CLASE 15

Sistemas de partículas

Hasta ahora venimos discutiendo siempre (o casi) los cuerpos como partículas puntuales. Sin embargo, está claro que esto es una aproximación. La realidad es que los cuerpos están compuestos de partículas y, en general, de muchas partículas.

Comencemos por 2 partículas y su interacción

La 2da ley de Newton para c/partícula nos dice que:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_{ext/1} + \vec{F}_{2/1}$$

$$\frac{d\vec{p}_2}{dt} = m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_{ext/2} + \vec{F}_{1/2}$$

($\vec{F}_{i/j}$ es la fuerza de la part. i sobre j)

Por la 3ra ley de Newton es $\vec{F}_{2/1} = -\vec{F}_{1/2}$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{P}_1+\vec{P}_2) = \vec{F}_{ext_1} + \vec{F}_{ext_2} = \vec{F}^{\,neta}_{ext}$$

en un tiempo τ pequeño las partículas 1 y 2 interactúan intensamente ($|\vec{F}_{ij}| \gg |\vec{F}_{ext}|$) $\Rightarrow \Delta(\vec{P}_1+\vec{P}_2) \approx \vec{F}^{\,neta}_{ext}\,\tau \approx 0$ si τ muy pequeño

¿Qué quiere decir $\Delta(\vec{P}_1+\vec{P}_2) \approx 0$? $\longrightarrow \Delta\vec{P}_1 \approx -\Delta\vec{P}_2$

$$\Delta\vec{P}_1 \approx (\vec{F}_{2/1} + \vec{F}_{ext_1})\,\tau \approx \vec{F}_{2/1}\,\tau$$

$$-\Delta\vec{P}_2 \approx \vec{F}_{1/2}\,\tau$$

A la cantidad $\vec{P}_1+\vec{P}_2$ le llamamos cantidad de movimiento total $\vec{P}$ (para muchas partículas será $\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i$)

(para muchos partículas será $\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i$)

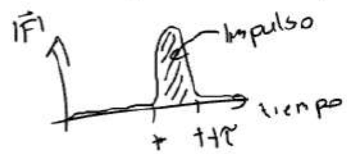
Está situación es lo que sucede en los choques. durante un muy corto periodo de tiempo que es lo que dura la interacción será $|\vec{F}_{i,j}| >> |\vec{F}_{ext,i}|$.

$\Rightarrow$ En estas situaciones la cantidad de movimiento total antes y después del choque se conserva.

$$\Delta \vec{P}^{(total)} \approx 0 \Rightarrow \vec{P}^{(total)}_{\substack{\text{antes}\\ \text{del}\\ \text{choque}}} \approx \vec{P}^{(total)}_{\substack{\text{después}\\ \text{del}\\ \text{Choque}}}$$

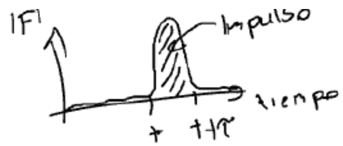
Esto **no** quiere decir que la cont. de mov de cada partícula no cambie.

si una partícula recibió una intensa fuerza $\vec{F}$ entre t y $t+\tau$ definimos el impulso de la fuerza como $\vec{I} = \int_t^{t+\tau} \vec{F}(t)\,dt$



$t+\tau$ $t+\tau$

el impulso de la fuerza como $\vec{I} = \int_t^{t+\tau} \vec{F}(t)\,dt$



$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F} + \vec{F}_{otras} \qquad \vec{p}_i(t+\tau) - \vec{p}_i(t) = \int_t^{t+\tau} \vec{F}(t')\,dt' + \int_t^{t+\tau} \vec{F}_{otras}(t')\,dt' \approx \vec{I} + O(\vec{F}_{otras}\,\tau)$$

$|\vec{F}| >> |\vec{F}_{otras}|$

$+ \ \tau$ pequeño

implica $\boxed{\Delta\vec{p}_i = \vec{I}}$

Volviendo al choque de partículas (suponemos que no hay otras fuerzas más que la interacción) $\Rightarrow \frac{d}{dt}(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = 0 \rightarrow \vec{P}^{(tot)} = cte$

Este es un ejemplo de ley de conservación

→ si no hay $\vec{F}_{ext} \Rightarrow \vec{P}^{(tot)}$ se conserva

→ si no hay $W_{no\ cons} \Rightarrow E_{mecánica}$ se conserva

→ si las fuerzas son centrales $\Rightarrow \vec{L}$ se conserva

Centro de masas

lo definimos en consecuencia de la cont. de mov. total en ausencia de fuerzas externas

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2) = 0$$

$m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} + m_2\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = 0 \Rightarrow$ definimos $\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1+m_2}$ la posición del centro de masas como un promedio ponderado de la ubicación de las masas que tiene por consecuencia que en ausencia de $\vec{F}_{ext}$ es $\frac{d^2\vec{r}_{CM}}{dt^2} = 0$

y $\Rightarrow$ $\underline{\vec{v}_{CM} = cte}$.

