CLASE 18

Rígidos (clase previa)

- las part. de un rigido están a dist. fijas $|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = cte_{ij}$

- Necesitamos 6 coord. par describir el estado del rígido.

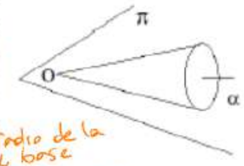
- Distribución de velocidades y aceleraciones del rigido

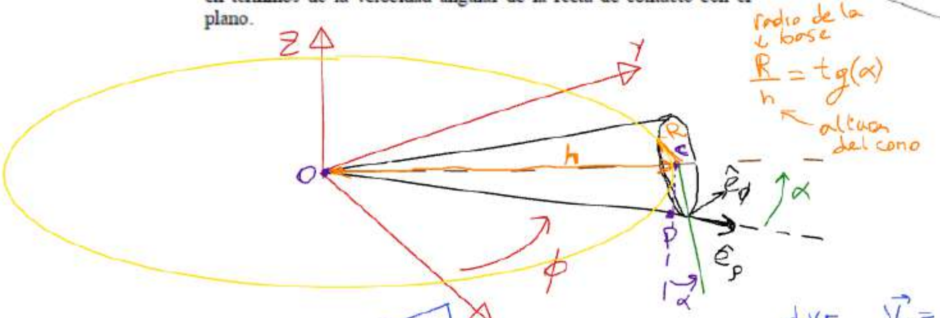
$$\vec{V}_P = \vec{V}_Q + \vec{\omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_Q) \qquad \left(\vec{V}_P = \vec{V}' + \vec{V}_\tau \quad \text{con } \vec{V}_\tau = \vec{V}_{o'} + \vec{\omega} \times \vec{r}\,' \right)$$

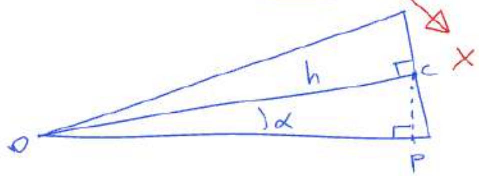
$$\vec{a}_P = \vec{a}_Q + \dot{\vec{\omega}} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_Q) + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times [\vec{r}_P - \vec{r}_Q])$$

Ejemplo:

Un cono circular recto, de vértice O, y ángulo 2α, *rueda sin deslizar* sobre un plano π. La recta de contacto entre el cono y el plano se comporta como un *eje instantáneo* de rotación, porque, debido a la rodadura, los puntos del cono que están en esa posición tienen velocidad *instantánea* nula. Determine la velocidad angular del cono en términos de la velocidad angular de la recta de contacto con el plano.







$$\vec{\omega} = \omega_\rho \hat{e}_\rho + \omega_\phi \hat{e}_\phi + \omega_z \hat{k}$$

$$\vec{\omega}_{op} = \dot{\phi}\hat{k}$$

d.v.r. $\underbrace{\vec{V}_p}_{\substack{\text{R.S.D.}\\ 0}} = \vec{V}_c + \vec{\omega}_{rig} \times (\overbrace{\vec{r}_p - \vec{r}_c}^{-R\cos\alpha\hat{k}}) = \vec{V}_c + [\omega_\rho R\cos\alpha\,\hat{e}_\phi - \omega_\phi R\cos\alpha\,\hat{e}_\rho]$

$$\vec{V}_c = h\cos\alpha\,\dot{\phi}\,\hat{e}_\phi \quad \Rightarrow \quad 0 = [(h\dot{\phi} + \omega_\rho R)\cos\alpha\,\hat{e}_\phi - \omega_\phi R\cos\alpha\,\hat{e}_\rho]$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_\phi = 0} \quad \Rightarrow \boxed{\omega_\rho = -\frac{h\dot{\phi}}{R} = -\frac{\dot{\phi}}{tg(\alpha)}}$$

$$\underbrace{\vec{V}_o}_{\substack{\text{R.S.D.}\\ 0}} = \underbrace{\vec{V}_p}_{\substack{\text{R.S.D.}\\ 0}} + \overbrace{\vec{\omega}_{rig}}^{\omega_\rho\hat{e}_\rho + \omega_z\hat{k}} \times (\overbrace{\vec{r}_o - \vec{r}_p}^{-h\cos\alpha\,\hat{e}_\rho}) = -\omega_z h\cos\alpha\,\hat{e}_\phi = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_z = 0}$$

$$\boxed{\vec{\omega} = -\frac{\dot{\phi}}{tg(\alpha)}\hat{e}_\rho}$$

Momento lineal. (rígido)

$$\vec{r}_{cm} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\underbrace{\sum_i m_i}_{= M}} \Rightarrow \frac{d\vec{r}_{cm}}{dt} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}_i}{M} \Rightarrow \frac{d}{dt}(M\vec{r}_{cm}) = \sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i \vec{p}_i$$

$$\frac{d}{dt}(M\vec{r}_{cm}) = M\vec{V}_{cm} = \vec{P}^{(tot)}$$

$\Rightarrow$ la cant. de mov. total del sist. $\boxed{\vec{P}^{(tot)} \equiv \sum_i \vec{p}_i = M\vec{V}_{cm}}$

