CLASE 9

Potencia

La rapidez con la que una fuerza realiza trabajo.

Consideremos un pequeño desplazamiento $d\vec{r} = \vec{v}\,dt$

$\Rightarrow$ El trabajo que realiza una fuerza en dicho intervalo es

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt$$

$\Rightarrow$ vamos a definir la potencia como $P = \frac{dW}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$

Recíprocamente, si tenemos que una fuerza realiza trabajo con una potencia $P(t)$ $\Rightarrow$ en un intervalo de tiempo entre $t_0 \to t_f$, la fuerza $\vec{F}$ realiza un trabajo $W = \int_{t_0}^{t_f} P(t')\,dt' = \int_{t_0}^{t_f} \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt'$

En el S.I. las unidades del trabajo es el Joule (J) $\to$ N·m

y la potencia se mide en Vatios (Watts) $\to \frac{J}{s}$

Teorema del trabajo y la energía

Un resultado muy conocido y relevante en mecánica es el teorema del trabajo y la energía cinética.

Este teorema relaciona el trabajo neto realizado por las fuerzas (sobre una partícula) y la variación de una cantidad relacionada a la velocidad de la partícula.

2da ley de N.

$$W_{neto} = \sum_i W_{F_i} = \sum_i \int_{\mathcal{C}} \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} \left(\sum_i \vec{F}_i\right) \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}_{neta} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} m\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{\mathcal{C}} m\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\right) dt = \int_{\mathcal{C}} m \frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) dt = \int_{\mathcal{C}} m\, d\left(\frac{\vec{v}^2}{2}\right) = \frac{m\vec{v}_f^2}{2} - \frac{m\vec{v}_0^2}{2}$$

$\frac{m\vec{v}^2}{2}$ es lo que llamamos energía cinética de la partícula

Normalmente se denota con la letra K o T $\left(\begin{array}{l} T = \frac{1}{2} m\vec{v}^2 \\ K = \frac{1}{2} m\vec{v}^2 \end{array} \right)$

$$\boxed{W_{Neto} = \Delta K}$$

$$P_{Neta} = \vec{F}_{Neta} \cdot \vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m\vec{v}^2}{2}\right) \Rightarrow \boxed{P_{Neta} = \frac{dK}{dt}}$$

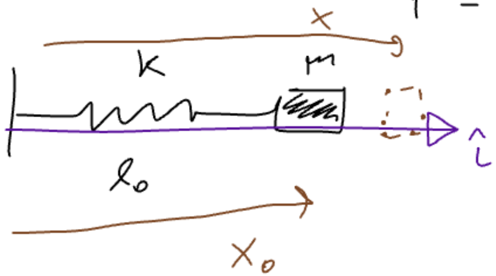
Ejemplos

$$P_{Neta} = F_{Neta} \cdot v = m \frac{dv}{dt} \cdot v = \frac{d}{dt}\left(\frac{m v^2}{2}\right) \Rightarrow \boxed{P_{Neta} = \frac{dK}{dt}}$$

Ejemplos

1) Resorte

$$\vec{F} = -k(x - \ell_0)\,\hat{i}$$



$$-\int_{x_0}^{x} k(x' - \ell_0)\,dx'$$

$$W_{Neto} = -\frac{k(x-\ell_0)^2}{2} + \frac{k(x_0 - \ell_0)^2}{2} = \frac{m V_f^2}{2} - \frac{m V_0^2}{2}$$

$$V_0 = 0 \Rightarrow \frac{m V_f^2}{2} = \frac{k}{2}\left((x_0 - \ell_0)^2 - (x - \ell_0)^2\right)$$

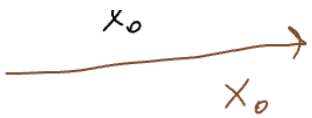
2) gravedad

Trabajo del peso

contacto liso

$-mg\hat{j}$ $\quad (0\hat{j} + x\hat{i} - y\hat{j})$

$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int (\vec{P} + \vec{N})\cdot d\vec{r} = \vec{P}\cdot\Delta\vec{r} = mgy$$

