CLASE 16

Recordemos la nomenclatura a usar

m_i: masa de la part. i

$\vec{u}_i$: es la velocidad inicial de m_i en RL $(\vec{u}_2=0)$

$\vec{u}'_i$ " " " " " " " RCM

$\vec{v}_i$ " " " final de m_i en RL

$\vec{v}'_i$ " " " " " " " RCM

K_0 es la energía cinética total inicial en RL

K'_0 " " " " " " " RCM

K_i " " " " de m_i final en RL

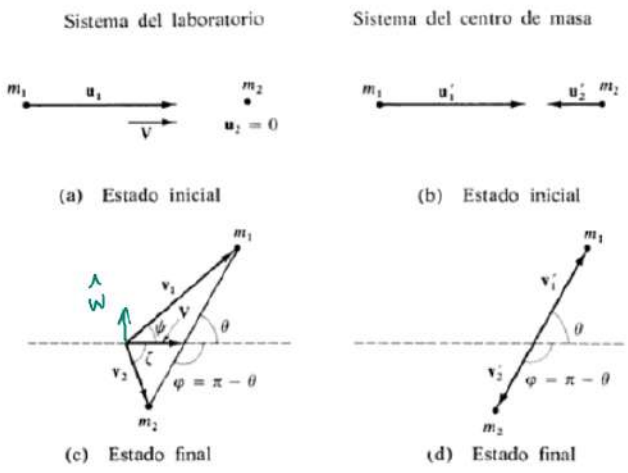
K'_i " " " " " " " " RCM

$\vec{V}$ es la velocidad del centro de masas en RL

ψ ángulo de desviación de m_1 en RL

ζ " " " " m_2 en RL

θ " " " " m_1, m_2 en RCM



$\hat{w} \cdot \hat{v} = 0$

Choques elásticos

Vamos a considerar más en detalle los choques elásticos ya que a nivel de partículas elementales la energía se conserva.

$$K_0 = K_f = K_1 + K_2 \quad , \quad M = m_1 + m_2$$

$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{M}$$

$m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 = M \vec{V}$ y como $\vec{u}_2 = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{V} = \frac{m_1}{M} \vec{u}_1}$

(R. L)

Velocidades relativas (conversión entre R.L. y R.CM)

$$\underset{RL}{\vec{V}_A} = \underset{RCM}{\vec{V}_A} + \underset{RL}{\vec{V}_{CM}}$$

$\vec{u}_2 = 0$ (part 2 es el objetivo)

Vel. inicial part. 2 $\quad \vec{u}_2 = \vec{u}_2' + \vec{V} = 0 \Rightarrow \vec{u}_2' = -\vec{V} \Rightarrow \boxed{\vec{u}_2' = -\frac{m_1 \vec{u}_1}{M}}$

Vel inicial part 1 $\quad \vec{u}_1 = \vec{u}_1' + \vec{V} \Rightarrow \vec{u}_1' = \vec{u}_1 - \vec{V} \Rightarrow \boxed{\vec{u}_1' = \frac{m_2 \vec{u}_1}{M}}$

Recordemos que: (Porque la Energía se conserva)

$|\vec{u}_1'| = |\vec{v}_1'|$

$|\vec{u}_2'| = |\vec{v}_2'|$

tomo el prod. escalar

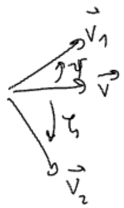
$\Rightarrow$ Vel final Part 1 $\left[\vec{V}_1 = \vec{V}_1' + \vec{V}\right] \longrightarrow [\quad]\cdot\hat{V} \Rightarrow |\vec{V}_1|\cos\Psi = |\vec{v}_1'|\cos\theta + |\vec{V}| = \frac{m_2}{M}|\vec{u}_1|\cos\theta + \frac{m_1}{M}|\vec{u}_1|$ (I)

