imath''$$
$$\hat e'_2 = \hat e_\phi = \hat\jmath''$$
$$\hat e'_3 = \hat k$$

$$\left(\frac{d\hat e_\rho}{dt}\right) = \frac{d\hat e'_1}{dt} = \vec\omega \times \hat e'_1 = \dot\phi\,\hat e_\phi \qquad \omega_3 = \dot\phi$$

$$= \underbrace{a_{12}}_{\omega_3}\hat e'_2 + \cancel{a_{13}}\,\hat e'_3 \rightarrow -\omega_2 = 0$$

$$\vec\omega = \dot\phi\,\hat k$$

$$\left(\frac{d\hat e_\varphi}{dt}\right) = \frac{d\hat e'_2}{dt} = \vec\omega \times \hat e'_2 = -\dot\phi\,\hat e_\rho$$

$$= \underbrace{a_{21}}_{-\omega_3}\hat e'_1 + \underbrace{\cancel{a_{23}}}_{\omega_1}\hat e'_3 \Rightarrow \omega_1 = 0$$

$$\hat\jmath' = -\mathrm{sen}\theta\,\hat\imath'' + \cos\theta\,\hat\jmath''$$

$$\hat\imath'' = \cos\varphi\,\hat\imath + \mathrm{sen}\varphi\,\hat\jmath$$

$$\hat\jmath' = -\mathrm{sen}\theta\cos\varphi\,\hat\imath - \mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\varphi\,\hat\jmath + \cos\theta(-\mathrm{sen}\varphi)\hat\imath + \cos\theta\cos\varphi\,\hat\jmath$$

$\mathrm{sen}(\theta+\varphi)$

$\vec{V}_{0'} = -l\,sen\varphi\,\dot{\varphi}\,\hat{i} + l\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\hat{j}$

$\vec{V}' = \dot{x}\,\hat{i}'$

$\vec{\omega} \times \vec{v}' = (\dot{\theta}+\dot{\varphi})\hat{k} \times x\,\hat{i}'$

$= x(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\,\hat{j}' = x(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\,\hat{j}'$

$\cos(a \pm b) = \cos(a)\cos(b) \mp sen(a)\,sen(b)$

$sen(a \pm b) = sen(a)\cos(b) \pm \cos(a)\,sen(b)$

$$\frac{d\hat{e}_1'}{dt} = a_{12}\,\hat{e}_2' + \cancel{a_{13}}\,\hat{e}_3' \quad a_{12} = \omega_3, \; a_{13} \to -\omega_2 = 0$$

$$\vec{\omega} = \dot{\phi}\,\hat{k}$$

$$\left(\frac{d\hat{e}_2}{dt}\right) = \frac{d\hat{e}_2'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{e}_2' = -\dot{\phi}\,\hat{e}_\rho$$

$$= \underbrace{a_{21}}_{-\omega_3}\,\hat{e}_1' + \underbrace{\cancel{a_{23}}}_{\omega_1}\,\hat{e}_3' \Rightarrow \omega_1 = 0$$

$\hat{j}' = -sen\theta\,\hat{i}'' + \cos\theta\,\hat{j}''$

$\hat{i}'' = \cos\varphi\,\hat{i} + sen\varphi\,\hat{j}$

$\hat{j}'' = -sen\varphi\,\hat{i} + \cos\varphi\,\hat{j}$

$\hat{j}' = -sen\theta\cos\varphi\,\hat{i} - sen\theta\,sen\varphi\,\hat{j}$

$+\cos\theta\,(-sen\varphi)\,\hat{i} + \cos\theta\cos\varphi\,\hat{j}$

$= -\overbrace{(sen\theta\cos\varphi + sen\varphi\cos\theta)}^{sen(\theta+\varphi)}\,\hat{i}$

$+\underbrace{(\cos\theta\cos\varphi - sen\theta\,sen\varphi)}_{\cos(\theta+\varphi)}\,\hat{j}$

$\vec{V}_p = \dot{x}\,\hat{i}' + -l\dot{\varphi}\,sen\varphi\,\hat{i} + l\cos\varphi\,\dot{\varphi}\,\hat{j} + x(\dot{\theta}+\dot{\varphi})\,[-sen(\theta+\varphi)\,\hat{i} + \cos(\theta+\varphi)\,\hat{j}]$

falta expresar $\hat{i}' = A\,\hat{i} + B\,\hat{j}$

Dinámica de la partícula

Dinámica de la partícula

Ahora nos va a interesar qué es lo que causa el movimiento.