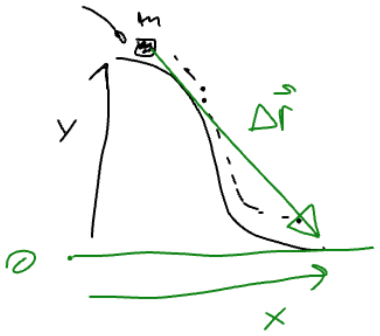


$V_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{m V_f^2}{2} = \frac{k}{2}\left((x_0-\ell_0)^2 - (x-\ell_0)^2\right)$

2) gravedad

Trabajo del peso

contacto liso



$$W_{neto} = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}_{neta} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{C}} (\vec{P} + \cancel{\vec{N}}^{\,0}) \cdot d\vec{r} = \underbrace{\vec{P}}_{-mg\hat{j}} \cdot \underbrace{\Delta\vec{r}}_{(0\hat{j} + x\hat{i} - y\hat{j})} = mgy$$

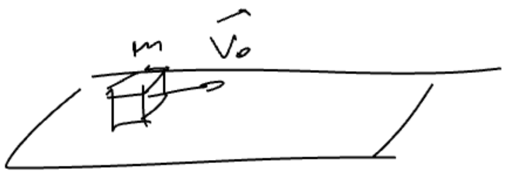
$$\Rightarrow \quad \Delta K = \frac{mV^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = \sqrt{2gy}}$$

3) Rozamiento

Hallar la máxima dist que se desplaza un bloque sobre una mesa horizontal si el contacto entre las sup. se caracteriza por

3) Rozamiento

Hallar la máxima dist que se desplaza un bloque sobre una mesa horizontal si el contacto entre las sup. se caracteriza por un coef. de roz μ y el bloque tiene una masa m y una velocidad inicial $\vec{V}_0$



$$W_{Froz} = W_{Neto} = -\mu \cancel{m} g \,\Delta x = \cancel{\frac{m v^2}{2}}^{\,0} - \frac{\cancel{m} v_0^2}{2}$$

$N = mg$

$|\vec{F}_{roz}| = \mu m g$

$$\boxed{\Delta x = \frac{v_0^2}{2\mu g}}$$

Energía potencial y fuerzas conservativas

Energía potencial y fuerzas conservativas

Muchas veces sucede que el trabajo realizado por las fuerzas no depende del camino seguido sino, únicamente, de las posiciones final e inicial ($\vec{r}_f$, $\vec{r}_0$). En tales casos decimos que las fuerzas son conservativas.

Es decir: una fuerza es conservativa si depende únicamente de la posición $\vec{F} = \vec{F}(x,y,z)$ y si el trabajo realizado por la fuerza entre 2 puntos $\vec{r}_0$ y $\vec{r}_f$ es independiente del camino

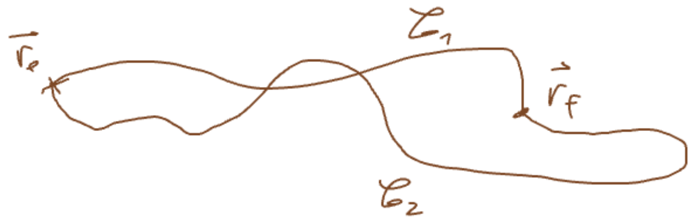
$W_{\vec{r}_0 \to \vec{r}_f, \mathcal{C}_1}$

$$W_{\vec r_0\to\vec r_f,\,\mathcal{C}_1} = W_{\vec r_0\to\vec r_f,\,\mathcal{C}_2}$$

debido a esto si invertimos el camino $W_{\vec r_0\to\vec r_f,\,\mathcal{C}_2} = -W_{\vec r_f\to\vec r_0,\,\mathcal{C}_2}$

