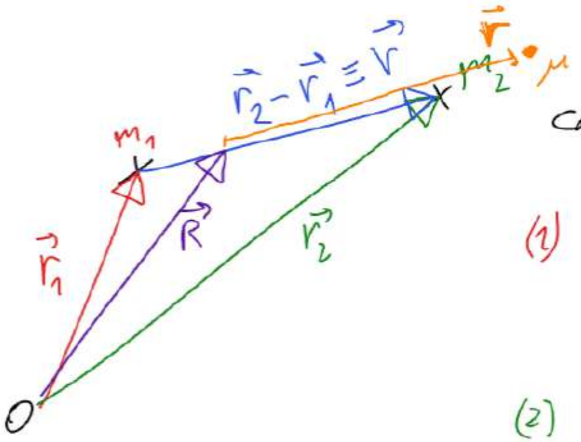
CLASE 10

Fuerzas Centrales

En la clase pasada (clase 9) vimos que si la fuerza es del tipo $\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\,\hat{e}_r \Rightarrow \exists$ un potencial $U(r)$ / $\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}\hat{e}_r$.

Por como son, estas fuerzas presentan una simetría esférica y se denominan "Fuerzas centrales". Las mismas son bastante frecuentes.

Por ejemplo, la interacción gravitatoria entre dos partículas es de este tipo o, más bien, puede reformularse como una fuerza de este tipo. ¡Veamos como!



Planteando la 2^{da} ley de Newton para cada partícula tenemos

$$(1) \quad m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = -\frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{G m_1 m_2 \vec{r}}{r^3}$$

$$(2) \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\frac{G m_1 m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = -\frac{G m_1 m_2 \vec{r}}{r^3}$$

Si hago $(1) + (2) \Rightarrow \underbrace{m_1 \ddot{\vec{r}}_1 + m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = 0}$ $\qquad \vec{R} \equiv \frac{(m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2)}{m_1 + m_2}$

esto es equivalente a decir $M \ddot{\vec{R}} = 0$ donde $M \equiv m_1 + m_2$ es la masa total

$\Rightarrow m_1 m_2 = \mu M$ donde $\mu = \frac{m_1 m_2}{}$

$$\frac{(2)}{m_2} - \frac{(1)}{m_1} \Rightarrow \underbrace{\ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1}_{\ddot{\vec{r}}} = -\frac{G\vec{r}}{r^3}(m_2 + m_1) \Rightarrow \frac{m_1 m_2}{(m_1+m_2)}\ddot{\vec{r}} = -\frac{G m_1 m_2}{r^3}\vec{r}$$

$m_1 m_2 = \mu M$ donde $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ es la masa reducida

$$\Rightarrow \boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{G M \mu}{r^3}\vec{r}}$$

¿Qué quiere decir esto?

El problema de dos cuerpos es equivalente a una partícula de masa M moviéndose libremente ($M\ddot{\vec{R}} = 0$) y una partícula de masa μ atraída por M a una distancia $\vec{r}$ de esta.

$\Rightarrow$ como M se mueve libre de fuerzas es $\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t$

puedo elegir mi referencial / $\vec{R}_0 = 0$ y $\vec{V}_0 = 0$ (sigue siendo un ref. inercial)

y entonces mi problema se reduce a

$$\boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{G M \mu}{r^2}\hat{e}_r}$$

r es la distancia al origen en este ref.