Momento angular. (rígido) (clase previa)

$$\vec{L}_Q = M(\vec{r}_{cm} - \vec{r}_Q) \times \vec{V}_Q + \mathbb{I}_Q \cdot \vec{\omega}$$

con $\mathbb{I}_{Q_{ij}} = \sum_n m_n \left\{ (\vec{r}_n - \vec{r}_Q)^2 \delta_{ij} - (\vec{r}_n - \vec{r}_Q)_i (\vec{r}_n - \vec{r}_Q)_j \right\}$

Energía cinética

Antes de discutir las prop. del tensor de inercia veamos como que la energía cinética para un rígido.

$$K = \sum_n \frac{1}{2} m_n \vec{v}_n^{\,2} \underset{\text{d.v.r.}}{=} \sum_n \frac{1}{2} m_n \left(\vec{v}_Q + \vec{\omega}\times[\vec{r}_n - \vec{r}_Q]\right)^2 = \underbrace{\sum_n \frac{1}{2} m_n \vec{v}_Q^{\,2}} + \underbrace{\sum_n m_n \vec{v}_Q\cdot[\vec{\omega}\times(\vec{r}_n-\vec{r}_Q)]} + \underbrace{\sum_n \frac{1}{2} m_n \Big[\overbrace{\vec{\omega}\times(\vec{r}_n-\vec{r}_Q)}^{\vec{N}}\Big]^2}$$

d.v.r.

$$\vec{v}_n = \vec{v}_Q + \vec{\omega}\times(\vec{r}_n - \vec{r}_Q)$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) \qquad \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} M \vec{v}_Q^{\,2} + \vec{v}_Q\cdot\Big[\vec{\omega}\times \overbrace{\sum_n m_n(\vec{r}_n - \vec{r}_Q)}^{M\vec{r}_{CM} - M\vec{r}_Q}\Big] + \frac{1}{2}\sum_n m_n \vec{N}\cdot[\vec{\omega}\times(\vec{r}_n - \vec{r}_Q)]$$

$$K = \frac{1}{2} M \vec{v}_Q^{\,2} + \vec{v}_Q\cdot[\vec{\omega}\times M(\vec{r}_{CM} - \vec{r}_Q)] + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\sum_n m_n \Big\{\underbrace{(\vec{r}_n - \vec{r}_Q)\times\Big[\overbrace{\vec{\omega}\times(\vec{r}_n-\vec{r}_Q)}^{\vec{N}}\Big]}\Big\}$$

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B} - (\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C} \quad \Rightarrow \quad (\vec{r}_n - \vec{r}_Q)^2\,\vec{\omega} - [(\vec{r}_n - \vec{r}_Q)\cdot\vec{\omega}]\,(\vec{r}_n - \vec{r}_Q)$$

Energía cinética de un cuerpo rígido

Energía cinética de un cuerpo rígido

$$\Rightarrow \boxed{K = \frac{1}{2} M \vec{V}_Q^{\,2} + M \vec{V}_Q \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_Q)] + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot(\mathbb{I}_Q \cdot \vec{\omega})}$$

Esta expresión se simplifica si: $\vec{r}_Q = \vec{r}_{CM}$ o $\vec{V}_Q = 0$

$(\vec{r}_Q = \vec{r}_{CM})$ $\quad K = \frac{1}{2} M \vec{V}_{CM}^{\,2} + \frac{1}{2} \vec{\omega}\cdot \mathbb{I}_{CM}\cdot\vec{\omega}$

$(\vec{V}_Q = 0)$ $\quad K = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\mathbb{I}_Q\cdot\vec{\omega}$

Propiedades del tensor de inercia

¿Qué es un tensor?

En gral. un tensor de orden n es un objeto de 3^n componentes que transforman ante una rotación como rotando cada índice.

Es decir.