y entonces para cualquier curva cerrada $\mathcal{C}$ $(\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)$

$$\begin{aligned} W_{\mathcal{C}} &= W_{\vec r_0\to\vec r_f,\,\mathcal{C}_1} + W_{\vec r_f\to\vec r_0,\,\mathcal{C}_2} \\ &= W_{\vec r_0\to\vec r_f,\,\mathcal{C}_1} - W_{\vec r_0\to\vec r_f,\,\mathcal{C}_2} \\ &= 0 \end{aligned}$$



En conclusión: si la fuerza es conservativa el trabajo en ciclo es 0.

En conclusion. Si la fuerza es conservativa el Trabajo en ciclo es 0.

Si $\vec{F}(x,y,z)$ es conservativa $\Rightarrow \exists\ U(x,y,z) \,/\, \vec{F}(x,y,z) = -\nabla U(x,y,z)$

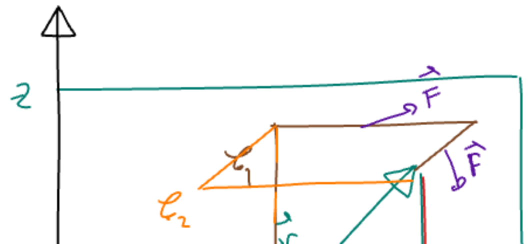
Prueba

definimos $\displaystyle U(x,y,z) \equiv -\int_{(x_0,y_0,z_0)=\vec{r}_0}^{(x,y,z)=\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}\,'$ con $\vec{r}_0$ fijo

$$\mathcal{C}_1 = \{\{x_0, y_0, 3t(z-z_0)+z_0\} \cup \{x_0, 3(t-\tfrac{1}{3})(y-y_0)+y_0, z\} \cup \{3(t-\tfrac{2}{3})(x-x_0)+x_0, y, z\}\} \quad t\in[0,1]$$

$$\mathcal{C}_2 = \{\{x_0, y_0, 3t(z-z_0)+z_0\} \cup \{3(t-\tfrac{1}{3})(x-x_0)+x_0, y_0, z\} \cup \{x, 3(t-\tfrac{2}{3})(y-y_0)+y_0, z\}\} \quad t\in[0,1]$$

$$\mathcal{C}_3 = \{\{x_0, 3t(y-y_0)+y_0, z_0\} \cup \{3(t-\tfrac{1}{3})(x-x_0)+x_0, y, z_0\} \cup \{x, y, 3(t-\tfrac{2}{3})(z-z_0)+z_0\}\} \quad t\in(0,1]$$

