CLASE 6

Ejemplo de fuerza dependiente de la posición

$$\frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E_0 - U(x)} \qquad U(x) \,/\, -\frac{dU}{dx} = F(x)$$

$$\hookrightarrow \pm\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{E_0 - U(x')}} = \sqrt{\frac{2}{m}}\,(t-t_0) \qquad E_0 = \frac{m\dot{x}_0^2}{2} + U(x_0) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x)$$

Oscilador armónico

$$U(x) = kx^2 \rightarrow \sqrt{\frac{2}{m}}\,(t-t_0) = \pm\int^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{E - kx'^2}} = \frac{1}{\sqrt{E}}\int^{x} \frac{dx'}{\sqrt{1 - kx'^2}}$$

Oscilador armónico

$$F(x) = -kx \longrightarrow U(x) = \frac{kx^2}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{m}}\,(t-t_0) = \pm\int_{x(t_0)}^{x(t)} \frac{dx'}{\sqrt{E_0 - \frac{kx'^2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{E_0}}\int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{\sqrt{1-\frac{kx'^2}{2E_0}}}$$

$$\sqrt{\frac{2}{m}}(t-t_0) = \frac{1}{\sqrt{E_0}}\int_{\theta(x_0)}^{\theta(x)} \sqrt{\frac{2E_0}{k}}\,\frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta}} = \sqrt{\frac{2}{k}}\int_{\theta(x_0)}^{\theta(x)} \frac{\cos\theta}{\cos\theta}\,d\theta = \sqrt{\frac{2}{k}}\left[\theta(x) - \theta(x_0)\right]$$

$$\sqrt{\frac{2E_0}{k}}\operatorname{sen}\theta = x \qquad dx = \sqrt{\frac{2E_0}{k}}\cos\theta\, d\theta$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{k}{2E_0}}\,x$$

Esta bien definido porque

$$E_0 - \frac{kx^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} \geq 0$$

$$\Rightarrow x \leq \sqrt{\frac{2E_0}{k}}$$

$$\theta(x) = \operatorname{arcsen}\left(x\sqrt{\frac{k}{2E_0}}\right)$$

$$\theta(x_0) = \operatorname{arcsen}\left(x_0\sqrt{\frac{k}{2E_0}}\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt{\frac{k}{m}}}_{\omega}(t-t_0) + \theta(x_0) = \theta(x)$$

$$\boxed{x = \sqrt{\frac{2E_0}{k}}\operatorname{sen}\left(\omega(t-t_0) + \theta(x_0)\right)}$$

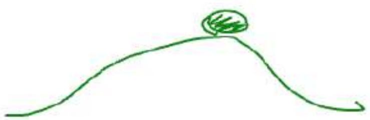
Equilibrios y Oscilaciones

En la naturaleza observamos a los sistemas, gralmente, en posiciones de equilibrio estables ya que los sistemas fluyen naturalmente hacia allí

Nunca, o raramente, vamos a encontrar una pelota en una punta de una montaña, sino más bien en pozos.

✓ Probable

✗ improbable



En gral. cuando vamos a estudiar algún sistema complejo, el primer paso es modelarlo. Es decir, escribir las ecuaciones que regulan su evolución.

$$\dot{\vec{\eta}} = \vec{F}(\vec{\eta}, \vec{\alpha})$$

variables   parametros

Dicha evolución suele ser difícil de resolver exactamente, $\Rightarrow$ el 2º paso es hallar los equilibrio o puntos fijos (P.F.) $\vec{\eta}^*$

es decir $$\dot{\vec{\eta}}\Big|_{\vec{\eta}=\vec{\eta}^*} = \vec{F}(\vec{\eta}^*, \vec{\alpha}) = 0 = \vec{F}(\vec{\eta}^*) \qquad \left(\begin{array}{c}\text{cond.}\\ \text{de P.F.}\end{array}\right)$$

El 3^{er} paso es estudiar como se comporta el sistema cerca de los equilibrios o P.F.

El 3^er paso es estudiar como se comporta el sistema cerca de los equilibrios o p.f.

