CLASE 12

En los problemas de fuerzas centrales teníamos que

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \overbrace{\underbrace{\frac{\ell^2}{2mr^2}}_{\substack{\text{potencial}\\ \text{centrífugo}}} + U(r)}^{U_{eff}}$$

siendo $U(r)$ el potencial de la fuerza central

y ℓ el módulo del momento angular

$$\ell = mr^2\dot{\theta}$$

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - U_{eff}}$$

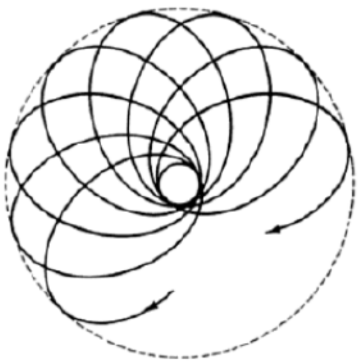
$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{E - U_{eff}} \rightarrow \frac{dr}{d\theta} = \sqrt{\frac{2}{m}}\frac{mr^2}{\ell}\sqrt{E - U_{eff}}$$

Terminamos la clase pasada con la siguiente expresión

$$\boxed{\theta - \theta_0 = \int_{\theta_0}^{\theta} d\theta' = \pm\frac{\ell}{\sqrt{2m}}\int_{r(\theta_0)}^{r(\theta)} \frac{dr'}{r^2\sqrt{E - U_{eff}}}} \qquad (*)$$

Órbitas en un campo central (Teorema de Bendixson-Dulac)

Cuando el movimiento de una partícula en un potencial $U(r)$ sea periódico, diremos que la órbita es cerrada. De lo contrario, diremos que la órbita es abierta.



Si la trayectoria no se cierra nunca es una tray. abierta.

Si se cierra, eventualmente, es cerrada.

Fig. 8.4 Libro Marion

Fig. 8.4 Libro Marion

Usando ⊛ podemos calcular $\Delta\theta$ entre r_{min} y r_{max}

$$\Delta\theta = \frac{\ell}{\sqrt{2m}} \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr'}{r'^2\sqrt{E-U_{eff}}}$$

$\Rightarrow$ si $\Delta\theta$ es una fracción racional de 2π

$\Rightarrow$ la trayectoria es cerrada

$\left(\Delta\theta = \frac{p}{q} 2\pi \text{ con } p \text{ y } q \in \mathbb{Z}\right)$

sino la trayectoria es abierta.

Bendixson-Dulac

Si $U(r) = \alpha r^{n+1}$ da órbitas cerradas (no circulares)

sólo si $n = -2$ (caso de kepler o coulomb)

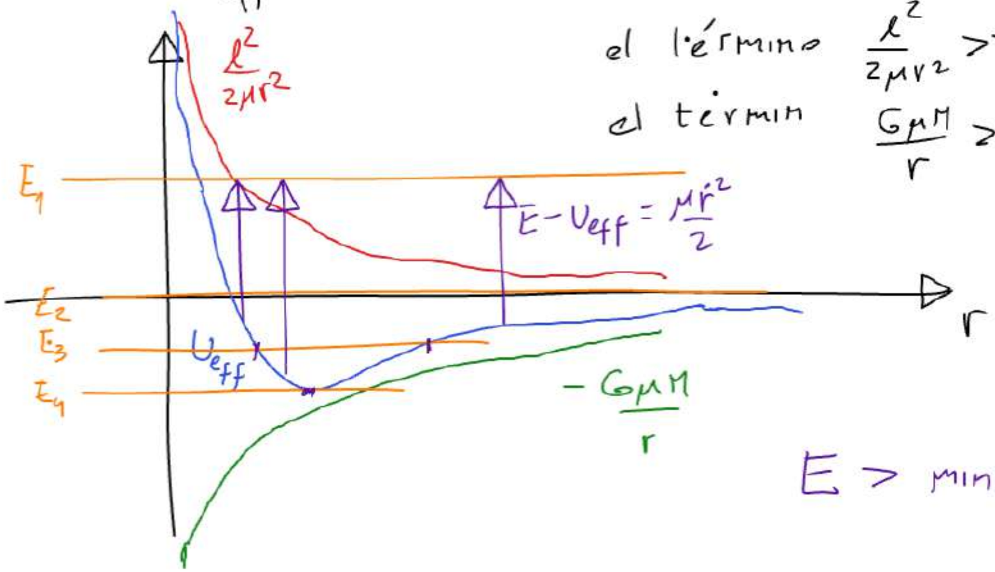
si $n = 1$ (caso del oscilador armónico)

En el caso de kepler E y ℓ que son constantes de mov.