$\Rightarrow$ como M se mueve libre de fuerzas es $\vec{R}(t) = \vec{R}_0 + \vec{V}_0 t$

puedo elegir mi referencial / $\vec{R}_0 = 0$ y $\vec{V}_0 = 0$ (sigue siendo un ref. inercial)

$\mu \ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r}$

r es la distancia al origen en este ref.

$$\boxed{\begin{array}{l} \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \\ \vec{R} = \dfrac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \end{array}} \rightarrow \frac{M \vec{R}}{m_2} = \frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1 + \vec{r}_2$$

$$\frac{M \vec{R}}{m_2} - \vec{r} = \frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1 + \vec{r}_1$$

$$\Rightarrow \frac{M \vec{R}}{m_2} - \vec{r} = \frac{m_1 + m_2}{m_2} \vec{r}_1 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \vec{r}_1 = \vec{R} - \dfrac{m_2}{M} \vec{r} \\ \vec{r}_2 = \vec{R} + \dfrac{m_1}{M} \vec{r} \end{array}}$$

Cantidad de movimiento angular y torque (o momento) de una fuerza

Hay una cantidad relevante en los problemas de fuerzas centrales que es el momento angular o la cantidad de movimiento angular.

La relevancia radica en que es una constante del movimiento.

Se define el momento angular de una partícula en torno a un punto Q ($\vec{r}_Q$) como

$\vec{L}_Q = (\vec{r} - \vec{r}_Q) \times \vec{p}$ donde $\vec{p}$ es la cantidad de movimiento lineal de la partícula $\vec{p} = m\vec{v}$.

El momento angular en torno al origen $\vec{L}_O$ (o $\vec{L}$, directamente) es $\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}}$

Veamos que $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ en los probl. de fuerzas centrales

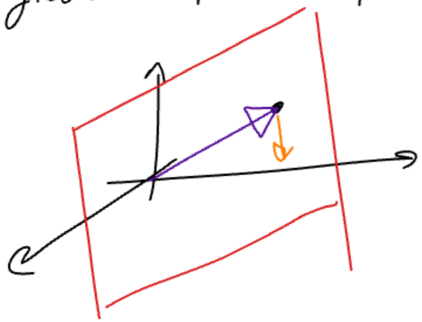
Fuerzas centrales

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times m\vec{v}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times (m\vec{v}) + \vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \cancel{\vec{v}\times m\vec{v}} + \underbrace{\vec{r}\times\vec{F}_{neta}}_{\text{torque de } \vec{F}_{neta} \text{ en torno al origen}} = \cancel{\vec{r}\times F(r)\hat{e}_r} = 0$$

En gral. el torque de una fuerza, aplicada en la posición $\vec{r}$, respecto de un punto Q $(\vec{r}_Q)$ es $\vec{\tau}_Q = (\vec{r}-\vec{r}_Q)\times\vec{F}$. (Más adelante, cuando veamos rígidos veremos más en detalle los torques)

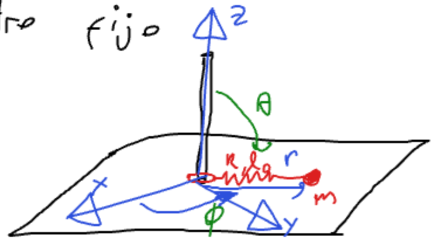
Obs: Si $\vec{L}$ es constante $\Rightarrow$ la trayectoria esta restringida al plano que forman la posición y la velocidad (iniciales)

este es el plano perpendicular a $\vec{L}$ (que contiene a $\vec{r}$)



Ejemplos

1) Hallar $\vec{L}$, $U(r)$ y escribir las ecs. de movimiento para un resorte sobre una mesa lisa unido a una masa m en un extremo y el otro fijo



$\vec{F}(\vec{r}) = -k(r-l_0)\hat{e}_r$ $\qquad \theta = \frac{\pi}{2}$

$U(r)$ es / $\frac{\partial U}{\partial r} = -(-k(r-l_0)) \Rightarrow U(r) = \frac{k(r-l_0)^2}{2}$

$\vec{L} = cte = \vec{r} \times m\vec{v} = (r\hat{e}_r) \times (m[\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\,\text{sen}\,\theta\,\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi])$

$= mr^2\dot{\phi}(-\hat{e}_\theta) \Rightarrow \boxed{\vec{L} = mr^2\dot{\phi}\hat{k}}$

