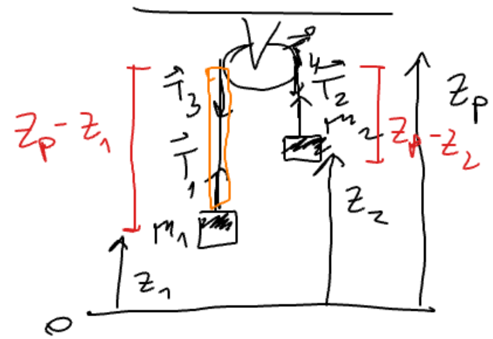
# CLASE 7

# Sistemas vinculados y rozamiento

Ejemplo 2 de sist. vinculados




$\Rightarrow \dot{z}_1 + \dot{z}_2 = 0 \ , \ \ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = 0$

$$\boxed{2z_p - z_1 - z_2 = L}$$

$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = m_1\vec{g} + \vec{T}_1$

$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = m_2\vec{g} + \vec{T}_2$

$m_1 \ddot{x}_1 = 0 \quad , \quad m_1 \ddot{y}_1 = 0$

$m_2 \ddot{x}_2 = 0 \quad , \quad m_2 \ddot{y}_2 = 0$

$\cancel{m}\ddot{\vec{r}}_p = \cancel{m}\vec{g} - \vec{T}_1 - \vec{T}_3$

$\Rightarrow \vec{T}_1 = -\vec{T}_3 \quad \rightarrow T_1 = T_2 = T\hat{k}$

$\nabla = \left(\frac{\partial \cdot}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial \cdot}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial \cdot}{\partial z}\hat{k}\right)$

$\nabla \cdot \vec{A} \qquad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \dots\right)$

$f(z_1, z_2) = 2z_p - z_1 - z_2 - L = 0$

$\nabla_1 f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z_1}\hat{k} = -\hat{k}$

$\nabla_2 f = \frac{\partial f}{\partial x_2}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z_2}\hat{k} = -\hat{k}$

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{z}_1 &= -m_1 g + T_1 \\ m_2\ddot{z}_2 &= -m_2 g + T_2 \end{aligned}\right\} \ \ddot{z}_1(m_1 - m_2) = -(m_1+m_2)g + 2T$$

$\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = 0$

$\Rightarrow \vec{T}_1 = -\check{T}_3 \quad \rightarrow T_1 = T_2 = 1 \ldots$

# Fuerzas de Fricción

## Superficie

Muchas veces las fuerzas involucradas en los vínculos no son solo de la forma $\lambda \nabla f$ sino que son de la forma $\vec{F}$ / (tal que) $\vec{F} \cdot \nabla f = 0$ y se oponen al movimiento relativo.

Dichas fuerzas son las fuerzas de fricción y, empíricamente, toman la forma $\vec{F}_{roz} = -\mu_c N \hat{v}_{rel}$ (caso cinético) o se oponen al intento de mov. relativo como $|\vec{F}_{roz}| \leq \mu_e N$ y la dirección cumple $\vec{F}_{roz} \cdot \nabla f = 0$

fuerza del vínculo ($|\lambda \nabla f|$)

## Curva

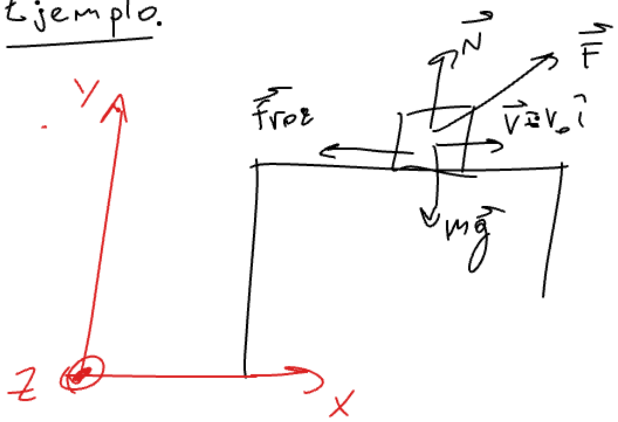
... $f(\vec{r})=0$ $\quad g(\vec{r})=0$ $\quad$ las $\vec{F}$ de los vínculos eran $\lambda \nabla f$ y $\gamma \nabla g$

curva

los vínculos eran $f(\vec{r})=0$ $g(\vec{r})=0$, las $\vec{F}$ de los vínculos eran $\lambda\nabla f$ y $\gamma\nabla g$

La fuerza de rozamiento es tal que $\vec{F}_{roz}\cdot\nabla f=0$ y $\vec{F}_{roz}\cdot\nabla g=0$. Es decir, $\vec{F}_{roz}$ es paralela a la curva.