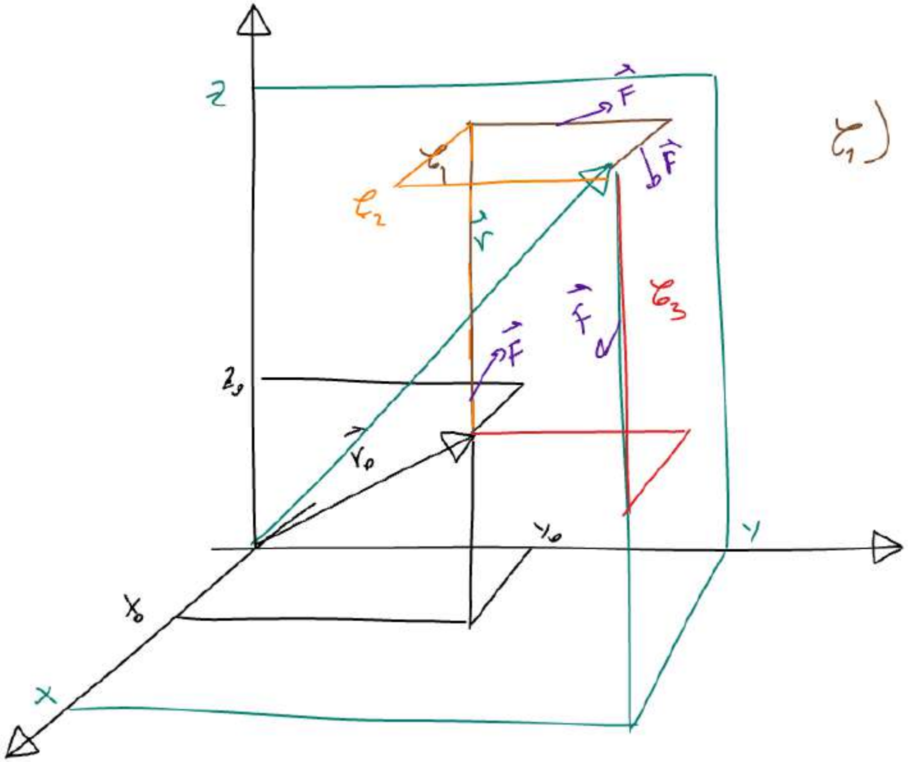


$$\mathcal{C}_1)\ U(x,y,z) = -\int_{0}^{\frac{1}{3}} F_z(x_0, y_0, \underbrace{3t(z-z_0)+z_0}_{u})\, 3(z-z_0)\,dt$$

$z_,$

$du = 3(z-z_0)\,dt$

$du = 3(y-y_0)\,dt$



$$du = 3(z-z_0)\,dt$$

$$\mathcal{C}_1)\quad U(x,y,z) = -\int_0^{\frac{1}{3}} F_z(x_0, y_0, \underbrace{3t(z-z_0)+z_0}_{u})\, 3(z-z_0)\,dt$$

$$du = 3(y-y_0)\,dt$$

$$-\int_{\frac{1}{3}}^{2/3} F_y(x_0, \underbrace{3(t-\tfrac{1}{3})(y-y_0)+y_0}_{u}, z)\, 3(y-y_0)\,dt$$

$$du = 3(x-x_0)\,dt$$

$$-\int_{\frac{2}{3}}^{1} F_x(\underbrace{3(t-\tfrac{2}{3})(x-x_0)+x_0}_{u}, y, z)\, 3(x-x_0)\,dt$$

$$= -\int_{z_0}^{z} F_z(x_0, y_0, u)\,du - \int_{y_0}^{y} F_y(x_0, u, z)\,du$$

$$-\int_{x_0}^{x} F_x(u, y, z)\,du$$

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z) = -F_x(x,y,z)}$$

$\mathcal{C}$ $\partial U(x,y,z) = -F_y(x,y,z)$

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial x}(x,y,z) = -F_x(x,y,z)}$$

b_2 $$\boxed{\frac{\partial U}{\partial y}(x,y,z) = -F_y(x,y,z)}$$

b_3 $$\boxed{\frac{\partial U}{\partial z}(x,y,z) = -F_z(x,y,z)}$$

$$\Rightarrow \boxed{-\nabla U = \vec{F}}$$

Obs: si cambiamos de punto de referencia $\vec{r}_0 \to \vec{r}_0{}'$

$$U'(x,y,z) = \int_{\vec{r}_0{}'}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \underbrace{\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\cdot d\vec{r}}_{U(x,y,z)} + \underbrace{\int_{\vec{r}_0{}'}^{\vec{r}_0} \vec{F}\cdot d\vec{r}}_{cte}$$

$\Rightarrow$ U varía en una constante.

