CLASE 17

Sistemas de partículas

habíamos llegado a escribir la $1^{\underline{er}}$ y $2^{\underline{da}}$ cardinal

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{(ext)}_{Neta} \qquad \text{con} \quad \vec{P} = \sum_i m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_{CM}$$

$$\frac{d\vec{L}_a}{dt} = -\vec{v}_a \times \vec{P} + \tau^{(ext)}_{Neta,a} \qquad \vec{L}_a = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_a) \times m_i \vec{v}_i$$

donde usamos que

$$\vec{F}_{i/j} = -\vec{F}_{j/i}$$

$$\vec{F}_{i/j} \parallel (\vec{r}_i - \vec{r}_j)$$

Energía en sist. de partículas

La energía cinética en un sist. de partículas es la suma de las energías cinéticas de cada partícula

$$K = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{v}_i^{\,2}}{2}$$

Si hacemos el cambio de variable $\vec{\rho}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{cm}$

$$\dot{\vec{\rho}}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_{cm}$$

$$\Rightarrow K = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2}\left(\dot{\vec{\rho}}_i^{\,2} + 2\dot{\vec{\rho}}_i \cdot \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{cm}^{\,2}\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{\vec{\rho}}_i^{\,2}}{2} + \frac{\vec{v}_{cm}^{\,2}}{2}\overbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i}^{M} + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{\rho}}_i\right)}_{\sum_{i=1}^{N} m_i(\dot{\vec{r}}_i - \dot{\vec{r}}_{cm})} \cdot \vec{v}_{cm}$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{r}}_i}_{M\vec{v}_{cm}} - M\vec{v}_{cm} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{K = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \dot{\vec{\rho}}_i^{\,2}}{2} + \frac{M\vec{v}_{cm}^{\,2}}{2}}$$ Teorema de König

Este teorema establece que la energía cinética de un sist. de partículas es la energía de una part. ficticia de masa igual a la masa total con velocidad igual a la vel. de centro de masas, más la energía cinética de los movimientos relativos al centro de masas.

Teoremas de Trabajo y energía

Al igual que antes la derivada temporal de la energía cinética es

$$\frac{dK}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\frac{m_i \vec{v}_i^{\,2}}{2}\right) = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}}_{\vec{F}_{/i}} \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_{/i} \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} P_{/i} = P^{(neta)}$$

No resulta útil para la energía dividir en fuerzas internas y externas pero sí en $\vec{F}^{(cons)}$ y $\vec{F}^{(No\ cons)}$.

$$\Rightarrow \vec{F}_{/i} = \vec{F}^{(cons)}_{/i} + \vec{F}^{(No\ cons)}_{/i}$$

$$\vec{F}^{(cons)}_{/i} = -\nabla_i U$$

donde $U = U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N)$

con $\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y_i}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z_i}\hat{k}$

Ejemplo: 1) si tengo N particula sujetas únicamente a la fuerza de gravedad (en la sup terrestre) de la tierra

$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = m_1 g z_1 + m_2 g z_2 + \dots + m_N g z_N$$

2) si tengo N partículas cargadas interactuando mediante la fuerza de coulomb es

$$\vec{F}_{j/i} = \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}(\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3}(\vec{r}_j - \vec{r}_i) = -\vec{F}_{i/j}$$

$$U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \Rightarrow \nabla_{i_0} U = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^2}\right) [\quad]$$

$$\boxed{j > i}$$

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = \sqrt{(\vec{r}_i - \vec{r}_j)^2} \Rightarrow \frac{\partial |\vec{r}_i - \vec{r}_j|}{\partial x_{i_0}} = \frac{1}{2|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} 2(x_i - x_j)(\delta_{i i_0} - \delta_{j i_0})$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

delta de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$ delta de Kronecker

$$\Rightarrow \left[\quad\right] = \frac{1}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}\left[(x_i - x_j)\hat{i} + (y_i - y_j)\hat{j} + (z_i - z_j)\hat{k}\right]\left(\delta_{i i_0} - \delta_{j i_0}\right)$$

$$\Rightarrow \nabla_{i_0} U = \underbrace{-\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \frac{q_i q_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}\,\delta_{i i_0}}_{-\sum_{j=i_0+1}^{N} \frac{q_{i_0} q_j (\vec{r}_{i_0} - \vec{r}_j)}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_{i_0} - \vec{r}_j|^3}} \; - \underbrace{\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N} \frac{q_i q_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3}\left(-\delta_{j i_0}\right)}_{\sum_{i=1}^{i_0-1} \frac{q_i q_{i_0} (\vec{r}_i - \vec{r}_{i_0})}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_i - \vec{r}_{i_0}|^3}}$$

Si $i_0 = 3$ y $j = i_0$, como $j \geq i+1$ $\Rightarrow i_0 \geq i+1$ $\Rightarrow i \leq i_0 - 1$

$$\Rightarrow \boxed{-\nabla_{i_0} U = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{N} \frac{q_{i_0} q_j (\vec{r}_{i_0} - \vec{r}_j)}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_{i_0} - \vec{r}_j|^3} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{N} \vec{F}_{j/i_0}}$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}} \quad \frac{\;}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_{i_0}-\vec{r}_j|^3} \qquad \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i_0}}$$