En el caso de Kepler E y ℓ que son constantes de mov. determinan completamente el movimiento.

$$E = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} + \underbrace{\frac{\ell^2}{2\mu r^2} - \frac{G\mu M}{r}}_{U_{eff}}$$

grafiquemos U_{eff}



el término $\frac{\ell^2}{2\mu r^2} \gg \frac{G\mu M}{r}$ si $r \to 0$

el término $\frac{G\mu M}{r} \gg \frac{\ell^2}{2\mu r^2}$ si $r \to \infty$

$E > \min U_{eff}$

$\varepsilon > 1$

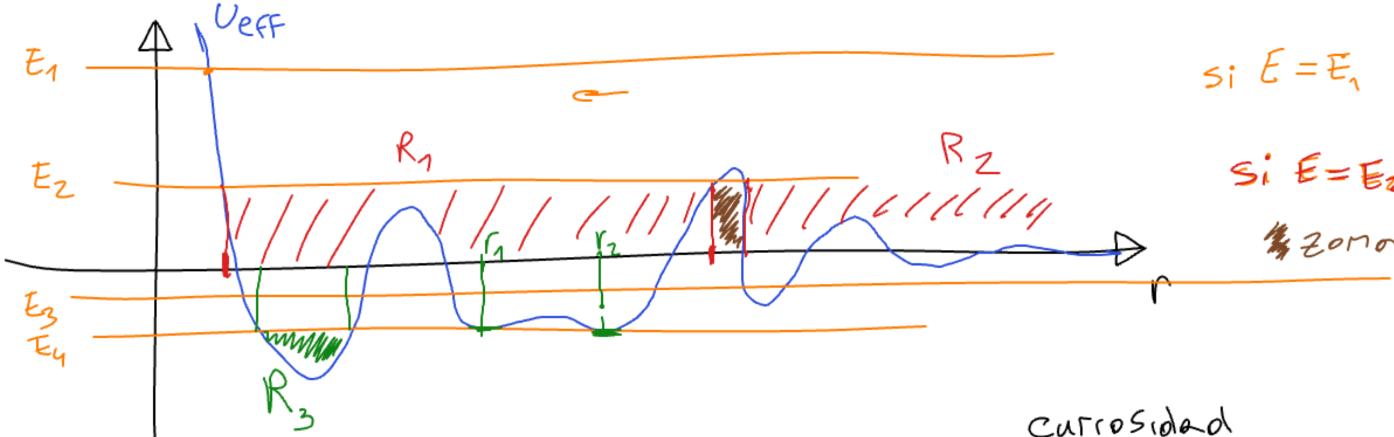
si $E = E_1 > 0$ trayectoria hiperbólica

si $E = E_2 = 0$ trayectoria parabólica

si $E = E_3 < 0$ trayectoria elíptica

si $E = E_4 = \min U_{eff}$ trayectoria circular

Este análisis se puede hacer para cualquier tipo de potencial



si $E=E_1$ mi trayectoria no es acotada

Si $E=E_2$ puedo estar o en R_1 o en R_2 dependiendo de las c.I.
(R_2 es no acotada)

zona prohibida

Si $E=E_4 \Rightarrow$ tengo 3 posibles comportamientos 2 trayectorias circulares con r_1 o r_2
y una trayectoria acotada en la región R_3

movimientos circulares corresponden a máximos o mínimos del U_{eff}.

Los máximos son mov. circ. inestables
y los mínimos son mov. circ. estables

curiosidad

Efecto tunneling

En mecánica cuántica la partícula puede "tunelear" de un lado a otro e incluso ser encontrada en la región prohibida!!

