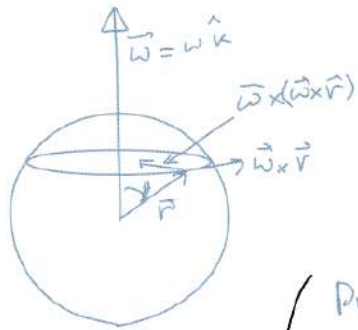


CLASE 8

Fuerzas ficticias en sist. no inerciales

3) Rotación de la tierra y la gravedad.

La rot. de la tierra es, aprox, $\vec{\omega} = \frac{2\pi \text{ rad}}{24 \text{ horas}} \hat{k} = 7,2722 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \hat{k}$ y $\dot{\vec{\omega}} \approx 0$



Para una partícula de masa m
la fuerza de gravedad es

$$\vec{F}_G = -\frac{mM_T G}{r^2} \hat{e}_r$$

Próxima clase: (spoiler)

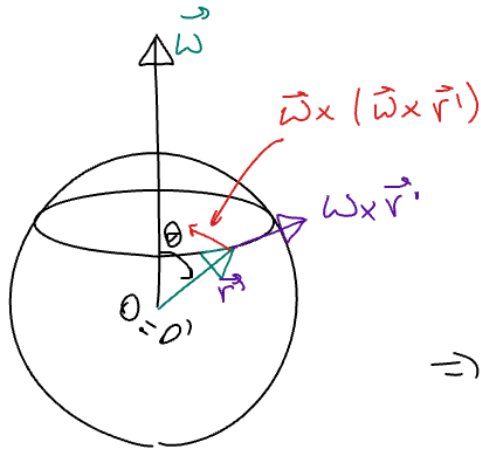
$$m\vec{a}' = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\text{con } \vec{g} = -\left(\omega^2 r \sin^2 \theta + \frac{M_T G}{r^2}\right) \hat{e}_r - \omega^2 r \sin \theta \cos \theta \hat{e}_\theta$$

Clase pasada

⇒ En este caso, para una partícula realizando, por ejemplo, un mov. proyectil es, visto desde un referencial local S' es:

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}'}$$



$$m\vec{a} = m\vec{a}' + m\vec{a}_T + m\vec{a}_L$$

$$\vec{a}_T = \cancel{\vec{a}'_0} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \cancel{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}'}$$

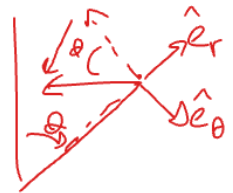
$$\vec{a}_L = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$x \neq \vec{\omega} \approx \text{cte.}$

$$\Rightarrow m\vec{a}' = \vec{F}_G - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}' = m\vec{g} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

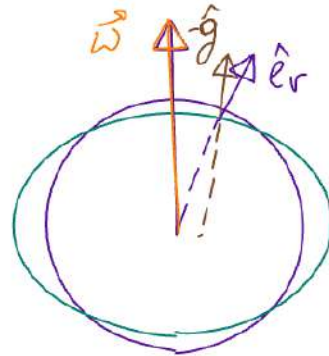
$$\vec{F}_G = -\frac{mM_T G}{r^2} \hat{e}_{r'}$$

$$\vec{g} = -\frac{M_T G}{r^2} \hat{e}_{r'} - \underbrace{\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')}_{\omega^2 r' \sin\theta (-\sin\theta \hat{e}_r - \cos\theta \hat{e}_\theta)}$$

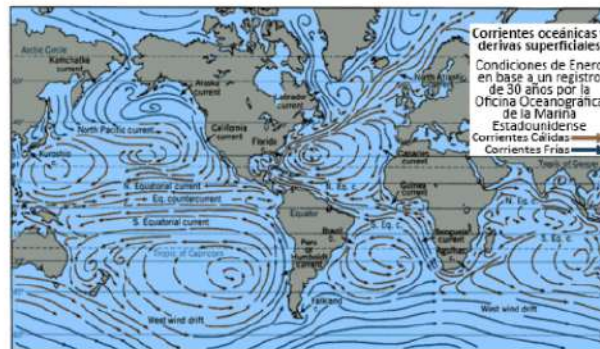


$$\Rightarrow \vec{g} = -\left(\frac{M_T G}{r^2} - \omega^2 r' \sin^2\theta\right) \hat{e}_r + \omega^2 r' \sin\theta \cos\theta \hat{e}_\theta$$