Vel final Part 2. $\left[\vec{V}_2 = \vec{v}_2' + \vec{V}\right] \longrightarrow [\quad]\cdot\vec{V} \Rightarrow |\vec{v}_2|\cos\zeta = -|\vec{v}_2'|\cos\theta + |\vec{V}| = -\frac{m_1}{M}|\vec{u}_1|\cos\theta + \frac{m_1}{M}|\vec{u}_1|$ (II)

Ahora tomo el prod. escalar en la dirección perp. a $\hat{V}$ $(\hat{w}\cdot\hat{v} = 0)$

$[\quad]\cdot\hat{w} \Rightarrow |\vec{V}_1|\,\mathrm{sen}(\Psi) = |\vec{v}_1'|\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{m_2}{M}|\vec{u}_1|\,\mathrm{sen}\,\theta$ (III)

$[\quad]\cdot\hat{w} \Rightarrow -|\vec{V}_2|\,\mathrm{sen}\,\zeta = -|\vec{v}_2'|\,\mathrm{sen}\,\theta = -\frac{m_1}{M}|\vec{u}_1|\,\mathrm{sen}\,\theta$ (IV)



$$\frac{(III)}{(I)} \longrightarrow tg\,\Psi = \frac{\frac{m_2}{M}\,\mathrm{sen}\,\theta}{\frac{m_2}{M}\cos\theta + \frac{m_1}{M}} = \frac{m_2\,\mathrm{sen}\,\theta}{m_2\cos\theta + m_1} \Rightarrow \boxed{tg\,\Psi = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}}}$$

$$\frac{(IV)}{(II)} \longrightarrow tg\,\zeta = \frac{\frac{m_1}{M}\,\mathrm{sen}\,\theta}{-\frac{m_1}{M}\cos\theta + \frac{m_1}{M}} \Rightarrow \boxed{tg\,\zeta = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{1-\cos\theta}}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a) \\ \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b) \end{aligned}\right\} \text{ si } a = b = \frac{\theta}{2} \Rightarrow \begin{aligned} &\operatorname{sen}(\theta) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &\cos(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\psi = \frac{2\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - 1 + \frac{m_1}{m_2}}}$$

$$\operatorname{tg}\zeta = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)} \rightarrow \boxed{\operatorname{tg}(\zeta) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}$$

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

Esto implica que $\boxed{2\zeta = \pi - \theta}$

si $m_1 = m_2 \Rightarrow \operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \boxed{2\psi = \theta} \rightarrow \left(\zeta + \psi = \frac{\pi}{2}\right)$

si $m_1 \ll m_2 \quad \operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}(\theta) \Rightarrow \boxed{\psi = \theta}$

¿Qué pasa con la energía (además de conservarse)?

$$K_0 = \frac{1}{2} m_1 |\vec{u}_1|^2 \qquad K_0' = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 |\vec{u}_2'|^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{M}|\vec{u}_1|\right)^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{M}|\vec{u}_1|\right)^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2 |\vec{u}_1|^2 \cancel{M}}{M^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2} m_1 |\vec{u}_1|^2 \frac{m_2}{M}$$

$$\Rightarrow \boxed{K_0' = \frac{m_2}{M} K_0} \qquad (K_0' < K_0)$$

Energía final de la part 1. $\longrightarrow$ $K_1' = \frac{1}{2} m_1 |\vec{v}_1'|^2 = \frac{1}{2} m_1 |\vec{u}_1'|^2 = \frac{1}{2} m_1 \left(\frac{m_2}{M}\vec{u}_1\right)^2 = \frac{1}{2} m_1 |\vec{u}_1|^2 \frac{m_2^2}{M^2} \Rightarrow \boxed{K_1' = \left(\frac{m_2}{M}\right)^2 K_0}$