En gral. el centro de masas de n partículas es

$$\vec{r}_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i\vec{r}_i}{M} \quad \text{con } M = \sum_{i=1}^{n} m_i \text{ la masa total.}$$

En los choques de 2 partículas el movimiento relativo está regido por la fuerza responsable de la interacción (como ya vimos en el scattering (dispersión) de Rutherford)

$\Rightarrow$ si conocemos la interacción podemos calcular (al menos numéricamente) la evolución exacta (clásicamente) de las partículas.

Sin embargo, aunque no conozcamos la interacción exacta podemos utilizar las leyes de conservación para sacar ciertas conclusiones de los posibles movimientos.

Definimos el estado inicial (in state) como el estado cuando las partículas están muy separadas y su interacción es despreciable.

Definimos el estado final (out state) como el estado cuando las partículas, luego de interactuar intensamente, están muy separadas y su interacción es despreciable.

Vamos a diferenciar entre 2 tipos de choques:

Choques elásticos → la energía se conserva

Choques inelásticos → la energía no se conserva.
(se invierte energía en la deformación de los objetos o en forma de energía térmica)

Vamos a definir 2 referenciales

Referencial del Laboratorio (RL)
↓
sist. de referencia en que una partícula esté en reposo (objetivo) y otra es móvil (proyectil)

Referencial del centro de masas. (RCM)
↓
sist. de referencia en que el momento lineal total es nulo.

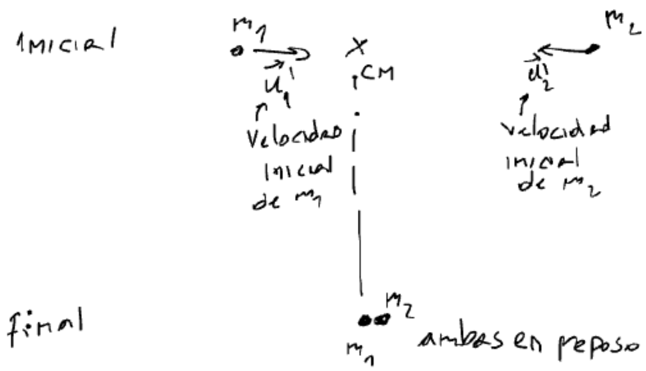
$$\vec{p}_1+\vec{p}_2=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2=0=M\frac{d\vec{r}_{cm}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\vec{r}_1+m_2\vec{r}_2)=\frac{d}{dt}(Mr_{cm})$$

$$\Rightarrow \vec{r}_{cm}=cte.$$

¿Cuál es la máxima energía cinética que puede perderse en un choque?

Si nos paramos en el R.C.M. $\Rightarrow$ se puede perder toda la energía cinética (compatible con la cons. de la cant. de mov.)



$$K_0' = \frac{m_1 u_1'^2}{2} + \frac{m_2 u_2'^2}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} K_1' = \frac{m_1 0^2}{2} = 0 \\ K_2' = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{K_f' = 0}$$

$\Rightarrow$ la mayor pérdida de energía posible se da cuando las partículas quedan unidas luego del choque

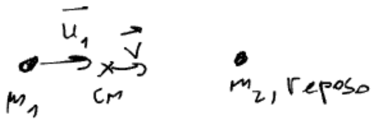
lo llamamos choque totalmente inelástico.

$\Rightarrow$ la mayor pérdida de energía posible se da cuando las partículas quedan unidas luego del choque

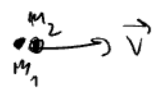
lo llamamos choque totalmente inelástico.

En el ref. de laboratorio esto corresponde al choque

inicial



final



(ambas con velocidad $\vec{V}$)

$$K_0 = \frac{m_1 u_1^2}{2} \qquad \vec{V} = \frac{m_1 \vec{u}_1}{m_2 + m_1} \qquad \Rightarrow \quad K_f = \frac{(m_1+m_2)}{2} \overbrace{\frac{m_1^2}{(m_1+m_2)^2} u_1^2}^{V^2} = K_0 \frac{m_1}{m_1+m_2}$$

$$K_f - K_0 = \Delta K = -K_0 \frac{m_2}{m_1+m_2}$$

m_i masa de la part. i

$\vec{u}_i$ es la velocidad inicial de m_i en RL ($\vec{u}_2 = 0$)