Ejemplo:




$f(y)=y=0$ $\quad \lambda\overbrace{\nabla f}^{\hat{j}}$ $\quad \vec{F}_{roz}\cdot\nabla f=0 \Rightarrow \vec{F}_{roz}\perp\hat{j}$

$m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}+\vec{N}+\vec{F}_{roz}+m\vec{g}$ $\qquad \vec{F}_{roz}=F_{roz_x}\hat{i}+F_{roz_z}\hat{k}$

$m\ddot{x}=F_x+F_{roz_x}$

$\vec{N}=\lambda\hat{j}$

$m\ddot{y}=F_y-mg+\lambda=0 \Rightarrow \lambda=mg-F_y$

$m\ddot{z}=F_{roz_z}=0$

vínculo es $y=0$
$\Rightarrow \ddot{y}=0$

$F_{roz_x}=\mu_c\lambda\,(\underbrace{-\hat{i}}_{-\hat{v}})$

# Fuerzas en sistemas no inerciales

Las leyes de Newton refieren a la situación en sist. inerciales. Sin embargo, muchas veces resulta de interes trabajar en sist. no inerciales.

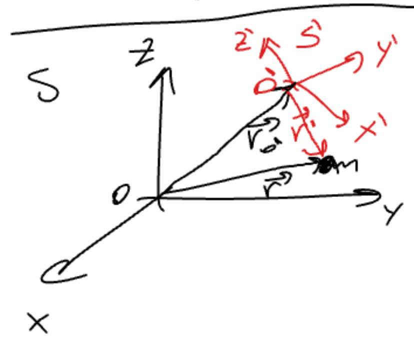
La realidad es que nunca estamos en sistemas inerciales, incluso para el cálculo de ciertas cantidades la "inercialidad" del sist. de ref. depende del grado de precisión de la medida a realizar.

Por ej. para

Por ej. para un ing. civil o un arquitecto, la tierra es un sist. suficientemente inercial. Sin embargo para un astronomo esto no es cierto. Incluso para alguien de ciencias de la atmosf. es muy relevante la rot. de la tierra.

Para trabajar en un sist. no inercial vamos a hacer uso de los resultados obtenidos cuando estudiamos el mov. relativo.

recordemos el caso gral




$$\vec r = \vec r_{o'} + \vec r'$$

$$\vec v = \underbrace{\vec v_{o'} + \vec\omega_{s'/s}\times\vec r'}_{\vec v_T} + \vec v'$$

$$\vec a = \underbrace{\vec a_{o'} + \dot{\vec\omega}_{s'/s}\times\vec r' + \vec\omega_{s'/s}\times\left(\vec\omega_{s'/s}\times\vec r'\right)}_{\vec a_T} + \underbrace{2\vec\omega_{s'/s}\times\vec v'}_{\vec a_c} + \vec a'$$

Ahora, la $2^{a}$ ley de Newton $\vec{F}_{Neta} = m\vec{a}$ donde $\vec{F}_{Neta}$ es la fuerza neta.
puede ser transformada para un sist. no inercial como:

$$m\vec{a}' = m\vec{a} - m\vec{a}_T - m\vec{a}_c = \vec{F}_{Neta} + \vec{F}_{Fic}$$

donde $\vec{F}_{Fic} = -m\vec{a}_T - m\vec{a}_c$ son las fuerzas ficticias o no inerciales.

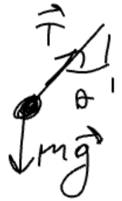
De esta forma podemos describir el mov. en un sist. no inercial.