Energía final de la part 2 $\longrightarrow$ $K_2' = \frac{1}{2} m_2 |\vec{v}_2'|^2 = \frac{1}{2} m_2 |\vec{u}_2'|^2 = \frac{1}{2} m_2 \left|-\frac{m_1}{M}\vec{u}_1\right|^2 = \frac{1}{2} m_1 |\vec{u}_1|^2 \frac{m_1 m_2}{M^2} \Rightarrow \boxed{K_2' = \frac{m_1 m_2}{M^2} K_0}$

$$\frac{K_1}{K_0} = \frac{|\vec{v}_1|^2}{|\vec{u}_1|^2} \quad \text{además} \quad \vec{v}_1 = \vec{v}_1{}' + \vec{v} \Rightarrow \vec{v}_1{}' = \vec{v}_1 - \vec{v} \quad \text{y} \Rightarrow |\vec{v}_1{}'|^2 = |\vec{v}_1|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{v}\cdot\vec{v}_1$$

$$\Rightarrow \frac{K_1}{K_0} = \frac{|\vec{v}_1|^2}{|\vec{u}_1|^2} = \frac{|\vec{v}_1{}'|^2}{|\vec{u}_1|^2} - \frac{|\vec{v}|^2}{|u_1|^2} + \frac{2|\vec{v}||\vec{v}_1|\cos\psi}{|\vec{u}_1|^2}$$

Recordemos que: $|\vec{v}_1{}'| = |\vec{u}_1{}'| = \frac{m_2}{M}|\vec{u}_1|$

$$|\vec{v}| = \frac{m_1}{M}|\vec{u}_1|$$

y de (III) es $|\vec{v}_1| = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\psi}\frac{m_2}{M}|\vec{u}_1|$

$$\Rightarrow \frac{K_1}{K_0} = \left(\frac{m_2}{M}\right)^2 - \left(\frac{m_1}{M}\right)^2 + 2\frac{m_1 m_2}{M^2}\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{tg}\psi}$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}} \rightarrow \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}}$$

$$\frac{K_1}{K_0} = \left(\frac{m_2}{M}\right)^2 - \left(\frac{m_1}{M}\right)^2 + \frac{2m_1 m_2}{M^2}\left(\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}\right)$$

$$\frac{K_1}{K_0} = \frac{m_2^2}{M^2} - \left(\frac{m_1}{M}\right)^2 + \frac{2m_1^2}{M^2} + \frac{2m_1 m_2}{M^2}\cos\theta$$

$$\frac{K_1}{K_0} = \underbrace{\frac{m_1^2 + m_2^2}{M^2} + \frac{2m_1 m_2}{M^2}}_{1} - \frac{2m_1 m_2}{M^2} + \frac{2m_1 m_2}{M^2}\cos\theta$$

$$= 1 - \frac{2m_1 m_2}{M^2}(1 - \cos\theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{K_1}{K_0} = 1 - \frac{2m_1 m_2}{M^2}(1 - \cos\theta)}$$

Podemos trabajar en términos de ψ (No se hicieron estas cuentas en clase)

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta + \frac{m_1}{m_2}}$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^2\psi \left(\cos^2\theta + 2\frac{m_1}{m_2}\cos\theta + \frac{m_1^2}{m_2^2}\right) = 1 - \cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \operatorname{sen}^2\psi\cos^2\theta + 2\frac{m_1 \operatorname{sen}^2\psi}{m_2}\cos\theta + \frac{m_1^2}{m_2^2}\operatorname{sen}^2\psi = \cos^2\psi - \cos^2\psi\cos^2\theta$$

$$\Rightarrow \cos^2\theta + 2\frac{m_1}{m_2}\operatorname{sen}^2\psi\cos\theta + \frac{m_1^2}{m_2^2}\operatorname{sen}^2\psi - \cos^2\psi = 0$$

