CLASE 11

Leyes de Kepler

1) las órbitas planetarias son elípticas con el sol en un foco

[1') las órbitas son elípticas, parabólicas o hiperbólicas]

2) El vector radial recorre áreas iguales en tiempos iguales

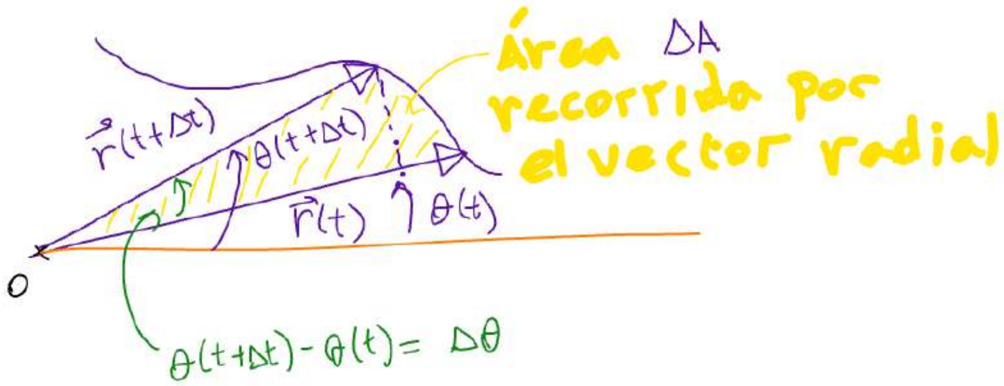
3) El cuadrado del período varía con el cubo del semieje mayor (de la elipse)

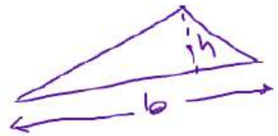
Prueba

Prueba

Lex 2

1) nos pasamos en el plano de la trayectoria





$$\to \Delta A = \frac{bh}{2} = \frac{r(t)\, r(t+\Delta t) \operatorname{sen}(\Delta\theta)}{2}$$

$$\lim_{\substack{\Delta t \to 0 \\ (\Delta\theta \to 0)}} \Delta A = \frac{r^2(t)\,\Delta\theta}{2}$$ (a primer orden en $\Delta\theta$ Δt)

$$\Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{r^2(t)\,\Delta\theta}{2\,\Delta t}$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt} = \frac{r^2 \dot{\theta}}{2} = \frac{l}{2m}$$

siendo l el módulo del momento angular (cte)

Recordemos la sol al problema de Kepler:

Usando la ec. de Binet teníamos

(Acá uso μ porque asumo que reduje el probl. de dos cuerpos a 1 de 1 cuerpo bajo la acción de una fuerza central)

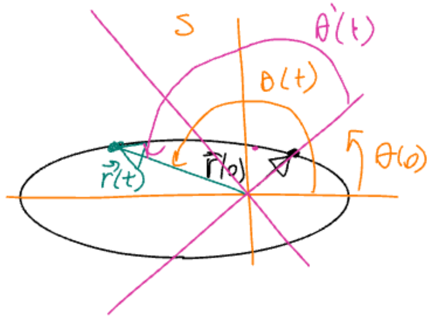
$$u + u'' = \underbrace{\frac{GM\mu^2}{\ell^2}}_{=\frac{1}{p}} = \left(-\frac{\mu}{u^2\ell^2} F\left(\frac{1}{u}\right)\right)$$

donde $u = \frac{1}{r}$, $u' = \frac{du}{d\theta}$, $u'' = \frac{d^2u}{d\theta^2}$ $F\left(\frac{1}{u}\right) = F(r)$ es el módulo de la fuerza $\vec{F}(r) = F(r)\hat{e}_r$

Resuelvo la homogenea

$$u_H + u_H'' = 0 \Rightarrow u_H = A\cos(\theta + \delta)$$

$$u_p + u_p'' = \frac{1}{p} \Rightarrow u_p = \frac{1}{p} \quad \text{de esa forma } \frac{d^2 u_p}{d\theta^2} = 0$$



$\Rightarrow$ la solución es

$$\frac{1}{r} = u = u_p + u_H = \frac{1}{p} + A\cos(\theta + \delta)$$

$$\Rightarrow r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\theta' + \delta)}$$ $\longrightarrow$ puedo elegir el eje desde el que mido θ / $\delta = 0$ $\Rightarrow$ $$\boxed{r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos(\theta)}}$$

con $\varepsilon = Ap$

1ª ley

recordemos que una elipse se escribe como:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(si: $a=b=R$ tenemos el círculo
$\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{R^2} = 1 \rightarrow x^2+y^2=R^2$)

una parábola es:

$$x = a + by + cy^2$$

una hipérbola es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Con esto en mente

