CLASE 19

Prueba del teorema de Steiner (ejes paralelos)

El tensor de inercia respecto de un punto P se relaciona con el tensor de inercia respecto al centro de masas CM mediante la expresión

$$\mathbb{I}_{P_{ij}} = \mathbb{I}_{CM_{ij}} + M\left\{ (\vec{r}_{CM}-\vec{r}_P)^2 \delta_{ij} - (\vec{r}_{CM}-\vec{r}_P)_i (\vec{r}_{CM}-\vec{r}_P)_j \right\}$$

delta de Kronecker

$(\vec{r}_{CM}-\vec{r}_P)_i \equiv (\vec{r}_{CM}-\vec{r}_P)\cdot \hat{e}_i$

el elemento ij de su representación matricial

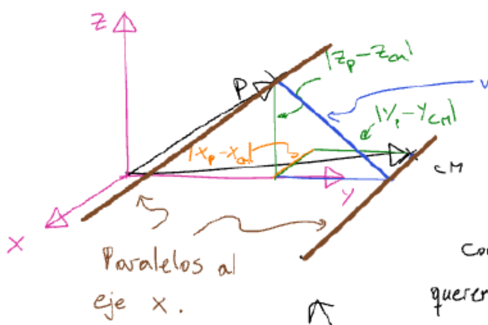
$$\mathbb{I}_P = \begin{pmatrix} \mathbb{I}_{P_{11}} & \mathbb{I}_{P_{12}} & \mathbb{I}_{P_{13}} \\ \mathbb{I}_{P_{21}} & \mathbb{I}_{P_{22}} & \mathbb{I}_{P_{23}} \\ \mathbb{I}_{P_{31}} & \mathbb{I}_{P_{32}} & \mathbb{I}_{P_{33}} \end{pmatrix}$$

Comencemos por trazar su reducción al teorema visto en el curso de Física I:

$$I_P = I_{CM} + Md^2 \quad (*)$$

En este curso se trabajan rotaciones en único plano digamos $\perp$ a x por lo que $\vec{\omega} = \omega_x \hat{\imath}$.

Además, todo lo que se observaba refería al movimiento en dicho plano y por consiguiente sólo resultaba relevante el elemento $I_{P_{xx}}$ que llamábamos simplemente I_P.



Comparando la expresión (*) con el teorema de Steiner que queremos probar para la componente $\mathbb{I}_{P_{xx}}$, vemos inmediatamente que son equivalentes (ver figura)

Prueba: partimos de la expresión para $\mathbb{I}_{P_{ij}}$:

$$\mathbb{I}_{P_{ij}} = \sum_{n=1}^{N} m_n \left\{ (\vec{r}_n - \vec{r}_P)^2 \delta_{ij} - (\vec{r}_n - \vec{r}_P)_i (\vec{r}_n - \vec{r}_P)_j \right\}$$

realizamos el cambio de variable que utilizamos al ver el teorema König

$\vec{r}_n = \vec{r}_{CM} + \vec{\rho}_n$

$$\Rightarrow \mathbb{I}_{P_{ij}} = \sum_{n=1}^{N} m_n \left\{ (\vec{\rho}_n + [\vec{r}_{CM} - \vec{r}_P])^2 \delta_{ij} - (\vec{\rho}_n + [\vec{r}_{CM} - \vec{r}_P])_i (\vec{\rho}_n + [\vec{r}_{CM} - \vec{r}_P])_j \right\}$$

$$\mathbb{I}_{P_{ij}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{N} m_n \left\{ \rho_n^2 \delta_{ij} - \rho_{n_i} \rho_{n_j} \right\}}_{\mathbb{I}_{CM_{ij}}} + \sum_{n=1}^{N} m_n \left\{ (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_P)^2 \delta_{ij} - (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_P)_i (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_P)_j \right\}$$

$$+ 2\sum_{n=1}^{N} m_n \left\{ \vec{\rho}_n \cdot (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_P) \right\} \delta_{ij} - \sum_{n=1}^{N} m_n \left\{ \rho_{n_i} [\vec{r}_{CM} - \vec{r}_P]_j \right\} - \underbrace{\sum_{n=1}^{N} m_n \left\{ [\vec{r}_{CM} - \vec{r}_P]_i \rho_{n_j} \right\}}_{=0}$$