$$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{m_1}{m_2}\operatorname{sen}^2\psi \pm \sqrt{\frac{m_1^2}{m_2^2}\operatorname{sen}^4\psi - \frac{m_1^2}{m_2^2}\operatorname{sen}^2\psi + \cos^2\psi}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{m_1}{m_2}\left[\operatorname{sen}^2\psi \pm \sqrt{\frac{m_2^2}{m_1^2}\cos^2\psi - \operatorname{sen}^2\psi\,(1-\operatorname{sen}^2\psi)}\right]$$

$$\Rightarrow \cos\theta = -\frac{m_1}{m_2}\left[\operatorname{sen}^2\psi \pm \cos\psi\sqrt{\frac{m_2^2}{m_1^2} - \operatorname{sen}^2\psi}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{K_1}{K_0} = 1 - \frac{2m_1m_2}{M^2}\Big(\overbrace{1 + \frac{m_1}{m_2}\Big[\operatorname{sen}^2\psi \pm \cos\psi\sqrt{\frac{m_2^2}{m_1^2} - \operatorname{sen}^2\psi}}^{1-\cos\theta}\Big]\Big)$$

$$\frac{K_1}{K_0} = \frac{m_1^2 + 2m_1m_2 + m_2^2 - 2m_1m_2 - 2m_1^2\Big[\overset{1-\cos^2\psi}{\operatorname{sen}^2\psi} \pm \cos\psi\sqrt{\frac{m_2^2}{m_1^2} - \operatorname{sen}^2\psi}\Big]}{M^2}$$

$$\frac{K_1}{K_0} = \frac{m_2^2 - m_1^2}{M^2} + \frac{2m_1^2\cos\psi}{M^2}\Big[\cos\psi \pm \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \operatorname{sen}^2\psi}\Big]$$

$$\frac{K_1}{K_0} = \frac{m_1^2}{M^2}\left[\cos\psi \pm \sqrt{x}\right]\left(2\cos\psi + \frac{\frac{m_2^2}{m_1^2} - 1}{\cos\psi \pm \sqrt{x}}\right)$$

Siendo $x = \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \operatorname{sen}^2\psi$

$$\frac{m_2^2}{m_1^2} - 1 = -\cos^2\psi + x \Rightarrow \frac{K_1}{K_0} = \frac{m_1^2}{M^2}\cancel{\left[\cos\psi \pm \sqrt{x}\right]}\left(\frac{2\cos\psi\left(\cos\psi \pm \sqrt{x}\right) - \cos^2\psi + x}{\cancel{\cos\psi \pm \sqrt{x}}}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{K_1}{K_0} = \frac{m_1^2}{M^2}\Big(\underbrace{\cos^2\psi \pm 2\cos\psi\sqrt{x} + x}_{(\cos\psi \pm \sqrt{x})^2}\Big) \Rightarrow \boxed{\frac{K_1}{K_0} = \frac{m_1^2}{M^2}\Big[\cos\psi \pm \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \operatorname{sen}^2\psi}\Big]^2}$$

Sistemas de partículas con $N > 2$

Pasemos ahora a considerar el caso gral. de muchas partículas que conforman nuestro objeto de estudio.

Supongamos N partículas con masas $\{m_i\}_{i=1,\dots,N}$ y sobre estas partículas actúan fuerzas tanto externas $\vec{F}_{/i}^{(ext)}$ como internas $\vec{F}_{j/i}$ (fuerza de la partícula j sobre la i)

La 2da ley de Newton

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_{/i}^{(ext)} + \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{N} \vec{F}_{j/i}}$$

La $3^{\underline{a}}$ ley de Newton establece que $\vec{F}_{i/j} = -\vec{F}_{j/i}$ $\Rightarrow$ sumando en i es:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{(ext)}_{/i} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{N} \vec{F}_{j/i}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \text{ es: } \boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}^{(ext)}_{Neta}} \quad \left(= \sum_{i=1}^{N} \vec{F}^{(ext)}_{/i} \right)$$

recordando que $\vec{r}_{CM} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{M}$ con $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$ la masa total

$$\Rightarrow \boxed{M \ddot{\vec{r}}_{CM} = \vec{F}^{(ext)}_{Neta}} \quad 1^{\underline{ra}} \text{ Cardinal} \quad \boxed{\frac{d\vec{P}_{total}}{dt} = \vec{F}^{(ext)}_{Neta}}$$

