CLASE 5

Masa gravitatoria y masa inercial

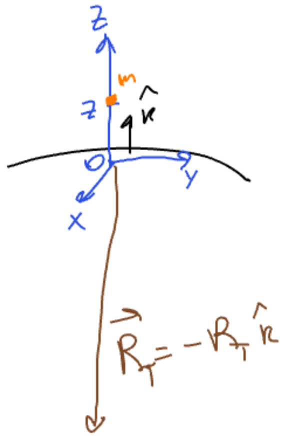
La ley de gravitación universal

$$\vec{F}_{1/2} = - \frac{G\, m_1^* m_2^* \,(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

es proporcional a una prop. de las partículas que llamamos masas gravitatorias m_1^*, m_2^*

Por otro lado la 2^a ley de Newton dice que $m\vec{a} = \vec{F}_{neta}$ donde m es la masa inercial de las partículas.

Sobre la sup. de la tierra, un cuerpo que cae producto de la atracción grav. con la tierra, lo hace con una aceleración de 9,8 m/s². Es decir.



$$m\vec{a} = m\vec{g} = -mg\hat{k} \quad \text{con } g = 9,8 \ m/s^2 .$$

$$\Rightarrow \quad m\vec{g} = -mg\hat{k} = -\frac{G M_T^* m^*}{(R_T+z)^3}\left(z\hat{k} - (-R_T\hat{k})\right) = -\frac{G M_T^* m^*}{(R_T+z)^2}\hat{k} \approx -\frac{G M_T^* m^*}{R_T^2}$$

$$\frac{m}{m^*} = \frac{G M_T^*}{R_T^2\, g} = \text{Cte}$$

podemos elegir $\frac{m}{m^*} = 1$ si

tomamos $G = 6,67 \ 10^{-11} \ \frac{N\, m^2}{Kg^2}$

2ª ley de Newton como ley determinista

En gral. las fuerzas que nos encontramos tienen la forma $\vec{F}(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t)$ dando lugar a una ecuación de Newton

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t)$$

En muchos casos, conocer $\vec{r}(t_0)$ y $\vec{v}(t_0)$ nos permite, junto a la segunda ley de Newton, determinar el movimiento futuro. Es decir, hallar la ley horaria.

Existen muchos métodos de integración numérica de ecuaciones diferenciales. Otras veces, las ecuaciones pueden ser resueltas exactamente.

Veamos algunos casos:

Fuerzas dependientes del tiempo

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(t) = F_x(t)\,\hat{\imath} + F_y(t)\,\hat{\jmath} + F_z(t)\,\hat{k}$$

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x(t) \\ m\ddot{y} &= F_y(t) \\ m\ddot{z} &= F_z(t) \end{aligned}\right\} \text{Ecuaciones de movimiento}$$

$$\Rightarrow \quad m\frac{d\dot{x}}{dt} = m\frac{dv_x}{dt} = F_x \Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = \frac{F_x}{m}$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\int_{t_0}^{t}\frac{dv_x}{dt'}dt'}_{v_x(t)-v_x(t_0)} = \int_{t_0}^{t}\frac{F_x}{m}dt' \Bigg\} \Rightarrow v_x(t) = v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t}\frac{F_x(t')dt'}{m}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = v_x(t) \Rightarrow x(t)-x(t_0) = \int_{t_0}^{t}\frac{dx}{dt'}dt' = \int_{t_0}^{t}v_x(t_0) + \int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{t'}\frac{F_x(t'')}{m}dt''\right]dt'$$

Ejemplo

Consideremos electrones libres moviendose en un campo electrico variable en el tiempo (por ejemplo, al pasar una onda EM) de la forma $\vec{E} = E_0\cos(\omega t+\delta)\hat{k}$.

Sabemos que inicialmente el electrón está en reposo en una posición $\vec{r}_0$.

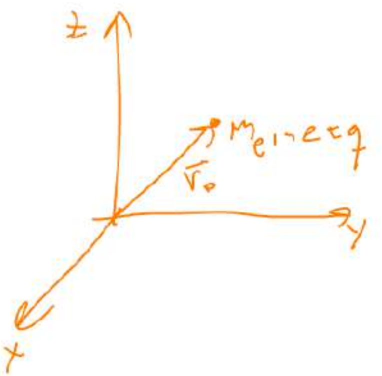
Hallar y resolver las ec. de movimiento

$\vec{r}_0 = x\hat{i} + y\hat{j} + \ldots$

Sabemos que inicialmente el electrón está en reposo en una posición $\vec{r}_0$.