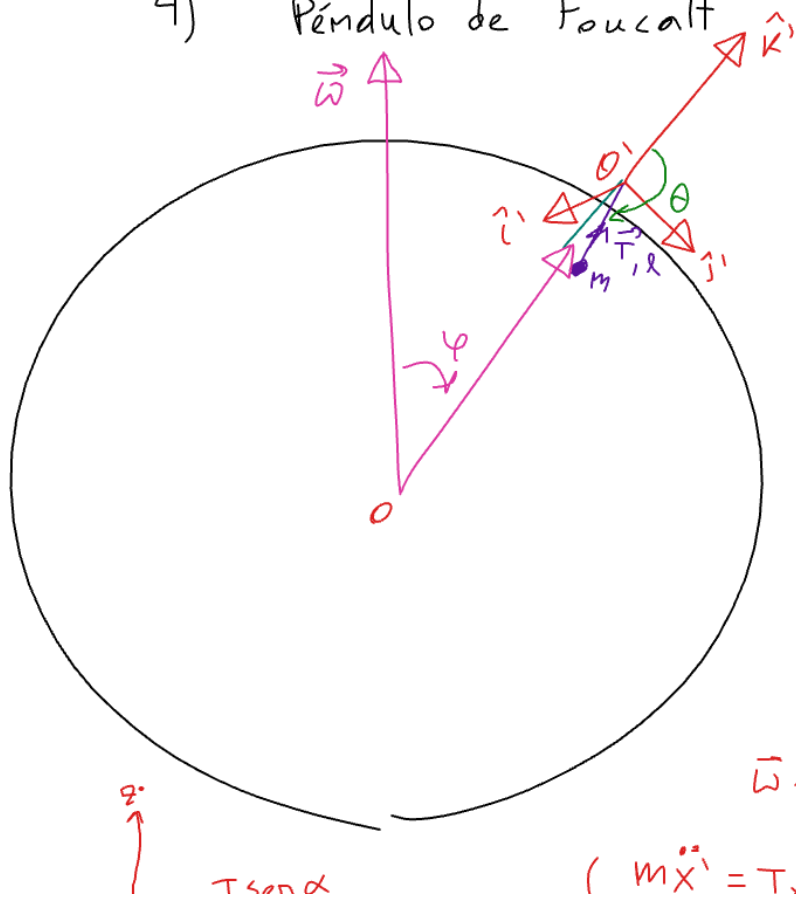
1 -
 \vec{g} no apunta hacia el centro de la tierra y define la vertical local



Adicionalmente, el término de coriolis da cuenta de los efectos que ya discutimos en la formación de ciclones y anticiclones, así como también afecta las corrientes marinas



4) Péndulo de Foucault



Pequeñas oscilaciones ($l \gg |x|, |y|$)

$$z' = l \cos \theta$$

$$\alpha = \pi - \theta \ll 1$$

$$\begin{aligned} z' &= \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \\ &\approx l \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R^2}} \\ &\approx l \left(1 - \frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{R^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

$$\cos \alpha \approx 1$$

$$\cos \theta \approx -1$$

$$\sin \alpha \approx \text{tg } \alpha$$

Veamos que pasa en las pequeñas oscilaciones

$$m \vec{a} = \vec{T} - mg \hat{k}' - m z \vec{\omega} \times \vec{v}'$$

$$\vec{\omega} = \omega_y \hat{j}' + \omega_z \hat{k}'$$

$$\vec{v}' = \dot{x}' \hat{i}' + \dot{y}' \hat{j}' + \dot{z}' \hat{k}'$$

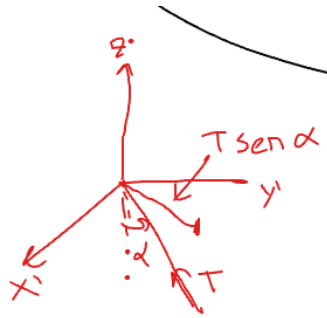
$$\omega_y \approx -\omega_T \sin \varphi$$

$$\vec{\omega} \times \vec{v}' = (\omega_y \hat{j}' + \omega_z \hat{k}') \times (\dot{x}' \hat{i}' + \dot{y}' \hat{j}' + \dot{z}' \hat{k}')$$

$$\omega_z \approx \omega_T \cos \varphi$$

$$(m \ddot{x}' = T_x + 2m \omega_y \dot{y}') \quad \text{vertical local}$$

$$z' = l \cos \theta \approx -l \text{ cte} + o(\alpha^2)$$



$$\vec{\omega} \times \vec{v}' = (\omega_y' \hat{j}' + \omega_z' \hat{k}') \times (\dot{x}' \hat{i}' + \dot{y}' \hat{j}' + \dot{z}' \hat{k}')$$