$\theta = \frac{\pi}{2}, \dot{\theta} = 0, \ddot{\theta} = 0$

$\hat{e}_\theta = -\hat{k}$

$$m\ddot{\vec{r}} = -K(r-\ell_0)\hat{e}_r + \vec{N} + m\vec{g}$$

$$m\left[(\ddot{r} - r\cancel{\dot{\theta}^2}^{\,0} - r\,\underbrace{\mathrm{sen}^2\theta}_{1}\,\dot{\phi}^2)\hat{e}_r + (\cancel{r\ddot{\theta}}^{\,0} + \cancel{2\dot{r}\dot{\theta}}^{\,0} - r\dot{\phi}^2\,\cancel{\mathrm{sen}\theta\cos\theta}^{\,0})\hat{e}_\theta + (r\ddot{\phi}\,\overset{1}{\mathrm{sen}\theta} + 2\dot{r}\dot{\phi}\,\overset{1}{\mathrm{sen}\theta} + \cancel{2r\dot{\theta}\dot{\phi}\cos\theta}^{\,0})\hat{e}_\phi\right]$$

$$= -k(r-\ell_0)\hat{e}_r - N\hat{e}_\theta + mg\hat{e}_\theta$$

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \hat{e}_\theta = -\hat{k}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 &= -k(r-\ell_0) \\ 0 &= mg - N \\ mr\ddot{\phi} + 2m\dot{r}\dot{\phi} &= 0 \end{aligned}}$$

$$\ell \equiv |\vec{L}|$$

$$\ell^2 = m^2 r^4 \dot{\phi}^2$$

$$r(mr\ddot{\phi} + 2m\dot{r}\dot{\phi}) = 0$$

$$= \underbrace{mr^2\ddot{\phi} + 2mr\dot{r}\dot{\phi}}_{} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\phi}) = 0$$

$$\frac{d\ell}{dt}$$

$$\boxed{m\ddot{r} = -k(r-\ell_0) + \frac{\ell^2}{mr^3}}$$

2) Problema de 2 cuerpos (Hallemos $U(r)$, $\vec{L}$, ecs. de mov)

ya vimos que es equiv. a

$$\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{G\mu M}{r^2}\hat{e}_r \Rightarrow F(r) = -\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{G\mu M}{r^2} \Rightarrow \boxed{U(r) = -\frac{G\mu M}{r}}$$

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{v}\mu = \mu r\hat{e}_r \times (\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\dot{\phi}\,\text{sen}\theta\,\hat{e}_\phi)$$

$$\Rightarrow \vec{L} = \mu r^2(\dot{\theta}\hat{e}_\phi - \dot{\phi}\,\text{sen}\theta\,\hat{e}_\theta) \rightarrow \ell^2 = |\vec{L}|^2 = \mu^2 r^4 \underbrace{(\dot{\theta}^2 + \text{sen}^2\theta\,\dot{\phi}^2)}$$

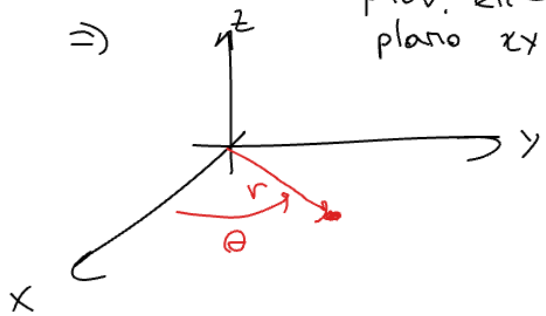
$\hat{e}_r)$

$$\mu(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2\text{sen}^2\theta) = -\frac{G\mu M}{r^2}$$

$$\mu\ddot{r} = \frac{\overbrace{\mu^2 r^4(\dot{\theta}^2 + \dot{\phi}^2\text{sen}^2\theta)}^{\ell^2}}{\mu r^3} - \frac{G\mu M}{r^2} \Rightarrow \boxed{\mu\ddot{r} = -\frac{G\mu M}{r^2} + \frac{\ell^2}{\mu r^3}}$$

En conclusión

Vemos que en grал. podemos restringirnos al plano determ. por la velocidad inicial y la pos. inicial y allí definir nuestro sist. de coord.