Hallar y resolver las ec. de movimiento

$t_0 = 0$



$$\vec{F} = q\vec{E} = -e\vec{E} = q\,E_0 \cos(\omega t + \delta)\,\hat{k}$$

$$\vec{r}_0 = x_0\hat{i} + y_0\hat{j} + z_0\hat{k}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = -e E_0 \cos(\omega t + \delta)\,\hat{k}$$

$$m\ddot{x} = 0 \longrightarrow v_x(t) = v_x(t_0) = 0 \longrightarrow x(t) = x(t_0) = x_0$$

$$m\ddot{y} = 0 \longrightarrow v_y(t) = v_y(t_0) = 0 \longrightarrow y(t) = y(t_0) = y_0$$

$$m\ddot{z} = -e E_0 \cos(\omega t + \delta)$$

$$v_z(t) = \dot{z}(t) = \cancel{\dot{z}(t_0)}^{\,0} + \int_{t_0}^{t} -\frac{eE_0}{m}\cos(\omega t' + \delta)\,dt' = -\frac{eE_0}{m\omega}\left[\operatorname{sen}(\omega t + \delta) - \operatorname{sen}(\omega t_0 + \delta)\right]$$

$$z(t) = z(t_0) + \int_{t_0}^{t} \cancel{v_z(t_0)}^{\,0}\,dt' + \int_{t_0}^{t}\left[\int_{t_0}^{t'} -\frac{eE_0}{m}\cos(\omega t'' + \delta)\,dt''\right]dt'$$

$$= z_0 - \int_{t_0}^{t} \frac{eE_0}{m\omega}\left[\operatorname{sen}(\omega t' + \delta) - \operatorname{sen}(\omega t_0 + \delta)\right]dt' = z_0 + \frac{eE_0}{m\omega^2}\left[\cos(\omega t + \delta) - \cos(\omega t_0 + \delta)\right]$$

$$+ \frac{eE_0}{m\omega}\operatorname{sen}(\omega t_0 + \delta)(t - t_0)$$

$$z(t) = z_0 - \frac{eE_0}{m\omega^2}\cos(\delta) + \frac{eE_0}{m\omega}\operatorname{sen}(\delta)(t - t_0) + \frac{eE_0}{m\omega^2}\cos(\omega t + \delta)$$

$$z(t) = z_0 - \frac{eE_0}{m\omega^2}\cos(\delta) + \frac{eE_0}{m\omega}\operatorname{sen}(\delta)(t-t_0) + \frac{eE_0}{m\omega^2}\cos(\omega t+\delta)$$

$$+\frac{eE_0}{m\omega}\operatorname{sen}(\omega t_0+\delta)(t-t_0)$$

Fuerza dependiente de la velocidad

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\dot{\vec{r}})$$

$$m\dot{\vec{v}} = \vec{F}(\vec{v})$$

Las fuerzas dep. de la velocidad son, típicamente, fuerzas de resistencia, viscosas, y por lo tanto son en la dirección de la velocidad: $\vec{F}(\vec{v}) = -R(v)\frac{\vec{v}}{|v|}$ $\hat{v}$

$\Rightarrow$ separemos el mov. en la dirección del mov. y direcciones perp.

La función $R(v)$ es (o suele ser) compleja y para su determinación se suelen hacer ensayos aerodinámicos o símil.

$$\Rightarrow \quad m\frac{dv}{dt} = -R(v) \qquad \frac{dv}{dt}\cdot\frac{1}{R(v)} = -\frac{1}{m} \Big| \Rightarrow \frac{dv}{\ldots}\frac{d\tilde{r}}{\ldots} = -\frac{1}{\ldots} \Rightarrow \int^{t}\frac{dv}{\ldots}\frac{d\tilde{r}}{\ldots}dt' = -\int^{t}\frac{1}{\ldots}dt' = -\frac{t-t_0}{\ldots}$$

$\Rightarrow \quad m\frac{dv}{dt} = -R(v)$ $\qquad \frac{dv}{dt}\cdot\frac{1}{R(v)} = -\frac{1}{m}$ $\Big\} \Rightarrow \frac{dv}{dt}\frac{d\tilde{\mathcal{F}}}{dv} = -\frac{1}{m} \Rightarrow \int_{t_0}^{t}\frac{dv}{dt'}\frac{d\tilde{\mathcal{F}}}{dv}dt' = -\int_{t_0}^{t}\frac{1}{m}dt' = -\frac{t-t_0}{m}$

sea $\tilde{\mathcal{F}}(v) \,/\, \frac{d\tilde{\mathcal{F}}}{dv} = \frac{1}{R(v)}$

$\tilde{\mathcal{F}}(v(t)) \Rightarrow d\tilde{\mathcal{F}} = \frac{d\tilde{\mathcal{F}}}{dv}\frac{dv}{dt}dt$ $\qquad \int_{\tilde{\mathcal{F}}(v(t_0))}^{\tilde{\mathcal{F}}(v(t))} d\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{F}}(v(t)) - \tilde{\mathcal{F}}(v(t_0))$

luego, habría que invertir $\tilde{\mathcal{F}}(v)$ para hallar la velocidad $v(t)$.