← análogo.

$$2\sum_{n=1}^{N} m_n \left\{ \vec{\rho}_n \cdot (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_P) \right\} \delta_{ij} = 2\left(\underbrace{\sum_{n=1}^{N} m_n \vec{\rho}_n}_{\sum_{n=1}^{N} m_n \vec{r}_n - \left(\sum_{n=1}^{N} m_n\right) \vec{r}_{CM} \,=\, 0} \right) \cdot (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_P)\, \delta_{ij}$$

$$\sum_{n=1}^{N} m_n \left\{ \rho_{n_i} [\vec{r}_{CM} - \vec{r}_P]_j \right\} = \left(\underbrace{\sum_{n=1}^{N} m_n \rho_{n_i}}_{\sum_{n=1}^{N} m_n r_{n_i} - \left(\sum_{n=1}^{N} m_n\right) r_{CM_i} \,=\, 0} \right) [\vec{r}_{CM} - \vec{r}_P]_j$$

Probando así el teorema de Steiner de los ejes paralelos.

Energía y potencia en rígidos

Al igual que antes, al calcular la potencia de las fuerzas sobre un rígido se da una simplificación entre las fuerzas internas que, agrupados de a pares, cancelan sus contribuciones.

$$\mathcal{P}_{tot} = \sum_i \vec{F}_{/i} \cdot \vec{v}_i = \underbrace{\sum_i \vec{F}^{(ext)}_{/i} \cdot \vec{v}_i}_{(\mathrm{I})} + \underbrace{\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{i/j} \cdot \vec{v}_i}_{(\mathrm{II})}$$

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$$

$$(\mathrm{I}) = \sum_i \vec{F}^{(ext)}_{/i} \cdot \underbrace{(\vec{v}_a + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_a))}_{\text{dist vel rígido}} = \left(\sum_i \vec{F}^{(ext)}_{/i}\right) \cdot \vec{v}_a + \sum_i \vec{F}^{(ext)}_{/i} \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_a)]$$

$$= \vec{F}^{(ext)}_{Neta} \cdot \vec{v}_a + \Big[\underbrace{\sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_a) \times \vec{F}^{(ext)}_{/i}}_{\vec{\tau}^{(ext)}_{Neto,a}}\Big] \cdot \vec{\omega}$$

$$\Rightarrow (\mathrm{I}) = \vec{F}^{(ext)}_{Neta} \cdot \vec{v}_a + \vec{\tau}^{(ext)}_{Neto,a} \cdot \vec{\omega}$$

$$\underbrace{(\mathrm{II})}_{\text{agrupando de a parejos}} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \left(\vec{F}_{j/i} \cdot \vec{v}_i + \vec{F}_{i/j} \cdot \vec{v}_j\right) \underset{\text{3ra ley de Newton}}{=} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \vec{F}_{j/i} \cdot \underbrace{(\vec{v}_i - \vec{v}_j)}_{\text{dist. vel. rígido}} = \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^{N} \vec{F}_{j/i} \cdot (\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)) = 0$$

supo existir un $\vec{v}_a - \vec{v}_a$ y un $-\vec{\omega} \times \vec{r}_a + \vec{\omega} \times \vec{r}_a$

$\vec{F}_{j/i} \parallel \vec{r}_i - \vec{r}_j$

recordemos que para el rígido es:

$$K = \frac{1}{2} M \vec{V}_Q^2 + M \vec{V}_Q \cdot (\vec{\omega} \times (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_Q)) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_Q \cdot \vec{\omega}$$