$\Rightarrow$ 

mov. en el plano xy

$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\hat{e}_r$

$$\Rightarrow m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r)$$

$$\underbrace{m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0}$$

$$\sim \frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0 = \frac{d\ell}{dt} \qquad \text{siendo } \ell = |\vec{L}|$$

$$(\ell^2 = m^2 r^4 \dot{\theta}^2)$$

$$\vec{L} = mr^2\dot{\theta}\,\hat{k}$$

$$m r \hat{e}_r \times (\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta)$$

Combinando va a ser:

$$\boxed{m\ddot{r} = F(r) + \frac{\ell^2}{mr^3}}$$

F…

$m r \hat{e}_r \times (\dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta)$ $\qquad\qquad$ $m r^3$

Formulas de Binet

Este es un método para tratar las ecuaciones que consiste en un cambio de variable $u = \frac{1}{r}$ y tomamos la dependencia de la variable en el ángulo θ.

Este método es particularmente útil para tratar el problema de Kepler

$$u(\theta) = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{du}{d\theta} = u' = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\frac{dt}{d\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = -\frac{m\dot{r}}{\ell}} \quad (*)$$

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} = u'' = -\frac{m}{\ell}\frac{d\dot{r}}{d\theta} = -\frac{m}{\ell}\frac{d\dot{r}}{dt}\frac{dt}{d\theta} = -\frac{m}{\ell}\frac{\ddot{r}}{\dot{\theta}} = -\frac{m^2 r^2 \ddot{r}}{\ell m r^2 \dot{\theta}} = -\frac{m^2 r^2 \ddot{r}}{\ell^2}} \quad (**)$$

Miremos la ec. de mov.

Miremos la ec. de mov.

$$m\ddot{r} = F\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{\ell^2 u^3}{m}$$

$\Rightarrow$ usando

$$(**) \quad -\frac{\ell^2}{m}u^2 u'' = F\left(\frac{1}{u}\right) + \frac{\ell^2}{m}u^3 \Rightarrow \boxed{u + u'' = -\frac{m}{\ell^2 u^2}F\left(\frac{1}{u}\right)}$$

Fórmula de Binet

para kepler es $F\left(\frac{1}{u}\right) = -GM\mu u^2$

$$u + u'' = \frac{GM\mu^2}{\ell^2} = cte$$

Además en términos de u la velocidad v y aceleración a ...

para Kepler es $F(\frac{1}{u}) =$ [illegible]

$$u + u'' = \frac{GM\mu^2}{\ell^2} = cte$$

Además en términos de u la velocidad v y aceleracion a son

$$\boxed{v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2} = \sqrt{\frac{\ell^2}{m^2}u'^2 + \frac{\ell^2}{m^2 r^2}} = \frac{\ell}{m}\sqrt{u'^2 + u^2}}$$

(*)

$$\boxed{a = \frac{F(\frac{1}{u})}{m} = -\frac{\ell^2 u^2}{m^2}(u + u'')}$$

Sol al problema de Kepler

Sol al problema de Kepler

$$u + u'' = \frac{GM\mu^2}{\ell^2} \quad (NH) \qquad \text{Sol part. (NH) es } u_p = \frac{GM\mu^2}{\ell^2} \ (\text{ctc}) \Rightarrow u_p'' = 0$$

$$u + u'' = 0 \quad (H) \qquad u_H'' = -u_H \rightarrow u_H = A\cos(\theta + \delta)$$

$$\Rightarrow u = u_H + u_p = 1/p + A\cos(\theta+\delta)$$

donde $p = \frac{\ell^2}{GM\mu^2}$ es lo que se conoce como el parámetro de la cónica

$$\Rightarrow \frac{1}{u} = \boxed{r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\theta+\delta)}}$$

$pA \equiv \varepsilon$ es la excentricidad