Ya luego es $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t')dt'$ como antes. (donde x es la coord en la dirección de $\hat{v}$)

Ejemplo: movimiento por fuerza de arrastre

En mecánica de fluidos, cuando un objeto se mueve a través del fluido, experimenta una fuerza de arrastre, típicamente dada por $\vec{F}_A = -\frac{1}{2}\rho v^2 C_D A \hat{v}$

A → Área perp. a la velocidad

C_D → coeficiente de arrastre

ρ → densidad del fluido

Ecuación asociada a Lord Rayleigh.

Podemos resumirlo como $m\dot{v} = -bv^2 \rightarrow R(v) = bv^2 \Rightarrow \frac{d\tilde{\mathcal{F}}(v)}{dv} = \frac{1}{bv^2} \Rightarrow \tilde{\mathcal{F}}(v) = -\frac{1}{bv} + cte$

$\tilde{\mathcal{F}}(v)$ $\quad \tilde{\mathcal{F}}(v_0)$

Ejemplo: movimiento por

En mecánica de fluidos, cuando un objeto se mueve a través del fluido, experimenta una fuerza de arrastre, típicamente dada por $\vec{F}_A = -\frac{1}{2}\rho v^2 C_D A \hat{v}$

- A: Área perp. a la velocidad
- C_D: Coeficiente de arrastre
- ρ: densidad del fluido

Ecuación asociada a Lord Rayleigh.

Podemos resumirlo como $m\dot{v} = -bv^2 \rightarrow R(v) = bv^2 \Rightarrow \frac{d\tilde{\mathcal{F}}(v)}{dv} = \frac{1}{bv^2} \Rightarrow \tilde{\mathcal{F}}(v) = -\frac{1}{bv} + cte$

$$\Rightarrow \overset{\tilde{\mathcal{F}}(v)}{-\frac{1}{bv}} - \overset{\tilde{\mathcal{F}}(v_0)}{\left(-\frac{1}{bv_0}\right)} = -\frac{t-t_0}{m} \Rightarrow v = \left(\frac{b(t-t_0)}{m} + \frac{1}{v_0}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{b(t-t_0)}{m} + \frac{1}{v_0}}$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{mv_0}{v_0 b(t-t_0) + m} \rightarrow v(t_0)$$

Fuerza dependiente de la posición

Caso unidimensional

Fuerza dependiente de la posición

Caso unidimensional

$m\ddot{x} = F(x)$

multipliquemos por $\dot{x}$ $\Rightarrow$ $m\ddot{x}\dot{x} = F(x)\dot{x}$

$$m\dot{x}\frac{d\dot{x}}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2}\right)$$

¿qué pasa si $F(x)$ es tal que $F(x) = -\frac{dU}{dx}$?

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2}\right) = -\frac{dU}{dx}\frac{dx}{dt} = -\frac{d}{dt}(U) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}^2}{2} + U\right) = 0$$

llamemosle $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U \Rightarrow \frac{dE}{dt} = 0$

$$\Rightarrow \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = \frac{m\dot{x}_0^2}{2} + U(x_0) = E_0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{E_0 - U(x)}\,\sqrt{\frac{2}{m}} \Rightarrow \int_{t_0}^{t} \frac{\frac{dx}{dt'}\,dt'}{\sqrt{E_0 - U(x)}} = \pm\int_{t_0}^{t} \sqrt{\frac{2}{m}}\,dt' \Bigg\} \Rightarrow \pm\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{E_0 - U(x')}}$$

$$\pm\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{E_0 - U(x')}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\,(t - t_0)$$

En gral. podemos hacer

$$m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}} \qquad \text{y si } \vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(\vec{r})$$

$$\Rightarrow \quad m\,\frac{d\dot{\vec{r}}}{dt} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{\vec{r}}^{\,2}}{2}\right) = -\nabla U(\vec{r}) \cdot \dot{\vec{r}}$$

$$= -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right) = -\frac{dU(\vec{r})}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{\vec{r}}^{\,2}}{2} + U(\vec{r})\right) = 0$$