Dispersion (Scattering), sección eficaz, Dispersión de esferas duras y dispersion de Rutherford

La sección eficaz es una medida de que un cierto proceso tenga lugar cuando se da un fenómeno de proyectil-objetiva

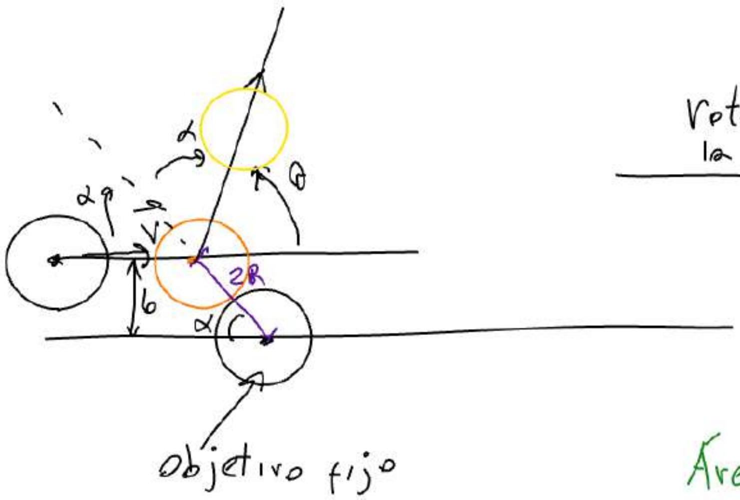
La sección eficaz de Rutherford, que vamos a discutir en breve es una medida de la prob. de que una particula α se desvíe un angulo dado de su tray. hacie un blanco objetivo.

Tipicamente se utiliza σ y tiene unidades de área. Este temática es muy importante para un monton de ramos de la fisica (partículas, campos, materia condensada, etc), donde la forma en que se dispersan o interactúan las particulas revela información sobre la teoria, la composición o la estructura de materiales.

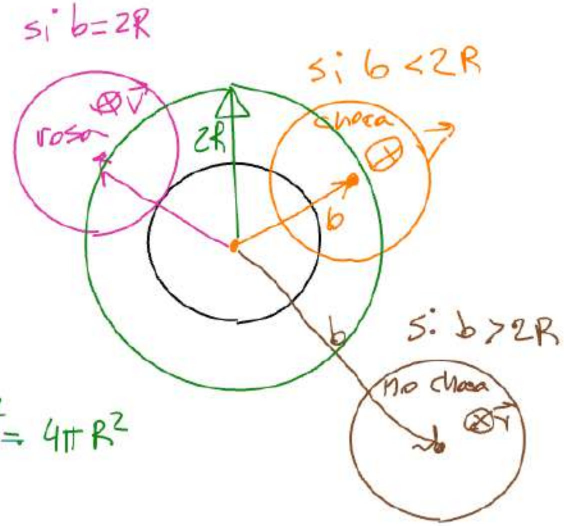
Disp. de esferas duras

Consideremos el caso en que el objetivo y el proyectil sean esferas de radio R

$\Rightarrow$ el área que ofrece de impacto el objetivo es $\sigma = \pi (2R)^2$.

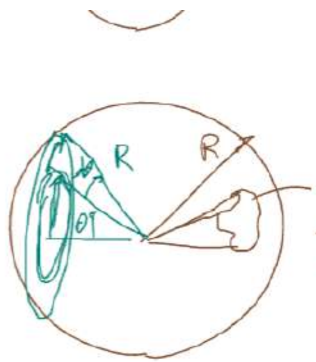


rotamos la vista



Área $= \pi (2R)^2 = 4\pi R^2$

como el ángulo θ que se dispersa, depende de b vamos a definir la seccion eficaz diferencial



$$ds = R^2 d\Omega$$

$$\frac{ds}{4\pi R^2} = \frac{d\Omega}{4\pi}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{ds}{R^2} = d\Omega$$