Con esto en mente

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\theta} \longrightarrow r + \varepsilon r\cos\theta = p \to r = p - \varepsilon r\cos\theta \quad (*)$$

pero $r = \sqrt{x^2+y^2}$ $\Rightarrow$ haciendo $(*)^2 \longrightarrow x^2+y^2 = p^2 - 2p\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2$

$x = r\cos\theta$

$$\Rightarrow \quad x^2(1-\varepsilon^2) + 2p\varepsilon x + y^2 = p^2$$

si $\varepsilon = \pm 1 \Rightarrow x = \frac{p}{2} \mp \frac{y^2}{2p}$ parábola!!

$$x^2 + \frac{2p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}x + \left[\frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right]^2 - \left[\frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right]^2 + \frac{y^2}{1-\varepsilon^2} = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\left(x + \frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-\varepsilon^2} = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}\left[1 + \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\right] = \frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2}}$$

si $\varepsilon < 1$ tengo una elipse desplazada.

(si $\varepsilon = 0$ tenemos un circulo $x^2 + y^2 = p^2$)

$$\frac{(x+x_0)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $a^2 = \frac{p^2}{1-\varepsilon^2}$

$b^2 = p^2$

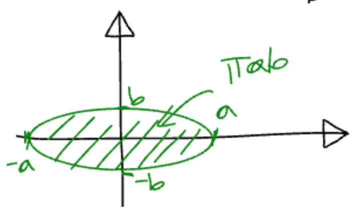
si $\varepsilon > 1$ tenemos una hipérbola

$$\Rightarrow \left(x - \frac{p\varepsilon}{\varepsilon^2-1}\right)^2 - \frac{y^2}{\varepsilon^2-1} = -\frac{p^2}{\varepsilon^2-1}$$

3ª ley

como $\frac{dA}{dt} = cte = \frac{\ell}{2m} \Rightarrow \frac{\ell}{2m} = \frac{\text{Área elipse}}{\text{periodo}} = \frac{\pi a b}{T}$

para una elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ su área es πab



$$\int_S dx\,dy = ab\int dx'\,dy' = ab\int_0^1\int_0^{2\pi} r\,dr\,d\theta = \pi ab$$

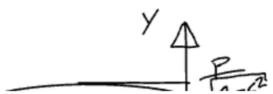
$x' = \frac{x}{a}$

$y' = \frac{y}{b}$

Nosotros teníamos esta ecuación

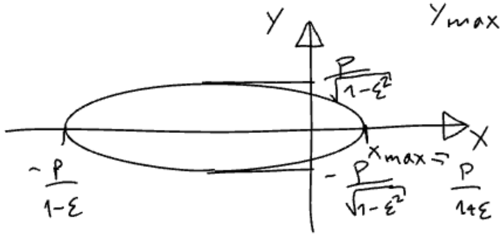
$$\left(x+\frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^2 + \frac{y^2}{1-\varepsilon^2} = \frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2}$$

y_{max} es / $\frac{y_{max}^2}{\cancel{1-\varepsilon^2}} = \frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^{\cancel{2}}} - \overbrace{\left(x+\frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^2}^{=0}$



Nosotros teníamos esta ecuación

$$\left(x+\frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^2+\frac{y^2}{1-\varepsilon^2}=\frac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^2}$$



y_{max} es / $\dfrac{y_{max}^2}{\cancel{1-\varepsilon^2}}=\dfrac{p^2}{(1-\varepsilon^2)^{\cancel{2}}}-\overbrace{\left(x+\frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\right)^2}^{=0}$

$$x_{\substack{max\\min}}=\pm\frac{p}{1-\varepsilon^2}-\frac{p\varepsilon}{1-\varepsilon^2}$$

$$x_{max}=\frac{p(1-\varepsilon)}{1-\varepsilon^2}=\frac{p(1-\varepsilon)}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)}=\frac{p}{1+\varepsilon}$$

$$x_{min}=-\frac{p(1+\varepsilon)}{1-\varepsilon^2}=-\frac{p(1+\varepsilon)}{(1+\varepsilon)(1-\varepsilon)}=-\frac{p}{1-\varepsilon}$$

$\Rightarrow$ el semeje a es

$$\frac{x_{max}-x_{min}}{2}=\frac{1}{2}\left[\frac{p}{1+\varepsilon}+\frac{p}{1-\varepsilon}\right]=\frac{p}{1-\varepsilon^2}=a$$

$$\frac{y_{max}-y_{min}}{2}=\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=b$$ siendo b el otro semeje.

$$\left(\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^2\cdot\frac{1}{p}=a$$

$$\Rightarrow \pi ab=\pi a\sqrt{ap}=\pi p^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}$$