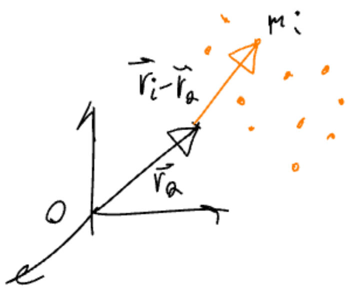
relaciona la variación temporal de la cantidad de mov. total de un sist. de part. con la fuerza neta externas (también es la $\vec{F}_{Neta}$)

La segunda cardinal de un sist. de part. relaciona la variación temporal de la cantidad de mov. angular respecto a un punto arbitrario Q con el torque neto de las fuerzas.

El momento ang. total respecto a un punto Q de un sist. de part. se define como la suma de los momentos angulares individuales.

$$\Rightarrow \vec{L}_Q = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_Q)\times \overbrace{m_i \vec{v}_i}^{\vec{p}_i} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_Q)\times m_i \dot{\vec{r}}_i$$

$\vec{\tau}_{neta,Q}$



$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \sum_{i=1}^{N} (\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_Q)\times m_i \dot{\vec{r}}_i + \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_Q)\times \underbrace{m_i \ddot{\vec{r}}_i}_{\vec{F}^{(ext)}_{/i} + \sum_{j\neq i,\, j=1}^{N} \vec{F}_{j/i}}$$

$\dot{\vec{r}}_i \times \dot{\vec{r}}_i = 0$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_Q}{dt} = -\vec{v}_Q \times \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \underbrace{m_i \dot{\vec{r}}_i}_{\vec{p}_i}}_{\vec{P}_{tot}} + \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_Q)\times \vec{F}^{(ext)}_{/i} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j\neq i,\, j=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_Q)\times \vec{F}_{j/i}}$$

//

dada la tercer ley de Newton, agrupando "(i, j) con (j, i)"

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_Q)\times \vec{F}_{j/i} + (\vec{r}_j - \vec{r}_Q)\times \vec{F}_{i/j} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j)\times \vec{F}_{j/i}$$

$$\vec{F}_{i/j} = -\vec{F}_{j/i}$$

$\Rightarrow$ si además $\vec{F}_{i/j} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j$ (es decir, las fuerzas internas tienen la dirección de la recta que une las partículas)

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j\neq i \\ j=1}}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_Q)\times \vec{F}_{j/i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau}^{(ext)}_{Neto,Q} = \vec{\tau}_{Neto,Q}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = -\vec{v}_Q \times \vec{P}_{tot} + \vec{\tau}^{(ext)}_{Neto,Q}}$$

2da cardinal

$$\vec{\tau}^{(ext)}_{Neto,Q} = \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_Q)\times \vec{F}^{(ext)}_{/i}$$

Si $\vec{r}_a = \vec{r}_{CM}$

o si $\vec{v}_a = 0$

o si $\vec{v}_a \parallel \vec{v}_{CM} \parallel \vec{P}_{tot}$

$\Rightarrow$ 2da card $\dfrac{d\vec{L}_a}{dt} = \vec{\tau}^{(ext)}_{neto,a}$

Estos dos conjuntos de ecs. 1ra y 2da cardinal

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} &= \vec{F}^{(ext)}_{neta} \\ \frac{d\vec{L}_a}{dt} &= -\vec{v}_a \times \vec{P}_{tot} + \sum_{i=1}^{N} (\vec{r}_i - \vec{r}_a) \times \vec{F}^{(ext)}_i \end{aligned}}$$

No son suf. para determinar la evolución del sistema (son 6 ecs y tenemos 3N variables) excepto para los cuerpos rígidos.