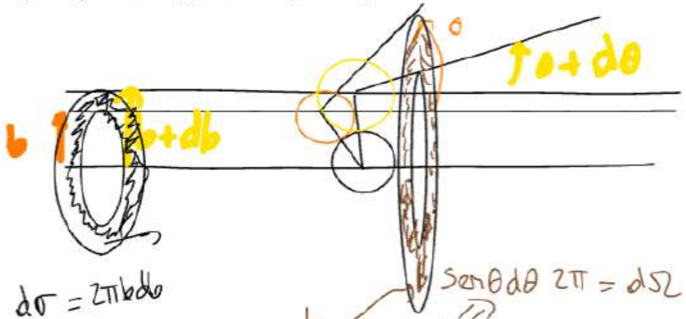
$$\pi = 2\alpha + \theta \Rightarrow \alpha = \frac{\pi - \theta}{2}$$

$$b = 2R\,\text{sen}(\alpha)$$

$$b = 2R\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) = 2R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Si modifico el parametro de impacto de b a $b+db$

θ va a variar de θ a $\theta + d\theta$



$$b + db = 2R\cos\left(\frac{\theta + d\theta}{2}\right)$$

$$\simeq \underbrace{2R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}_{b} - R\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta + o(d\theta^2)$$

$$\Rightarrow db \simeq -R\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta$$

$d\sigma = 2\pi b\, db$

$\text{sen}\theta\, d\theta\, 2\pi = d\Omega$

$ds = (2\pi R\,\text{sen}\theta) R\, d\theta$

$= R^2 d\Omega$

convención para que sea positivo

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|\frac{2\pi b\, db}{2\pi\,\text{sen}\theta\, d\theta}\right| = \frac{b}{\text{sen}\theta}\left|\frac{db}{d\theta}\right| = \frac{\cancel{2}R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) R\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cancel{\text{sen}\theta}} = R^2$$

sección eficaz dif.

$$\text{Sen}\,\theta = \text{Sen}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = 2\,\text{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega}\, \underbrace{d\Omega}_{\text{sen}\theta\, d\theta\, d\phi} = \int R^2\,\text{sen}\theta\, d\theta\, d\phi = 4\pi R^2$$

Rutherford

Rutherford

$$U(r) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

calculemos $\frac{d\sigma}{d\theta}$

$r_{inicial} = \infty$

$\theta_{inicial} = \pi$

r^* = distancia de mayor acercamiento

θ^* = ángulo correspondiente a la distancia de mayor acercamiento

Teníamos
$$\theta = \theta_0 \pm \frac{\ell}{\sqrt{2m}} \int_{r(\theta_0)}^{r(\theta)} \frac{dr}{r^2\sqrt{E-U_{eff}}}$$
∞

$\Rightarrow$ Al acercarse va de

$(r_{inicial}, \theta_{inicial})$

$\downarrow$

(r^*, θ^*)

$$\to \theta^* = \pi + \frac{\ell}{\sqrt{2m}} \int_{\infty}^{r^*} \frac{dr}{r^2\sqrt{E-U_{eff}}}$$
$-$ r^*

luego, al alejarse, va desde θ^* y r^* a θ_f y ∞

$$\Rightarrow \theta_f = \theta^* - \frac{\ell}{\sqrt{2m}} \int_{r^*}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{E-U_{eff}}}$$

$$\to \theta_f = \pi - \ell\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{r^*}^{\infty} \frac{dr}{r^2\sqrt{E-U_{eff}}}$$

(r^*, θ^*)

$$\vec{L} = m\vec{r}\times\vec{V} = m\overbrace{r\,\text{sen}\theta}^{b}\, v_0\,\hat{u}$$

$$\Rightarrow \ell = m v_0 b$$

$$E - U_{eff} = \frac{m v_0^2}{2}\left(1-\frac{b^2}{2r^2}\right) - \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad\Rightarrow\quad \frac{d\theta}{db} \text{ es calculable}$$

Sigue siendo cierto, al igual que en esferas duras,

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left|\frac{2\pi b\,db}{\text{sen}\theta\, 2\pi\, d\theta}\right| = \frac{b}{\text{sen}\theta}\underbrace{\frac{db}{d\theta}}_{\left(\frac{d\theta}{db}\right)^{-1}} = \left(\frac{Qq}{8\pi\varepsilon_0 m v_0^2\, \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)^2}$$

→ cuentas en doc aparte

$\sigma_{Ruth} = \infty$

Interacción de alcance infinito