Energía cinética

$$\Rightarrow \frac{dK}{dt} = P_{tot} = \vec{F}^{(ext)}_{Neta} \cdot \vec{V}_Q + \vec{\omega} \cdot \vec{\tau}^{(ext)}_{neto, Q}$$

si quieren pueden probar que

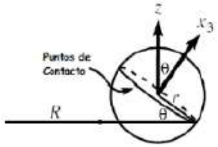
$$\frac{dK}{dt} = M \vec{V}_Q \cdot \vec{a}_Q + M \vec{a}_Q \cdot [\vec{\omega} \times (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_Q)] + M \vec{V}_Q \cdot [\dot{\vec{\omega}} \times (\vec{r}_{CM} - \vec{r}_Q)] + M \vec{V}_Q \cdot [\vec{\omega} \times \vec{V}_{CM}] + \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_Q \cdot \dot{\vec{\omega}}$$

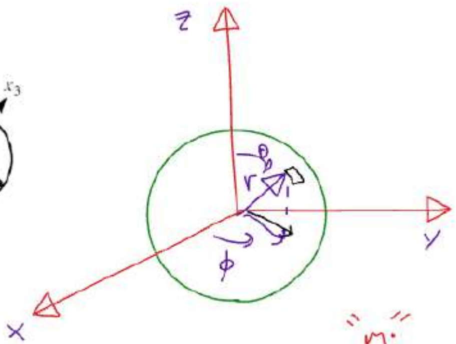
si Q es el C.M

$$\Rightarrow \boxed{M \vec{V}_{CM} \cdot \vec{a}_{CM} + \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_{CM} \cdot \dot{\vec{\omega}} = P_{tot}}$$

Ejercicio (completito)

Una pelota de basquetbol de radio r rueda sin deslizar en un aro de basquetbol de radio R de forma que los puntos de contacto describen un círculo máximo (un "ecuador") en la pelota y el centro de masas de ésta traza un circulo mediante un movimiento circular uniforme de frecuencia Ω. El centro de la pelota forma un ángulo $\theta = cte$ con la horizontal. Ver figura





a) **Calcule** el ~~momento~~ tensor de inercia de la pelota respecto al centro de masas.
b) Halle el momento angular de la pelota.
c) Calcule el torque respecto al centro de masas.
d) Halle la frecuencia angular Ω.

a) Veamos que:

$$\mathbb{I}_{cm} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{I}_{cm_{xy}} = -\int \underbrace{(r\,\mathrm{sen}\theta\cos\phi)}_{x} \cdot \underbrace{(r\,\mathrm{sen}\theta\,\mathrm{sen}\phi)}_{y}\, \underbrace{\sigma\, d^2\vec{r}}_{m_i}$$

$$= -r^2\sigma \int_0^{\pi} \mathrm{sen}^2\theta \int_0^{2\pi} \cos\phi\,\mathrm{sen}\phi\, \overbrace{r^2\,\mathrm{sen}\theta\, d\theta\, d\phi}^{d^2\vec{r}}$$

$$= -r^4\sigma \underbrace{\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\phi\cos\phi\, d\phi}_{\frac{1}{2}\mathrm{sen}^2\phi\Big|_0^{2\pi} = 0} \int_0^{\pi} \mathrm{sen}^3\theta\, d\theta = 0$$

Análogo los otros productos de inercia

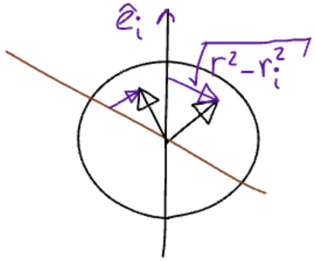
Por simetría es $I = \mathbb{I}_{cm_{xx}} = \mathbb{I}_{cm_{yy}} = \mathbb{I}_{cm_{zz}}$