$$\omega_z' \approx \omega_T \cos \tau$$

$$z' = l \cos \theta \approx -l \cos \tau + o(\alpha^2)$$

$$\begin{cases} m \ddot{x}' = T_x + 2m\omega_z' \dot{y}' \\ m \ddot{y}' = T_y - 2m\omega_z' \dot{x}' \\ m \ddot{z}' \approx 0 = T_z - mg + 2m\omega_y' \dot{x}' \end{cases}$$

$$T_x = -T \sin \alpha \frac{x'}{l \sin \alpha} = -\frac{T x'}{l} \approx -\frac{x'}{l} (mg - 2m\omega_y' \dot{x}')$$

$$\Rightarrow T_x = -\frac{x' mg}{2l} \quad \text{análogamente} \quad T_y = -\frac{y' mg}{2l}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \ddot{x}' = -\frac{g}{2l} x' + 2\omega_z' \dot{y}' \\ \ddot{y}' = -\frac{g}{2l} y' - 2\omega_z' \dot{x}' \end{cases}$$

$$\vec{z}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ v_{x'}' \\ v_{y'}' \end{pmatrix} \quad \vec{z}'' = \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ v_{x'}' \\ v_{y'}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{g}{2l} & 0 & 0 & 2\omega_z' \\ 0 & -\omega_z' & -2\omega_z' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ v_{x'}' \\ v_{y'}' \end{pmatrix} = M \vec{z}''$$

Procedimiento:

Hallo val. propios λ

luego \rightarrow los vect. propios, etc.

las frecu. son la parte imag. de los val propios. λ

Procedimiento:

Hallo val. propios λ

→ luego

los vect. propios, etc.

las partes son la parte imag. de los val propios. λ

$$\begin{aligned} 0 = \det(M - \lambda I_d) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 & -\lambda & 2\omega_z^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & -2\omega_z^2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 2\omega_z^2 \\ -\omega_0^2 & -2\omega_z^2 & -\lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 0 & -\lambda & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 & 2\omega_z^2 \\ 0 & -\omega_0^2 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(-\lambda^3 - \lambda\omega_0^2 - 4\omega_z^2\lambda) + (\omega_0^4 + \lambda^2\omega_0^2) \\ &= \lambda^4 + \lambda^2(2\omega_0^2 + 4\omega_z^2) + \omega_0^4 = 0 \end{aligned}$$

$$u = \lambda^2 \Rightarrow u^2 + 2u(\omega_0^2 + 2\omega_z^2) + \omega_0^4 = 0$$

$$u = -(\omega_0^2 + 2\omega_z^2) \pm \sqrt{(\omega_0^2 + 2\omega_z^2)^2 - \omega_0^4} = -(\omega_0^2 + 2\omega_z^2) \pm 2\omega_z^2 \sqrt{\omega_0^2 + \omega_z^2}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = +\sqrt{\quad} \\ \lambda_2 = +\sqrt{\quad} \\ \lambda_3 = -\sqrt{\quad} \\ \lambda_4 = -\sqrt{\quad} \end{matrix}$$

etc. etc.

Trabajo y energía

El concepto de energía es uno de los conceptos fundamentales de la física y que hace su aparición en muchas o todas las ramas de la física.

La característica fundamental que hace a este concepto tan relevante es su conservación.

Trabajo

Consideremos una partícula P de masa m que sigue una trayectoria \mathcal{C} en el espacio. Mientras tanto, actúa sobre la partícula una fuerza \vec{F} . Si:

dividimos la curva \mathcal{C} en intervalos $\Delta\vec{r}_i$ suficientemente chicos para que \vec{F} sea constante en cada intervalo e igual a $\vec{F}_i \Rightarrow$ Definimos el trabajo realizado por la fuerza \vec{F} en el intervalo $\Delta\vec{r}_i$ como $\Delta W_i = \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i$