$\frac{dA}{} = \ell = \frac{\pi ab}{}$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{X_{max}-X_{min}}{2}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{p}{1+\varepsilon}+\dfrac{p}{1-\varepsilon}\right]=\dfrac{p}{1-\varepsilon^2}=a \\[2ex] \dfrac{Y_{max}-Y_{min}}{2}=\dfrac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}=b \quad \text{siendo } b \text{ el otro semieje.}\end{array}\right\} \Rightarrow \pi a b = \pi a\sqrt{ap} = \pi p^{1/2} a^{3/2}$$

$$\left(\frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{p} = a$$

$\rightarrow$ Volviendo a la expresión $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{\ell}{2\mu} = \dfrac{\pi a b}{T}$

$$\Rightarrow T = \frac{\pi a b \, 2\mu}{\ell} = \frac{\pi p^{1/2} a^{3/2} 2\mu}{\ell}$$

recordando que $p = \dfrac{\ell^2}{GM\mu^2}$ $\Rightarrow$ $\boxed{T^2 = \dfrac{\pi^2 p \, a^3 4\mu^2}{\ell^2} = \dfrac{\pi^2 \cancel{\ell^2} a^3 4 \cancel{\mu^2}}{GM\cancel{\mu^2}\cancel{\ell^2}} = \dfrac{4\pi^2}{GM} a^3}$

Curiosidades Astronómicas

- Cometas en gral. provienen de
- La mayoría de los ast. son del cinturon de asteroides
- En 2017 se observa un objeto "C/2017 U1" con una excentricidad $\varepsilon \approx 1{,}2$ cambió luego a llamarse "A/2017 U1" (conclusiones acerca de su composición) y ahora se lo conoce como 1I/'Oumuamua
- Hasta entonces el record era de un objeto C/1980 E1 con $\varepsilon \sim 1{,}057$ y en realidad luego se concluyó se había acelerado al interactuar con Júpiter.

- Alguna extinción masiva se debió (o se cree que se debió) al impactó de meteoritos sobre la tierra. La más conocida es la extinción de los dinosaurios hace $\sim$ 65 millones de años a causa de un meteorito de 10 Km de diametro que impactó en México.

Volvemos al curso

Energía

Veamos 2 enfoques:

1) Sabemos, por definición de fuerza central, que la fuerza proviene de un potencial

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\nabla U(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}\hat{e}_r \,. \quad \Rightarrow \text{ la energía se conserva.}$$

La energía cinética es:

potencial centrífugo

$$K = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{\overbrace{m^2 r^4 \dot{\theta}^2}^{\ell^2}}{2mr^2} = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{\ell^2}{2mr^2}$$

La energía potencial es: $U(r)$

$$\Rightarrow \quad E = K + U = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{\ell^2}{2mr^2} + U(r)$$ es una constante del movimiento.

$$\Rightarrow \quad E = K + U = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{\ell^2}{2mr^2} + U(r)$$ es una constante del movimiento.

2) De la ec. de mov. es

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r) \Rightarrow m\ddot{r} = F(r) + mr\dot{\theta}^2 = F(r) + \frac{m^2 r^4 \dot{\theta}^2}{mr^3} = F(r) + \frac{\ell^2}{mr^3}$$

$$\frac{d\ell}{dt} = 0 \Leftrightarrow m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0$$

$\Rightarrow$ puedo multiplicar por $\dot{r}$

$$m\dot{r}\ddot{r} = -\dot{r}\frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\ell^2}{mr^3}\dot{r} = -\frac{d}{dt}\left(U + \frac{\ell^2}{2mr^2}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\frac{\dot{r}^2}{2}\right) \qquad \Rightarrow \frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\frac{m\dot{r}^2}{2} + U + \frac{\ell^2}{2mr^2}}_{cte}\Big) = 0$$

Podemos escribir entonces

Podemos escribir entonces

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{eff})}$$ donde $U_{eff} = \frac{l^2}{2mr^2} + U(r)$ es el potencial efectivo

$\Rightarrow$ Esto es similar a cuando vimos fuerzas dep. de la posición en el caso 1D

$$(t - t_0) = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r(t_0)}^{r(t)} \frac{dr}{\sqrt{E - U_{eff}(r)}}$$ el signo se fija con la cond. inicial.

Tambien podemos eliminar el tiempo y hallar $r(\theta)$ como

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \frac{dr}{d\theta}\frac{l}{mr^2} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{eff})} \Rightarrow \theta - \theta_0 = \pm \frac{l}{\sqrt{2m}} \int_{r(\theta_0)}^{r(\theta)} \frac{dr}{r^2\sqrt{E - U_{eff}}}$$

ojo que en las notas del 99 creo que tienen un error