Recíprocamente, si $\vec{F} = -\nabla U \Rightarrow \vec{F}$ es conservativa

Sea un camino $\mathcal{C}$ arbitrario que una los puntos $\vec{r_0}$ y $\vec{r_F}$
parametrizado con $\vec{\gamma}(\lambda) : [0,1] \to \mathcal{C}$ $\quad \vec{\gamma}(0) = \vec{r_0} \quad \vec{\gamma}(1) = \vec{r_F}$

$$\int_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_0^1 \underbrace{\nabla U(\vec{\gamma}(\lambda)) \cdot \frac{d\vec{\gamma}}{d\lambda}}_{\frac{dU}{d\lambda}(\vec{\gamma}(\lambda))} d\lambda = -\int_0^1 \frac{dU}{d\lambda} d\lambda = U(\vec{\gamma}(0)) - U(\vec{\gamma}(1)) = U(\vec{r_0}) - U(\vec{r_F})$$

Comentario:

Por último, si F es conservativa $\Rightarrow \dfrac{\partial F_x}{\partial y} = -\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial U}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial}{\partial x} F_y$

$$\Rightarrow \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \longrightarrow \boxed{\nabla \times \vec{F} = 0}$$

A la función $U(\vec{r}) \,/\, -\nabla U = \vec{F}$ se le denomina energía potencial asociada a $\vec{F}$

Conservación de la energía y fuerzas no conservativos

La energía potencial de una partícula es la suma de todas las energías potenciales asociadas a las fuerzas conservativas

Definimos la energía mecánica de una partícula como su energía cinética K más su energía potencial. Normalmente a la energía mecánica la denotamos con la letra E

$$E = K + U = U + \frac{1}{2} m \vec{v}^2$$

Vamos a separar las fuerzas que actúan sobre una partícula de masa m en conservativas $\vec{F}_c$ y en no conservativas $\vec{F}_{Nc}$

conservativas $\vec{F}_c$ y en no conservativas $\vec{F}_{NC}$

$$W_{neto} = \int_{\gamma} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} + \int_{\gamma} \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{r} = -\left[U(\vec{r}_f) - U(\vec{r}_o)\right] + \int_{\gamma} \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{r}$$

$$W_{neto} = K_f - K_o$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\gamma} \vec{F}_{NC} \cdot d\vec{r} = W_{\substack{No \\ cons.}} = \left[K_f + U(\vec{r}_f)\right] - \left[K_o + U(\vec{r}_o)\right] = E_f - E_o = \Delta E}$$

Es decir la variación de la energía mecánica de la partícula es igual al trabajo de las fuerzas no conservativas.

$\Rightarrow$ <u>obs</u>: Si No hay fuerzas no conservativas (si $W_{\substack{No \\ cons}} = 0$)

$\Rightarrow$ la energía mecánica del sistema se conserva.

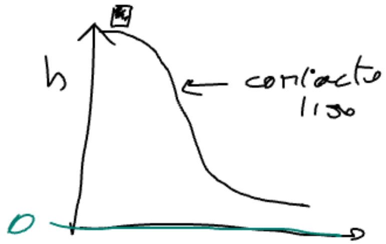
Ejemplos

$\Rightarrow$ <u>obs:</u> si No hay fuerzas no conservativas (si $W_{\substack{NO \\ cons}} = 0$)

$\Rightarrow$ la energía mecánica del sistema se conserva.

<u>Ejemplos</u>

1) hallar v_f si parte del reposo de una altura h



$\Rightarrow$ No hay fuerza no cons. (o el $\underset{\text{es } 0}{\text{Trab}}$)

$$E_0 = mgh = E_f = mg.0 + \frac{mv_f^2}{2}$$

$$\Rightarrow v_f = \sqrt{2gh}$$

2) si $\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{e}_r \Rightarrow \exists \; U \,/\, \vec{F} = -\nabla U$

En coord. esfericas

2) si $\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{e}_r \Rightarrow \exists\ U \ / \ \vec{F} = -\nabla U$

En coord. esfericas

$$-\nabla U = -\left[\frac{\partial U}{\partial r}\hat{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\hat{e}_\theta + \frac{1}{r\,\mathrm{sen}\theta}\frac{\partial U}{\partial \phi}\hat{e}_\phi\right]$$

tomamos $U = U(r) \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial \phi} = 0$

$$\Rightarrow -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial r}\hat{e}_r$$