El ejemplo más familiar de $\vec{F}_{Fic}$ es la denominada "fuerza" centrífuga que nos "empuja" hacia un lado cuando vamos en un auto u omnibus, este dobla.

<u>Obs:</u> Las $\vec{F}_{Fic}$ no son realmente fuerzas sino que surgen por el hecho de medir en un sist. no inercial.

Veamos varios ejemplos

1) Sostenemos un péndulo, masa m y largo $\ell$, sentados en un auto que acelera con $\vec{a}_{o'} = cte\, \hat{i}$ cuando recién se puso la verde (obs: nosotros somos pasajeros)


En S'

En S

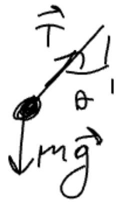
$$m\vec{a} = \boxed{m\vec{a}_{o'} = ma_{o'}\hat{i} = \vec{T} + m\vec{g}}$$

$$\vec{T} = T\cos\theta\,\hat{j} + T\operatorname{sen}\theta\,\hat{i}$$

$$m\vec{g} = -mg\,\hat{j}$$

$$\hat{j}) \Rightarrow \quad 0 = T\cos\theta - mg \rightarrow T = \frac{mg}{\cos\theta}$$

$$\hat{i}) \Rightarrow \quad ma_{o'} = T\operatorname{sen}\theta = mg\,tg\theta$$




$m\vec{g} = -mg\,\hat{j}$

$\hat{j}) \Rightarrow \quad 0 = T\cos\theta - mg \rightarrow T = \dfrac{mg}{\cos\theta}$

$\hat{i}) \Rightarrow \quad m a_{0'} = T\,\mathrm{sen}\,\theta = mg\,\mathrm{tg}\,\theta$

En $S'$

$m\vec{a}' = 0 = \vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a}_T - m\vec{a}_c$

$\vec{V}' = 0 \Rightarrow \vec{\omega} \times \vec{V}' = 0$

$\vec{\omega} = 0 \qquad \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = 0$

$\dot{\vec{\omega}} = 0$

$0 = \vec{T} + m\vec{g} - m\vec{a}_{0'}$

$\Rightarrow \boxed{m\vec{a}_{0'} = \vec{T} + m\vec{g}}$

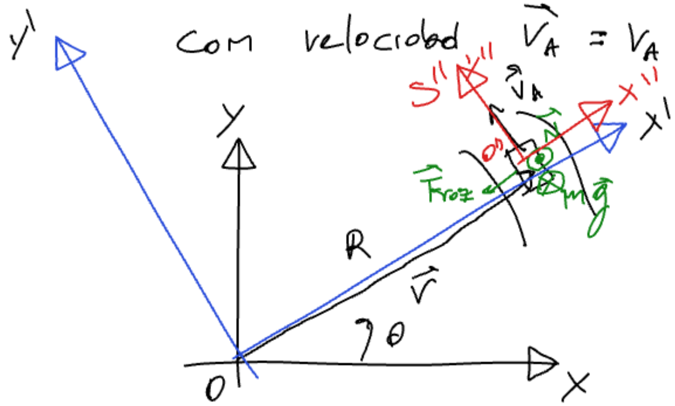
$\vec{a}_{0'} = a_{0'}\,\hat{i}$

2) Siguiendo con el ejemplo del auto.

2) Siguiendo con el ejemplo del auto.

El auto toma una curva de radio de curvatura $R$ y centro $O$.

con velocidad $\vec{V}_A = V_A \hat{e}_\theta$ con $V_A = cte$




$$\hat{j}' = \hat{e}_\theta$$

$$\hat{i}' = \hat{e}_\rho$$

$$\vec{\omega} = \frac{V_A}{R} \hat{k} \rightarrow \hat{k}'$$

En $S$

$$m\vec{a} = -\frac{V_A^2 m}{R} \hat{e}_\rho = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{roz}$$

$\hat{k})$ $\quad N = mg \qquad \left( \begin{array}{l} \vec{N} = N \hat{k} \\ m\vec{g} = -mg\hat{k} \end{array} \right)$