Sea T un tensor de orden n, sus componente son

$T_{i_1 i_2 \dots i_n}$ en una base ortonormal dada $\Rightarrow$ En otra base rotada sus componentes son

$$\sum_{i_2} \dots \sum_{i_n} a_{j_2 i_2} \dots a_{j_n i_n} \left(\sum_{i_1} a_{j_1 i_1} T_{i_1 i_2 \dots i_n} \right)$$

$$T'_{j_1 j_2 \dots j_n} = \sum_{i_1} \dots \sum_{i_n} a_{j_1 i_1} a_{j_2 i_2} \dots a_{j_n i_n} T_{i_1 \dots i_n}$$

donde a es la matríz de rotación que me lleva de una base a otra

Para vectores

$$\left(\vec{V}' = R\vec{V} \Rightarrow V_i' = R_{ij} V_j \right)$$

Tensor de orden 0 (Escalares)

Tensor de orden 1 (vectores)

Ejemplos de tensores de orden 2: Inercia, momento caudrupolar, tensor de estres

Ejemplos de tensores de orden 2: Inercia, momento cua
tensor de es

1) El tensor de Inercia es un tensor de orden 2 (Ejercicio
Notas 99)

$$\Rightarrow \quad \mathbb{I}'_{a\,ij} = \sum_{kl} a_{ik}\, a_{jl}\, \mathbb{I}_{a\,kl} \qquad \left(\mathbb{I}'_a = \mathbf{a} \cdot \mathbb{I}_a \cdot a^T \right)$$

$$a^T = a^{-1}$$

2) El tensor de inercia es simétrico (salta a la vista)

Los elementos de la diagonal se denominan <u>momentos de inercia</u>
Los elementos fuera de la diagonal se denominan <u>productos de inercia</u>

3) Una consecuencia de ser simétrico es que el tensor de inercia

3) Una consecuencia de ser simétrico es que el tensor de inercia es diagonalizable en una base ortonormal y sus autovalores son reales.

¿Qué quiere decir esto?

Dado un rígido y un punto Q siempre es posible elegir los ejes coordenados (3 ejes $\perp$) de tal forma que el tensor de inercia $\mathbb{I}_Q$ es diagonal en esos ejes denominados ejes principales.

Ejemplos Simples

rígido con simetría de revolución en torno a un eje z

$\Rightarrow$ si $Q \in$ al eje $\mathbb{I}_Q$ es diagonal si tomamos a z como uno de los ejes

rígido con Plano de simetría

$\Rightarrow$ si $P \in$ al plano de simetría y tomamos como eje coordenado (z) la dirección $\perp$ al plano

$\Rightarrow \mathbb{I}_{Q\,xz} = \mathbb{I}_{Q\,yz} = 0$

$$\Rightarrow \mathbb{I}_Q = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{Qxx} & \mathbb{I}_{Qxy} & 0 \\ \mathbb{I}_{Qxy} & \mathbb{I}_{Qyy} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{I}_{Qzz} \end{pmatrix}$$

para diagonalizar basta diagonalizar la matriz restringida ( )

En ejes principales (llamando $\mathbb{I}_{xx}=I_1$, $\mathbb{I}_{yy}=I_2$ y $\mathbb{I}_{zz}=I_3$

$$\vec{L}_a = M(\vec{r}_{cm}-\vec{r}_a)\times\vec{V}_a + I_1\omega_x + I_2\omega_y + I_3\omega_z$$

$$K = \frac{1}{2}M\vec{V}_a^{\,2} + M\vec{V}_a\cdot\left(\vec{\omega}\times(\vec{r}_{cm}-\vec{r}_a)\right) + \frac{1}{2}I_1\omega_x^2 + \frac{1}{2}I_2\omega_y^2 + \frac{1}{2}I_3\omega_z^2$$

Como comentario extra (NO HABLADO EN CLASE)

destacamos que, al igual que existen invariantes ante las rotaciones en los vectores (por ejemplo la norma o, más en gral., el producto interno de los vectores) existen estos invariantes en los tensores. Por ejemplo, la traza del tensor de inercia:

$$Tr(\mathbb{I}_a) = \mathbb{I}_{a_{xx}} + \mathbb{I}_{a_{yy}} + \mathbb{I}_{a_{zz}} = \int 2\rho(\vec{r}-\vec{r}_a)^2 d^3r$$

es independiente de la orientación de los ejes!!