$\Rightarrow F(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}$ puedo definir $U(r) = -\int_{r_0}^{r} \vec{F}(\vec{r}')\cdot d\vec{r}' = -\int_{r_0}^{r} F(r')\,dr'$

r_0 arbitrario

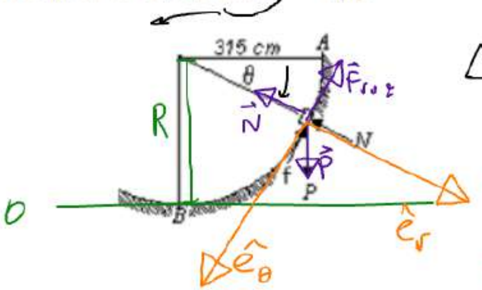
$$\Rightarrow \boxed{-\frac{\partial U}{\partial r} = F(r)}$$

Caso particular: $\vec{F}(\vec{r}) = \frac{K}{r^2}\hat{e}_r \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{K}{r^2} \Rightarrow U(r) = \frac{K}{r} - \underbrace{\frac{K}{r_0}}_{cte} \Rightarrow U(r) = \frac{k}{r}$

puedo elegir r_0 el infinito

3) Ej 5. pr 2.

5. Se suelta un objeto pequeño desde A partiendo del reposo y desliza con rozamiento, por el camino circular hacia abajo. Si el coeficiente de rozamiento es $f = 1/5$, determinar la velocidad del objeto al pasar por B. *Sugerencia: halle la ecuación de movimiento en función de θ y resuélvala haciendo el cambio de variable theta*$^2 = u(\theta)$.



$$\Delta E = E_f - E_0 = W_{\substack{NO \\ cons}} = \int_A^B \vec{F}_{Roz} \cdot d\vec{r} = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} f R N(\theta)\, d\theta$$

$$E_0 = mgR$$

$$E_f = \frac{m v_B^2}{2}$$

$$d\vec{r} = R\, d\theta\, \hat{e}_\theta$$

$$\vec{F}_{Roz} = -f N \hat{e}_\theta$$

coef de roz

$$\boxed{V_B = \sqrt{2gR - \frac{2fR}{m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} N(\theta)\, d\theta}}$$

$\hat{e}_r)\ -mR\dot{\theta}^2 = -N(\theta) + mg\,\mathrm{sen}\,\theta \xrightarrow{\text{aplico}} \frac{d}{dt} \rightarrow \left(-2mR\dot{\theta}\ddot{\theta} = -N'\dot{\theta} + mg\,\dot{\theta}\cos\theta\right)$

$\hat{e}_\theta)\ mR\ddot{\theta} = mg\cos\theta - fN(\theta)$

$\Rightarrow mR\ddot{\theta} = \frac{N'}{2} - \frac{mg}{2}\cos\theta$

$$mg\cos\theta - fN(\theta) = \frac{N'(\theta)}{2} - \frac{mg}{2}\cos\theta$$

$$3mg\cos\theta = N'(\theta) + 2fN(\theta) \xrightarrow{N(\theta) = \tilde{N}(\theta)e^{-2f\theta}} N'(\theta) = \tilde{N}'(\theta)e^{-2f\theta} - 2f\left[\tilde{N}(\theta)e^{-2f\theta}\right]$$

$$\boxed{3mg\cos\theta = \tilde{N}'(\theta)e^{-2f\theta}} \Rightarrow \tilde{N}(\theta) - \tilde{N}(0) = \int_0^\theta 3mg\cos\theta' e^{2f\theta'}d\theta'$$

es 0

xq $N(0) = 0$ $\quad e^{-2f\cdot 0} = 1 \Rightarrow N(0) = \tilde{N}(0)$