$r^2\,\mathrm{sen}^2\theta\cos^2\phi$

Análogo los otros productos de inercia

Por simetría es $I = \mathbb{I}_{cm_{xx}} = \mathbb{I}_{cm_{yy}} = \mathbb{I}_{cm_{zz}}$

$$\mathbb{I}_{cm_{ii}} = \int \sigma\, d^2\vec{r}\,(r^2 - r_i^2)$$



$r^2 \operatorname{sen}^2\theta \cos^2\phi$

$$\mathbb{I}_{cm_{xx}} = \sigma r^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \,.(r^2 - x^2)$$

$$= \sigma r^2 . r^2 \left[\underbrace{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\, d\theta}_{4\pi} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos^2\phi\, d\phi}_{\pi} . \underbrace{\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^3\theta\, d\theta}_{} \right]$$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\theta\,(1 - \cos^2\theta)\, d\theta = \underbrace{-\cos\theta\Big|_0^{\pi}}_{2} + \underbrace{\frac{\cos^3\theta}{3}\Big|_0^{\pi}}_{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \overbrace{4\pi r^2 \sigma}^{M} . r^2 . \frac{2}{3}}$$

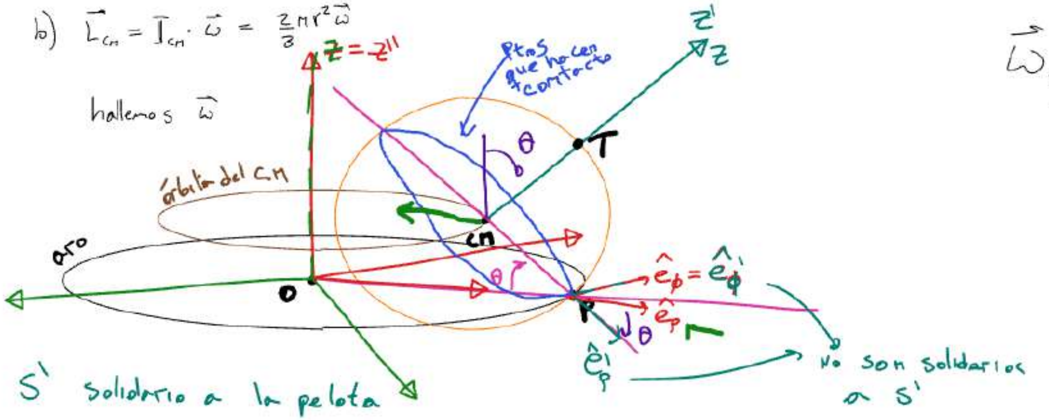
$$\Rightarrow \mathbb{I}_{cm} = \frac{2}{3} M r^2\, \mathbb{1}$$

1) $\vec{L} = \mathbb{I}\,\vec{\omega} = \frac{2}{3} M r^2 \vec{\omega}$

z'

b) $\vec{L}_{CM} = \mathbb{I}_{CM} \cdot \vec{\omega} = \frac{2}{3} M r^2 \vec{\omega}$

hallemos $\vec{\omega}$



S' solidario a la pelota

S sist. absoluto

S'' rota siguiendo la rotación del C.M. en torno al eje z

$$\vec{\omega}_{S'/S} = \vec{\omega}_{S'/S''} + \underbrace{\vec{\omega}_{S''/S}}_{\text{letra}:\ \Omega \hat{k}}$$

$$\vec{\omega}_{S'/S''} = \omega'_\rho \hat{e}_{\rho'} + \omega'_\phi \hat{e}_{\phi'} + \omega'_z \hat{k}'$$

$$\vec{V}''_{CM} = 0 = \underbrace{\vec{V}''_P}_{-\Omega R \hat{e}_{\phi'}} + \vec{\omega}_{S'/S''} \times \underbrace{(\vec{r}_{CM} - \vec{r}_P)}_{-r\hat{e}_{\rho'}} = -\Omega R \hat{e}_{\phi'} + \omega'_\phi r \hat{k}' - \omega'_z r \hat{e}_\phi$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega'_\phi = 0 \qquad \omega'_z = -\frac{\Omega R}{r}}$$

$$\vec{V}''_{CM} = 0 = \underbrace{\vec{V}''_T}_{= 0} + \underbrace{\vec{\omega}_{S'/S''} \times \overbrace{(\vec{r}_{CM} - \vec{r}_T)}^{-r\hat{k}'}}_{\omega'_\rho r \hat{e}_{\phi'}} \Rightarrow \boxed{\omega_{\rho'} = 0}$$