$\Rightarrow$

$$\mathcal{P} = \frac{dK}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(cons)}\cdot\vec{v}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(NO\ cons)}\cdot\vec{v}_i$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{N} -\nabla_i U \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt}}_{-\frac{d}{dt}U(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\ldots,\vec{r}_N) \;=\; -\left[\nabla_1 U\cdot\frac{d\vec{r}_1}{dt} + \nabla_2 U\cdot\frac{d\vec{r}_2}{dt} + \ldots + \nabla_N U\cdot\frac{d\vec{r}_N}{dt}\right]} + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(NO\ cons)}\cdot\vec{v}_i$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{dE}{dt} = \mathcal{P}^{(NO\ cons)} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(NO\ cons)}\cdot\vec{v}_i}$$

com $E = K + U$

$R(\vdots)$

Rígidos

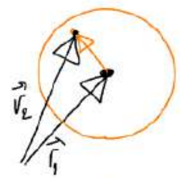
Un cuerpo rígido es un sist. de part. puntuales cuyas distancias relativas no cambian $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = cte_{ij}$

Esta restricción resulta muy fuerte ya que para describir el movimiento de un rígido son suficientes 6 coordenadas.

Para ubicar un pto $\vec{r}_1$ del rígido requerimos 3 coord.

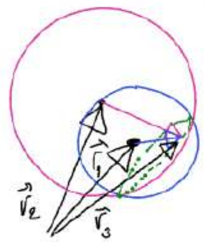
3 coord. para ubicar $\vec{r}_1$ en el espacio

otro punto $\vec{r}_2$ del rígido estará sobre la superficie de una esfera de radio $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ centrada en $\vec{r}_1$.
Un pto sobre esta superficie se determina con 2 coord.



2 coord para ubicar a $\vec{r}_2$ sobre la sup. de la esfera

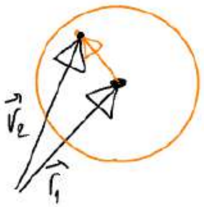
Un tercer punto $\vec{r}_3$ del rígido ~~se situará~~ estará en la intersección de las superficies de las esferas de radios $|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|$ y $|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|$ centradas en $\vec{r}_1$ y $\vec{r}_2$ respectivamente.
Dicha intersección es un círculo y un punto del mismo se determina con 1 coord.



1 coord. para ubicar a $\vec{r}_3$ sobre el círculo (intersección de esferas)

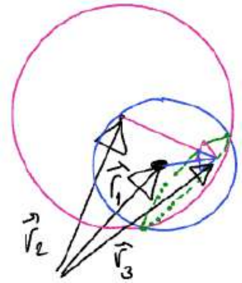
3 coord. para ubicar $\vec{r}_1$ en el espacio

se determina con 2 coord.

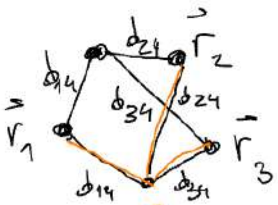


2 coord para ubicar a $\vec{r}_2$ sobre la sup. de la esfera

Dicha intersección es un circulo y un punto del mismo se determina con 1 coord.



1 coord. para ubicar a $\vec{r}_3$ sobre el circulo (intersección de esferas)



Cualquier otro punto del rígido queda totalmente determinado con las distancias a estos 3 puntos $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ y $\vec{r}_3$ para los cuales requerimo $3+2+1=6$ coord.

Punto espejo (cumple restricciones de distancia, pero no puede pertenecer al rígido, ¿Por qué?)

Podemos pensar un sist. de ref. solidario al rígido

$\Rightarrow$ la vel ang del rígido es la vel. ang. del sist de ref.

y acá se muestra útil las herramientas que desarrollamos al ver movimiento relativo.

$\Rightarrow$ la velocidad de un punto Q del rígido se relaciona con la velocidad de otro punto P del rígido mediante la velocidad de transporte

$$\boxed{\vec{V}_P = \vec{V}_Q + \underbrace{\vec{\omega}}_{\text{veloc. ang. del rígido}} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_Q)}$$

$$(\vec{V}_T = \vec{V}_O' + \vec{\omega} \times \vec{r}')$$

<u>Dist. de vel. del rígido</u>

el mismo razonamiento nos lleva a:

$$\boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_Q + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_Q) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_Q))}$$

$$(\vec{a}_T = \vec{a}_{o'} + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'))$$

<u>dist. de acel. del rígido.</u>

Tensor de Inercia

Al trabajar con rígidos, un objeto útil característico es el tensor de inercia.