$\vec{u}_i'$ 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 RCM

$\vec{v}_i$ 〃 〃 〃 final de m_i en RL

$\vec{v}_i'$ 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 RCM

K_0 es la energía cinética total inicial en RL

K_0' 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 RCM

K_i 〃 〃 〃 〃 de m_i final en RL

K_i' 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 〃 RCM

$\vec{V}$ es la velocidad del centro de masas en RL

ψ ángulo de desviación de m_1 en RL

ζ 〃 〃 〃 〃 m_2 en RL

θ 〃 〃 〃 〃 m_1, m_2 en RCM

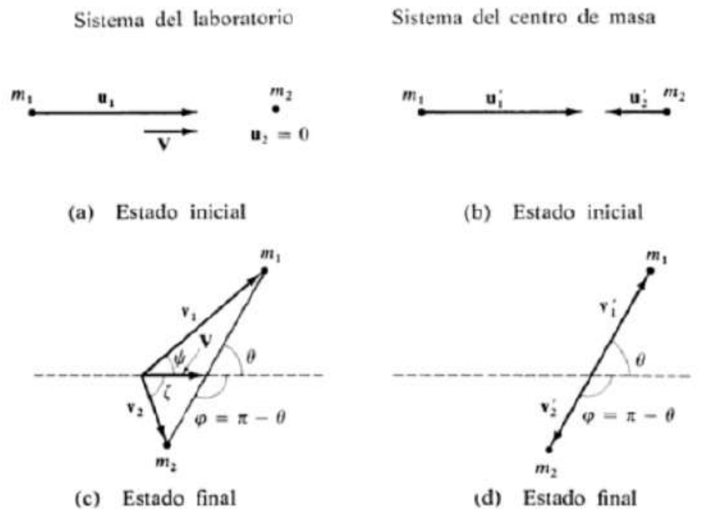


fig 9.1
Libro de
J.B. Marion

Analicemos el estado inicial planteando la cinemática

$$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \underbrace{\vec{u}_2}_{\vec{u}_2 = 0} = \underbrace{M}_{m_1+m_2} \vec{V} \Rightarrow \boxed{\vec{V} = \frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{u}_1}$$

en el RCM

$$\vec{u}_1' = \vec{u}_1 - \vec{V}$$

$$\vec{u}_2' = \vec{u}_2 - \vec{V} = -\vec{V} \Rightarrow \boxed{\vec{u}_2' = -\frac{m_1}{m_1+m_2} \vec{u}_1}$$

$$\boxed{\vec{u}_1' = \frac{m_2}{m_1+m_2} \vec{u}_1}$$

si la energía se conserva

En el RCM es

$$|\vec{u}_1'| = |\vec{v}_1'| \quad y \quad |\vec{u}_2'| = |\vec{v}_2'|$$

Prueba

$$\frac{m_1 u_1'^2}{2} + \frac{m_2 u_2'^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}$$

$$\frac{m_1 m_2^2 u_1^2}{2(m_1+m_2)^2} + \frac{m_2 m_1^2 u_1^2}{2(m_1+m_2)^2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_1^2}{2m_2} v_1'^2$$

$$\Rightarrow \boxed{v_1'^2 = \frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2} u_1^2 = u_1'^2}$$

$$m_1 v_1' = m_2 v_2'$$

$$v_2' = \frac{m_1}{m_2} v_1'$$

$$\boxed{v_2'^2 = \frac{m_1^2 u_1^2}{(m_1+m_2)^2} = u_2'^2}$$

A partir de ahora vamos a asumir choque elástico

$\Rightarrow u_1' = v_1' \qquad \vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{V} \qquad (\vec{u}_1' = \vec{u}_1 - \vec{V}) \qquad \vec{V}_{1/CM} = \vec{V}_1' = \underbrace{\vec{V}_{1/obs}}_{\vec{V}_1} + \underbrace{\vec{V}_{obs/CM}}_{-\vec{V}}$

$\Rightarrow v_1' \operatorname{sen}\theta = v_1 \operatorname{sen}\Psi$

$v_1' \cos\theta = v_1 \cos\Psi - V$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}\Psi = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \underbrace{\frac{V}{v_1'}}_{\frac{m_1}{m_2}}} \Rightarrow \operatorname{tg}\Psi = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}}$$

si $m_1 \ll m_2$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\Psi = \operatorname{tg}\theta$

$\Rightarrow \Psi = \theta$

si $m_1 = m_2$

$\operatorname{tg}\Psi = \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$

$\Rightarrow \Psi = \frac{\theta}{2} \Rightarrow$ si $m_1 = m_2$ $\underline{\underline{\Psi \leq \frac{\pi}{2}}}$

$\cos\theta = \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right)$

$= \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$\operatorname{sen}\theta = \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$

La idea es relacionar las cantidades desde RL a RCM ya que es más fácil hacer cuentas en RCM; pero es más típico la situación de estar en RL