$$\Delta\vec{r}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}$$

\mathcal{C}

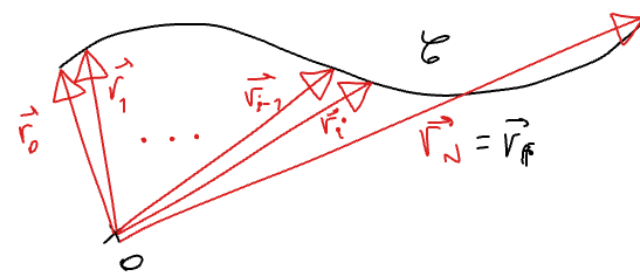
en el intervalo Δr_i como

$$\Delta W_i = \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i$$

$$\Delta \vec{r}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}$$

Y el trabajo total realizado en la curva \mathcal{C}

$$\text{Será } W_{\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_N}^{\vec{F} \text{ en } \mathcal{C}} = W_{\mathcal{C}}^{\vec{F}} = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ (\Delta r_i \rightarrow 0)}} \sum_{i=1}^N \Delta W_i = \lim_{\substack{N \rightarrow \infty \\ (\Delta r_i \rightarrow 0)}} \vec{F}_i \cdot \Delta \vec{r}_i = \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Vieron CVyAC que parametrizando la curva con parámetro $h \in [0, 1]$ $\vec{r}(h) : [0, 1] \rightarrow \mathcal{C}$

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(h)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dh} dh$$

$$\begin{aligned} \vec{r}(0) &= \vec{r}_0 \\ \vec{r}(1) &= \vec{r}_f \end{aligned}$$

Ejemplos

1) Trabajo de \vec{F} constante en una curva \mathcal{C} que une $\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_f$

$$W^{\vec{F}} = \left(\vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \left(d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_f - \vec{r}_0) \right) \right)$$

Ejemplos

1) Trabajo de \vec{F} constante en una curva \mathcal{C} que une $\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}_F$

$$\begin{aligned} W_{\vec{F}} &= \int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_{\mathcal{C}} d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_F - \vec{r}_0) \\ &\uparrow \\ &= \lim_{\substack{\Delta r_i \rightarrow 0 \\ (N \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^N \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}_i = \vec{F} \lim_{\substack{\Delta r_i \rightarrow 0 \\ (N \rightarrow \infty)}} \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}) = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} \end{aligned}$$

obs: el W de una \vec{F} constante no depende de la curva.
depende sólo de las posiciones final e inicial

2) Trabajo de \vec{F} perpendicular al mov.
 $\Rightarrow \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

2) Trabajo de \vec{F} perpendiculares al mov.

$$\text{si } \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow W = 0$$

Case: Fuerza magnética

$$\vec{F}_{\text{mag}} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$\text{y } \Rightarrow \vec{F}_{\text{mag}} \cdot d\vec{r} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = q(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0$$

3) Trabajo de \vec{F}_{roz} cinético

$$\vec{F}_{\text{roz}} = -F_{\text{roz}} \hat{v} \Rightarrow W = \int_C \vec{F}_{\text{roz}} \cdot d\vec{r} = - \int_C F_{\text{roz}} \hat{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{ds} ds = - \int_{s_0}^{s_f} F_{\text{roz}}(\vec{r}(s)) ds < 0$$

↑
parametrizado
con s

\Rightarrow el trabajo de la fuerza de rozamiento es siempre negativo

$$\text{si } F_{\text{roz}} = \text{cte} \Rightarrow W = -F_{\text{roz}} \int_{s_0}^{s_f} ds = -F_{\text{roz}} \underbrace{(s_f - s_0)}_{\text{longo de la curva}}$$

4) \vec{F} depende sólo de la posición en 1D

$$\rightarrow W = \int_{x_0}^{x_1} F(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx + \dots + \int_{x_{m-1}}^{x_m} F(x) dx = \int_{x_0}^{x_f} F(x) dx$$

\int dividido la curva \mathcal{C} en intervalos estrictamente crecientes o decrecientes

\Rightarrow si $\tilde{F}(x)$ es una primitiva de $F(x)$

$$\Rightarrow W = \tilde{F}(x_f) - \tilde{F}(x_0)$$

ejemplo: resorte

$$F(x) = -k(x - x_0) \Rightarrow \tilde{F}(x) = -\frac{k}{2}(x - x_0)^2$$

estiramiento inicial del resorte

$$\Rightarrow W = -\frac{k}{2}(x_f - x_0)^2 + \frac{k}{2}(x_0 - x_0)^2 = -\frac{k}{2}(\Delta x_f^2 - \Delta x_0^2)$$

estiramiento final del resorte

obs: Las fuerzas en 1D que dependen sólo de la posición realizan un trabajo que depende sólo de las posiciones inicial y final

Comentario: En el caso 2D, 3D esto no es cierto!!! (Ejemplo Ej 1 Pr 3)