Veamos como surge al calcular el momento angular del rígido en torno a un punto Q del mismo

$$\vec{L}_Q = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times m_i \vec{v}_i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dist.} \\ \text{vel. rígid}}}{=} \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times m_i \left(\vec{v}_Q + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_Q)\right)$$

$$= \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i m_i\right)}_{M\vec{r}_{CM}} \times \vec{v}_Q - \vec{r}_Q \times \underbrace{\left(\sum_i m_i\right)}_{M} \vec{v}_Q + \sum_i m_i \left[(\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \{ \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \} \right]$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

$$\vec{L}_Q = M(\vec{r}_{cm} - \vec{r}_Q) \times \vec{v}_Q + \sum_i m_i \left[(\vec{r}_i - \vec{r}_Q)^2 \vec{\omega} - \{ (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \cdot \vec{\omega} \} (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \right]$$

$$\vec{\omega} = \sum_{\alpha=1}^{3} \omega_\alpha \hat{e}_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\sum_{\beta=1}^{3} \omega_\beta \delta_{\alpha\beta} \right) \hat{e}_\alpha$$

$$\{ (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \cdot \vec{\omega} \} [(\vec{r}_i - \vec{r}_Q)] = \left\{ \sum_{\beta=1}^{3} (\vec{r}_i - \vec{r}_Q)_\beta \omega_\beta \right\} \left[\sum_{\alpha=1}^{3} (\vec{r}_i - \vec{r}_Q)_\alpha \hat{e}_\alpha \right]$$

$$\vec{L}_Q = M(\vec{r}_{cm} - \vec{r}_Q) \times \vec{v}_Q + \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{\beta=1}^{3} \sum_i \left[(\vec{r}_i - \vec{r}_Q)^2 \underset{\substack{\uparrow \\ \text{delta de Kronecker}}}{\delta_{\alpha\beta}} \omega_\beta \hat{e}_\alpha - (\vec{r}_i - \vec{r}_Q)_\beta \, \omega_\beta (\vec{r}_i - \vec{r}_Q)_\alpha \, \hat{e}_\alpha \right]$$

$$\Rightarrow \vec{L}_Q = M(\vec{r}_{cm}-\vec{r}_Q)\times\vec{V}_Q + \sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}\left\{m_i\left[(\vec{r}_i-\vec{r}_Q)^2\delta_{\alpha\beta} - (\vec{r}_i-\vec{r}_Q)_\alpha(\vec{r}_i-\vec{r}_Q)_\beta\right]\right\}\omega_\beta\,\hat{e}_\alpha$$

dada A matriz y $\vec{v}$ vector

$$A\cdot\vec{v} = \sum_\alpha\sum_\beta A_{\alpha\beta}v_\beta\,\hat{e}_\alpha$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{L}_Q = M(\vec{r}_{cm}-\vec{r}_Q)\times\vec{V}_Q + \mathbb{I}_Q\cdot\vec{\omega}}$$

con $\underline{\underline{\mathbb{I}_{Q\alpha\beta} = m_i\left[(\vec{r}_i-\vec{r}_Q)^2\delta_{\alpha\beta} - (\vec{r}_i-\vec{r}_Q)_\alpha(\vec{r}_i-\vec{r}_Q)_\beta\right]}}$

$$\mathbb{I}_Q = \begin{pmatrix} \sum_i m_i[(y_i-y_Q)^2+(z_i-z_Q)^2] & -\sum_i m_i[(x_i-x_Q)(y_i-y_Q)] & -\sum_i m_i[(x_i-x_Q)(z_i-z_Q)] \\ -\sum_i m_i[(x_i-x_Q)(y_i-y_Q)] & \sum_i m_i[(x_i-x_Q)^2+(z_i-z_Q)^2] & -\sum_i m_i[(y_i-y_Q)(z_i-z_Q)] \\ -\sum_i m_i[(x_i-x_Q)(z_i-z_Q)] & -\sum_i m_i[(y_i-y_Q)(z_i-z_Q)] & \sum_i m_i[(x_i-x_Q)^2+(y_i-y_Q)^2] \end{pmatrix}$$

$\underline{\mathbb{I}_Q \text{ es simétrica}}$

o en el continuo

$$m_i \to \rho\, d^3\vec{r}$$
$$\sum_i \to \int_V$$

$$\mathbb{I}_Q = \begin{pmatrix} \int\rho(\vec{r})[(y-y_Q)^2+(z-z_Q)^2]d^3\vec{r} & \int\rho(\vec{r})[(x-x_Q)(y-y_Q)]d^3\vec{r} & \int\rho(\vec{r})[(x-x_Q)(z-z_Q)]d^3\vec{r} \\ \int\rho(\vec{r})[(x-x_Q)(y-y_Q)]d^3\vec{r} & \int\rho(\vec{r})[(x-x_Q)^2+(z-z_Q)^2]d^3\vec{r} & \int\rho(\vec{r})[(y-y_Q)(z-z_Q)]d^3\vec{r} \\ \int\rho(\vec{r})[(x-x_Q)(z-z_Q)]d^3\vec{r} & \int\rho(\vec{r})[(y-y_Q)(z-z_Q)]d^3\vec{r} & \int\rho(\vec{r})[(x-x_Q)^2+(y-y_Q)^2]d^3\vec{r} \end{pmatrix}$$