$$\boxed{\vec{\omega}_{S'/S} = \Omega \hat{k} - \frac{\Omega R}{r} \hat{k}'}$$

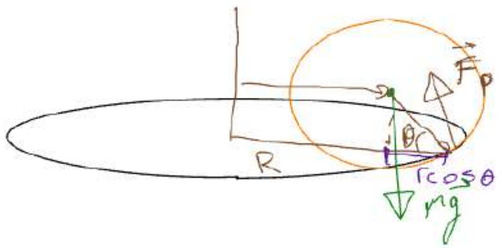
$$\Rightarrow \boxed{\vec{L}_{CM} = \frac{2}{3} M r^2 \Omega \left(\hat{k} - \frac{R}{r} \hat{k}'\right)}$$

Fin de b)

c)

$$\vec{\tau}_{CM} = (\underbrace{\vec{r}_p - \vec{r}_{CM}}_{r\hat{e}_{\rho'}}) \times \vec{F}_p$$

Problema, no lo conocemos



la Primera cardinal nos dice:

$$\vec{F}^{(ext)}_{Neta} = M\vec{g} + \vec{F}_p = M\vec{a}_{cm} = -M(R - r\cos\theta)\Omega^2 \hat{e}_\rho$$

$$\Rightarrow \vec{F}_p = Mg\hat{k} - M(R - r\cos\theta)\Omega^2 \hat{e}_\rho$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_{CM} = r\hat{e}_{\rho'} \times [Mg\hat{k} - M(R - r\cos\theta)\Omega^2 \hat{e}_\rho]$$

$\hat{k}$ y $\hat{e}_\rho$ están en el plano de $\hat{k}'$ y $\hat{e}_{\rho'}$

$$\hat{k} = \cos\theta\,\hat{k}' - \operatorname{sen}\theta\,\hat{e}_{\rho'}$$

$$\hat{e}_\rho = \cos\theta\,\hat{e}_{\rho'} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{k}'$$

$$\Rightarrow \vec{\tau}_{CM} = rMg\cos\theta\,(-\hat{e}_{\phi'}) - rM(R - r\cos\theta)\Omega^2 \operatorname{sen}\theta\,(-\hat{e}_{\phi'})$$

$$\vec{\tau}_{CM} = -Mr[g\cos\theta - (R - r\cos\theta)\Omega^2 \operatorname{sen}\theta]\,\hat{e}_{\phi'}$$

Fin parte c)

d) $\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \vec{\tau}_{cm}$

$(\Omega\hat{k} - \Omega\frac{R}{r}\hat{k}')$

$\vec{\omega}_{s'/s} \times \hat{k}' = \Omega\, \hat{k}\times\hat{k}' = -\text{sen}\theta\, \Omega\, \underbrace{\hat{e}_{\rho'} \times \hat{k}'}_{-\hat{e}_{\phi'}}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{2}{3}Mr^2\Omega\left(\hat{k} - \frac{R}{r}\hat{k}'\right)\right) = -\frac{2}{3}Mr^2\Omega\,\frac{R}{r}\,\frac{d\hat{k}'}{dt} = -\frac{2}{3}MrR\Omega^2\,\text{sen}\theta\,\hat{e}_{\phi'}$

$\Rightarrow \quad \frac{2}{3}\cancel{M}\cancel{r}R\Omega^2\text{sen}\theta = \cancel{M}\cancel{r}\left[g\cos\theta - (R - r\cos\theta)\Omega^2\text{sen}\,\theta\right]$

$\Rightarrow \quad \Omega^2 = \frac{g\cos\theta}{\frac{2}{3}R\,\text{sen}\theta + R\,\text{sen}\,\theta - r\cos\theta\,\text{sen}\theta}$

$\Rightarrow \quad \boxed{\Omega = \sqrt{\frac{g\cos\theta}{\left(\frac{5}{3}R - r\cos\theta\right)\text{sen}\theta}}}$ Fim.