Teorema de Steiner (Ejes paralelos)

Prueba la clase que viene.

$$\mathbb{I}_{P_{ij}} = \mathbb{I}_{CM_{ij}} + M\left\{ [(\vec{r}_{CM}-\vec{r}_P)]^2 \delta_{ij} - (\vec{r}_{CM}-\vec{r}_P)_i (\vec{r}_{CM}-\vec{r}_P)_j \right\}$$

$$\vec{r}_{CM}-\vec{r}_P = (x_{CM}-x_P)\hat{\imath} + (y_{CM}-y_P)\hat{\jmath} + (z_{CM}-z_P)\hat{k}$$

$$\Rightarrow (\vec{r}_{CM}-\vec{r}_P)_1 = x_{CM}-x_P$$

$$(\vec{r}_{CM}-\vec{r}_P)_2 = y_{CM}-y_P$$

$$(\vec{r}_{CM}-r$$

El tensor de inercia en torno a un punto p se relaciona con el del centro de masas mediante esta expresión si los ejes coord son paralelos.

Dinámica del rígido.

Al comenzar a estudiar sist. de partículas dedujimos la 1er y 2da cardinal que consisten en 6 ecuaciones de evolución "promedio" del sistema.

Por otro lado vimos que para describir el estado de un rígido (entendiendo por estado a su posición y orientación en el espacio) eran suficientes 6 coordenadas.

Como consecuencia de esto, la 1er y 2da cardinal aplicadas a sist. rígidos describen la evolución completa del sistema!

rígidos describen la evolución completa del sistema!

recordemos las cardinales

1ra $\boxed{M\ddot{\vec{r}}_{CM} = \frac{d\vec{P}_{tot}}{dt} = \vec{F}^{(ext)}_{Neta}}$ gral de sist. de part.

2da $\boxed{\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = -\vec{V}_Q \times \overbrace{\vec{P}_{tot}}^{M\vec{V}_{CM}} + \vec{\tau}^{(ext)}_{Neta,\,Q}}$ gral de sist de part

con $\vec{L}_Q = \mathbb{I}_Q \cdot \vec{\omega} + M(\vec{r}_{CM} - \vec{r}_Q) \times \vec{V}_Q$ (rígidos)

2^{da} cardinal para rígidos

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\mathbb{I}_Q \cdot \vec{\omega} + M(\vec{r}_{cm} - \vec{r}_Q) \times \vec{V}_Q \right) = -\vec{V}_Q \times \vec{P}_{tot} + \vec{\tau}^{(ext)}_{Neto,Q}$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbb{I}_Q \cdot \vec{\omega}) + \underbrace{\frac{d}{dt}\left(M[\vec{r}_{cm} - \vec{r}_Q] \times \vec{V}_Q \right)} = -\vec{V}_Q \times M\vec{V}_{cm} + \vec{\tau}^{(ext)}_{Neto,Q}$$

Es importante, para realizar los cálculos, recordar que el tensor de inercia se calcula (generalmente) en un sist. solidario al rígido sino, de lo contrario, evolucionaría en el tiempo!! y por lo tanto conviene expresar las derivadas temporales respecto al sist. móvil o relativo

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \omega \times \vec{A} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\mathbb{I}_Q \cdot \vec{\omega}) = \frac{d'}{dt}(\mathbb{I}_Q \cdot \vec{\omega}) + \vec{\omega} \times (\mathbb{I}_Q \cdot \vec{\omega}) = \mathbb{I}_Q \cdot \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times (\mathbb{I}_Q \cdot \vec{\omega})$$

$$\mathbb{I}_Q\cdot\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega}\times(\mathbb{I}_Q\cdot\vec{\omega}) + \cancel{M\vec{V}_{CM}\times\vec{V}_Q} - \cancelto{0}{M\vec{V}_Q\times\vec{V}_Q} + M(\vec{r}_{CM}-\vec{r}_Q)\times\vec{a}_o = -\vec{V}_Q\times M\vec{V}_{CM} + \vec{\tau}^{\,(ext)}_{Neto,Q}$$

$$= \cancel{M\vec{V}_{CM}\times\vec{V}_Q} + \vec{\tau}^{\,(ext)}_{Neto,Q}$$

La 2^{da} cond. para los rígidos se transforma en:

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{I}_Q\cdot\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega}\times(\mathbb{I}_Q\cdot\vec{\omega}) + M(\vec{r}_{CM}-\vec{r}_Q)\times\vec{a}_Q = \vec{\tau}^{\,(ext)}_{Neto,Q}}$$

(si $\vec{r}_Q=\vec{r}_{CM}$) $\quad \mathbb{I}_{CM}\cdot\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega}\times(\mathbb{I}_{CM}\cdot\vec{\omega}) = \vec{\tau}^{\,(ext)}_{Neto,CM}$

(Si Q es un pto fijo) $\quad \frac{d}{dt}(\mathbb{I}_Q\cdot\vec{\omega}) = \mathbb{I}_Q\cdot\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega}\times(\mathbb{I}_Q\cdot\vec{\omega}) = \vec{\tau}^{\,ext}_{Neto,Q}$