$\hat{e}_\rho)$ $\quad -\dfrac{V_A^2 m}{R} \hat{e}_\rho = \vec{F}_{roz}$

$\hat{e}_p) - \frac{v_A^2 m}{R}\hat{e}_p = \vec{F}_{roz}$

En $S'$ $\quad \vec{a}' = 0 \quad (\vec{r}' = R\,\hat{i}' = cte)$

$m\vec{a}' = 0 = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{roz} - m\vec{a}_T - m\vec{a}_c$

$0 = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{roz} + \frac{m V_A^2}{R}\hat{e}_p$

$= \frac{m v_A^2}{R}\hat{e}_p = \vec{N} + m\vec{g} + \vec{F}_{roz}$

$\vec{v}' = 0 \Rightarrow \vec{a}_c = 0$

$\dot{\vec{\omega}} = 0 \Rightarrow \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' = 0$

$O = O' \Rightarrow \vec{a}_{O'} = 0$

$\Rightarrow \vec{a}_T = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') = -\left(\frac{V_A}{R}\right)^2 R\,\hat{e}_p$ $\quad \hat{i}'$

$-m\,\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$

Juega el rol de $\vec{F}$ centrífuga.

ojo que $m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$ No siempre es la $\vec{F}$ centrífuga

$\vec{\omega}$

$\left( \vec{\omega}_{S'/S} = \vec{\omega}_{S''/S} \right)$

En $S''$ $\quad \vec{r}'' = 0 \Rightarrow \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'') = 0 \quad \vec{a}'' = 0 \quad \vec{v}'' = 0 \quad \vec{\omega} = V_A \ldots$

$= \frac{\ldots}{R}\, e_p$ [illegible]

$-m\,\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}'')$

Juega el rol de $\vec{F}$ centrífuga.

ojo que $m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}'')$ No siempre es la $\vec{F}$ centrifuga

$\vec{\omega}$ ,, $\left(\vec{\omega}_{S'/S} = \vec{\omega}_{S''/S}\right)$

En $S''$ $\quad \vec{r}''=0 \;\xrightarrow{\vec{a}''=0}\; \Rightarrow \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}'')=0 \qquad \vec{v}''=0 \qquad \vec{\omega}=\frac{V_A}{R}\hat{k}$

$\Rightarrow \vec{a}_c = 0 \qquad \vec{a}_T = \vec{a}_{O''}$

$\dot{\vec{\omega}}=0$

$\vec{a}_{O''} = -\frac{V_A^2}{R}\hat{e}_p$

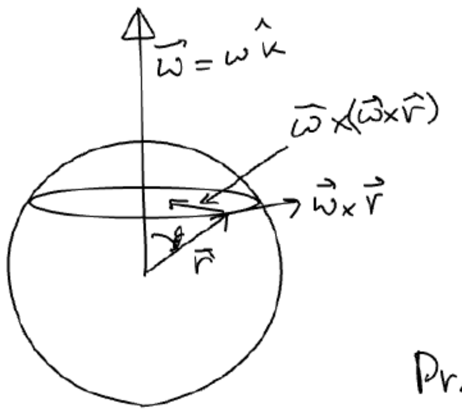
$$m\vec{a}'' = 0 = m\vec{g} + \vec{F}_{roz} + \vec{N} \underbrace{- m\,\vec{a}_{O''}}_{} = m\vec{g} + \vec{F}_{roz} + \vec{N} + \frac{V_A^2}{R} m\,\hat{e}_p$$

Juega a el rol de Fuerza centrifuga.

3) rotación de la tierra y la gravedad.

3) rotación de la tierra y la gravedad.

La rot. de la tierra es, aprox, $\vec{\omega} = \frac{2\pi \text{ rad}}{24 \text{ horas}}\hat{k} = 7{,}2722 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{s} \hat{k}$ y $\dot{\vec{\omega}} \simeq 0$




Para una partícula de masa m la fuerza de gravedad es

$$\vec{F}_G = -\frac{m M_T}{r^2} G \hat{e}_r$$

Próxima clase: (spoiler)

$$m\vec{a}' = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

con $\vec{g} = -\left(\omega^2 r \operatorname{sen}^2\theta + \frac{M_T G}{r^2}\right)\hat{e}_r - \omega^2 r \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, \hat{e}_\theta$