$\vec{\eta} - \vec{\eta}^* = \delta\vec{\eta}$

$$\vec{\eta} = \vec{\eta}^* + \delta\vec{\eta} \quad \Rightarrow \dot{\vec{\eta}} = (\vec{\eta}^* + \delta\vec{\eta})^{\cdot} = \dot{\delta\vec{\eta}} = \vec{F}(\vec{\eta}^* + \delta\vec{\eta}) \approx \underbrace{\vec{F}(\vec{\eta}^*)}_{\to 0 \ (\text{P.f.})} + \sum_{i,j} \frac{\partial F_i}{\partial \eta_j}\delta\eta_j \hat{e}_i + \sum_{i,j,k} \frac{\partial F_i}{\partial \eta_j \partial \eta_k} \frac{\delta\eta_j \delta\eta_k}{2} \vec{e}_i + \ldots$$

$$\frac{|\delta\vec{\eta}|}{|\vec{\eta}^*|} << 1 \qquad \frac{d}{dt}\vec{\eta}^* = 0$$

Si $\frac{|\delta\vec{\eta}|}{|\vec{\eta}^*|} << 1 \Rightarrow$ puedo despreciar, al menos al principio, los órdenes más allá del lineal $(\delta\eta_i^n \to 0 \quad n \geq 2)$

$$\dot{\delta\vec{\eta}} \approx \nabla_\eta \vec{F}\Big|_{\eta = \eta^*} \cdot \delta\vec{\eta} \qquad (\nabla_\eta \vec{F})_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial \eta_j} = M_{ij}$$

En los equilibrios estables los autovalores de M son ≤ 0

$\frac{\quad}{|\vec{\eta}^*|} << 1 \to$

los órdenes más allá del lineal $\left(\delta\eta_i^n \to 0 \quad n \geq 2 \right)$

$$\delta\dot{\vec{\eta}} \approx \nabla_\eta \vec{F}\Big|_{\vec{\eta}=\vec{\eta}^*} \cdot \delta\vec{\eta} \qquad \left(\nabla_\eta \vec{F}\right)_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial \eta_j} = M_{ij}$$

En los equilibrios estables los autovalores (valores propios) de M son ≤ 0

$$\underbrace{\Delta \delta\vec{\eta}_{n+1}}_{\delta\vec{\eta}_{n+1} - \delta\vec{\eta}_n} \approx (M \Delta t)\, \delta\vec{\eta}_n$$

<u>En mecánica</u>

En mecánica

$m\ddot{x} = f(x,\dot{x})$ el equilibrio es cuando $f(x_{eq},0) = 0$

ya que $m\ddot{x}\Big|_{\substack{x=x_{eq}\\ \dot{x}=0}} = 0$

$\dot{x} = v$

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= v \\ \dot{v} &= \frac{f(x,v)}{m} \end{aligned}\right\} \quad \dot{\vec{\eta}} = f(\vec{\eta})$$

⇒ esta es la misma sit. de antes

$x = x_{eq} + \delta x \qquad v = \delta v$

$$\left.\begin{aligned} m\dot{v} &= f(x_{eq}+\delta x, \delta v) = m\,\dot{\delta v} \\ \dot{\delta x} &= \delta v \end{aligned}\right\} \quad \frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\delta x \\ \delta v\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} \delta v \\ \underbrace{f(x_{eq},0)}_{0} + \overbrace{\frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x_{eq}\\ v=0}}}^{-k} \delta x + \overbrace{\frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial v}\Big|_{\substack{x_{eq}\\ v=0}}}^{-b} \delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta x \\ \delta v\end{pmatrix}$$

$m\dot{v} = f(x_{eq}+\delta x, \delta v) = m\,\dot{\delta v}$

$\dot{\delta x} = \delta v$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\delta x\\ \delta v\end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} \\ \cancel{f(x_{eq},0)} + \overbrace{\frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{\substack{x_{eq}\\ v=0}}}^{-k}\delta x + \overbrace{\frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial v}\Big|_{\substack{x_{eq}\\ v=0}}}^{-b}\delta v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\delta x\\ \delta v\end{pmatrix}$$

$f(x_{eq},0) \to 0$ (cond de p.f.)

Las ec. dif. lineales tienen sol. exp.

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = A\vec{V}$$

$\hookrightarrow \vec{V} = \vec{V}_{o1}e^{\lambda_1 t} + \vec{V}_{o2}e^{\lambda_2 t}$

vect. propio

valor propio

$$\lambda_1\vec{V}_{o1}e^{\lambda_1 t} + \lambda_2\vec{V}_{o2}e^{\lambda_2 t} = \underbrace{A\vec{V}_{o1}}_{\lambda_1\vec{V}_{o1}}e^{\lambda_1 t} + \underbrace{A\vec{V}_{o2}}_{\lambda_2\vec{V}_{o2}}e^{\lambda_2 t}$$

$$\det(M - \lambda I_d) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m}-\lambda\end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda\,\mathrm{Tr}(M) + \Delta(M)$$
$$= \lambda^2 - \lambda\left(-\frac{b}{m}\right) + \frac{k}{m}$$

$$\lambda_\pm = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}$$

$\frac{k}{m} \equiv \omega_0^2$

$$\begin{pmatrix}\delta x\\ \delta v\end{pmatrix} = \alpha\vec{V}_{o+}e^{-\frac{b}{2m}t + \sqrt{\frac{b}{2m} - \omega_0^2}\,t} + \beta\vec{V}_{o-}e^{-\frac{b}{2m}t - \sqrt{\frac{b}{2m} - \omega_0^2}\,t}$$