El objeto de la dinámica es poder determinar el movimiento de una partícula a partir de sus prop. (masa, carga, etc), su estado de movimiento y sus interacciones con el entorno.

El caso más simple es un cuerpo en ausencia de interacciones.
Galileo observó que si retiraba las resistencias al mov. progresivamente
⇒ los cuerpos demoran cada vez más en detenerse ⇒ extrapoló
"En ausencia de fuerzas e influencias externas el cuerpo/partícula

"En ausencia de fuerzas o influencias externas", el cuerpo/partícula, se desplazará indefinidamente a velocidad constante"

Leyes de Newton

Ley Primera

Todo cuerpo persevera en su estado de reposo o movimiento uniforme y rectilíneo a no ser en tanto que sea obligado por fuerzas impresas a cambiar su estado.

Ley II

El cambio de movimiento es proporcional a la fuerza motriz impresa y ocurre según la línea recta a lo largo de la cual aquella fuerza se imprime.

$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ $\vec{P} = m\vec{v}$

Ley III

Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: O sea, las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en direcciones opuestas.

Con toda acción ocurre siempre una reacción igual y contraria: O sea, las acciones mutuas de dos cuerpos siempre son iguales y dirigidas en direcciones opuestas.

Sist de ref. inerciales

Los sistemas de ref. en que sea válida la primera ley se denominan sist. de ref inerciales

Comentario: No existen los sist de ref inerciales, sólo una idealización donde se desprecian efectos pequeños de acuerdo a la situación de interés

Ejemplo: Para describir el mov. proyectil de una piedra que tiremos, podemos, a todos los efectos prácticos, considerar a la tierra como un sistema inercial.

Fuerza: Se define la fuerza en términos de la aceleración podemos, a todos los efectos prácticos, considerar a la tierra como un sistema inercial.

Fuerza: Se define la fuerza en términos de la aceleración causante sobre un objeto patrón.

Si una fuerza produce una aceleración $\alpha\ m/s^2$ sobre el kg patrón $\Rightarrow$ decimos que la fuerza tiene una magnitud de α N. ← Newtons

Además debido a que la aceleración es un vector, podemos asignarle una dirección y sentido a la fuerza (la de la aceleración).

Experimentalmente se observa que las fuerzas cumplen el principio de superposición. Es decir, dadas dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ conocidas el efecto resultante de aplicar ambas a la vez es igual al efecto resultante de aplicar una fuerza igual a la suma vectorial $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Masa inercial

aplicar una fuerza igual a la suma vectorial $\vec{F}_1+\vec{F}_2$.

Masa inercial

Con esto podemos definir la masa inercial de los cuerpos.

Sea m_0 una masa patrón. Al actuar F (conocida) sobre m_0 se observa una aceleración a_0 (en magnitud).

Si se cambia m_0 por m_1 (una masa/objeto no de ref) y aplico la misma fuerza $\Rightarrow m_0 a_0 = m_1 a_1 \Rightarrow \frac{m_1}{m_0} = \frac{a_0}{a_1}$

$\Rightarrow$ defino la masa inercial m_1 en términos de m_0 y las aceleraciones producidas por una misma fuerza.

Tipos de Fuerza

Constante de Gravitación universal

$m_1(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$

→ Defino la masa inercial m_1 en términos de m_0 y las aceleraciones producidas por una misma fuerza.

Tipos de Fuerza

Constante de Gravitación universal

Fundamentales

- Gravitatoria → $\vec{F}_{2/1} = - \frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$
- Electromagnética → $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ $\left(\vec{F}_{Coulomb\,2/1} = + \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \right)$
- Nuclear fuerte → Mantiene ligados los nucleos
- Nuclear Debil → Interviene en decaimientos radioactivos

Fuerzas de contacto, rozamientos, etc — Son, a nivel fund., de esos tipos.

Fuerzas de rozamiento cuerpo entre ... | Fuerza de resorte

Son, a nivel fund., de esos tipos.

Fuerzas de contacto, rozamientos, etc

Fuerzas de rozamiento, fuerza entre sup de contacto

si no hay mov. relativo $|\vec{F}_{roz\ est.}| \leq \mu_{est.}|\vec{N}|$

si hay mov relativo $|\vec{F}_{roz\ cin}| = \mu_{cin}|\vec{N}|$

Se observa $\mu_{cin} \lesssim \mu_{est.}$

la dirección y sentido es para oponerse al mov. relativo

Fuerza de resorte

Algunos sist. se comportan siguiendo la Ley de Hooke.

Es decir, la fuerza a la que se someten al estar estirados o comprim. es propoporcional al estiramiento

$|F| = k|\Delta x|$