Cuando no hay disip. $\frac{k}{m}$ es ω^2.

$$\begin{pmatrix}\delta x\\ \delta v\end{pmatrix} = \alpha \vec{v}_{0_+} e^{-\frac{b}{2m}t + \sqrt{\frac{b}{2m} - \omega_0^2}\, t} + \beta \vec{v}_{0_-} e^{-\frac{b t}{2m} - \sqrt{\frac{b}{2m} - \omega_0^2}\, t}$$

Cuando no hay disip. $\frac{K}{m}$ es ω^2.

En gral. llegado a $\ddot{\delta x} = -\frac{K}{m}\delta x - \frac{b}{m}\dot{\delta x}$

Vamos a escribir $\delta x = A e^{\lambda t}$

$$\Rightarrow \lambda^2 \cancel{A e^{\lambda t}} = -\frac{K}{m}\cancel{A e^{\lambda t}} - \frac{b}{m}\lambda \cancel{A e^{\lambda t}}$$

$$\lambda^2 + \frac{K}{m} + \frac{b}{m}\lambda = 0$$

$$\delta x = A e^{\lambda_+ t} + B e^{\lambda_- t} = e^{-\frac{b}{2m}t}\left(A e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t} + B e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t}\right) = |A| e^{-\frac{b}{2m}t} \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t + \delta\right)$$

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

Sistemas vinculados.

Sistemas vinculados.

Muchas veces, en las situaciones de interés, suelen estar presentes ciertos vínculos o ligaduras que deben ser satisfechas.
p.ej el carrito de la montaña rusa tiene que moverse sobre la vía o un bloque apoyado en una mesa debe moverse sobre ésta.

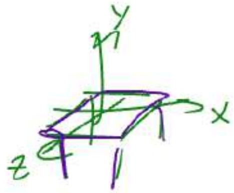
Ante la presencia de dichos vínculos o ligaduras aparecen además fuerzas que ejercen éstos. Entonces, si bien tenemos más incognitas también tenemos más ecuaciones.

En el caso del mov. sobre una superficie tenemos el vínculo $\underbrace{f(\vec{r})=0}_{\text{ec. de superficie}}$

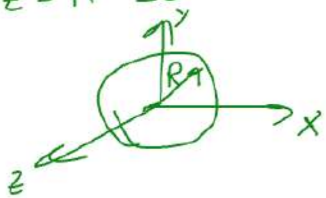
ec. de superficie

Ejemplos : Un plano $Ax+By+Cz=cte$ $\quad (y=0)$

$(Ax+By+Cz-cte=0)$



Una esfera (superficie) $\quad x^2+y^2+z^2-R^2=0$



En tales casos la ec. de Newton toma la forma

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{apl} + \lambda \underbrace{\nabla f}_{\perp \text{ sup.}}$$

Típicamente lo denotamos $\vec{N}$

y adicionalmente tenemos la restricción $f(\vec{r})=0$

Típicamente lo denotamos $\vec{N}$

y adicionalmente tenemos la restricción $f(\vec{r})=0$

En el caso de mov. sobre curvas tenemos 2 vínculos de superficie $f(\vec{r})=0$, $g(\vec{r})=0$

En estos casos la ec. de Newton toma la forma

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}_{apl} + \underbrace{\lambda \nabla f(\vec{r}) + \mu \nabla g(\vec{r})}_{\text{fuerzas del vínculo}}$$

y se debe satisfacer

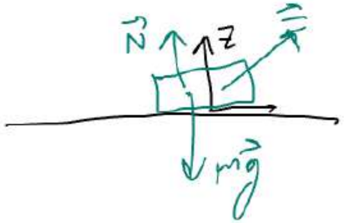
$f(\vec{r})=0$ y $g(\vec{r})=0$

Anillo

Ejemplo:

$z=0$ $\quad f(x,y,z)=0$ $\quad \nabla f = \hat{k}$

Ejemplo:



Bloque en una mesa

$z=0$ $\quad f(x,y,z)=0$ $\quad \nabla f = \hat{k}$

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + m\vec{g} + \lambda \nabla f$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = F_z - mg + \lambda \\ z = 0 \\ \forall t \end{cases} \Big\} \rightarrow \lambda = mg - F_z$$

N