CLASE 22

¿Como resolver las inconsistencias entre MN y EM?

La respuesta a esto la dió finalmente Einstein y comienza por las siguientes hipótesis:

(I) Las leyes de la física son las mismas en todos los sist. inerciales.

(II) La velocidad de la luz es la misma en todos los sistemas inerciales.

Además, supondremos que el espacio y el tiempo son homogeneos, lo cual quiere decir que todos los puntos del espacio y todos los momentos son indiferentes.

Indiferentes.

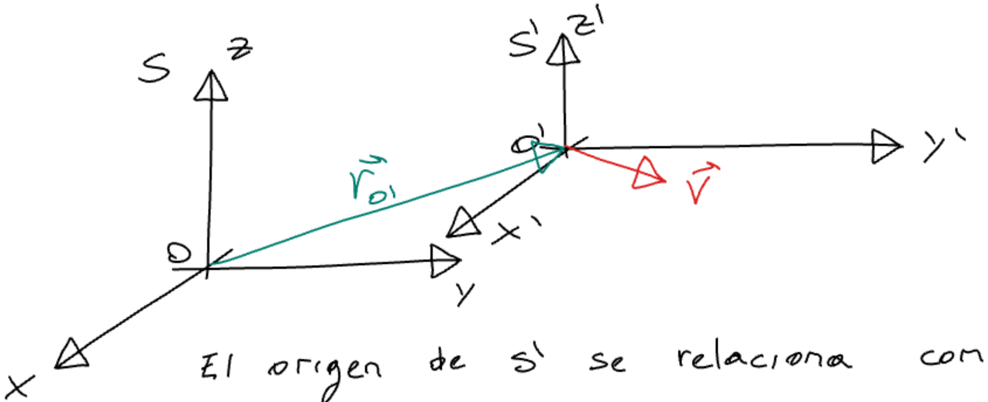
Bajo estas hipótesis, la transformación más general entre 2 $\underbrace{\text{sist de ref.}}_{\text{INERCIALES}}$ es:

$$\left.\begin{aligned}
x' &= a_{11}\, x + a_{12}\, y + a_{13}\, z + a_{14}\, ct + b_1 \\
y' &= a_{21}\, x + a_{22}\, y + a_{23}\, z + a_{24}\, ct + b_2 \\
z' &= a_{31}\, x + a_{32}\, y + a_{33}\, z + a_{34}\, ct + b_3 \\
ct' &= a_{41}\, x + a_{42}\, y + a_{43}\, z + a_{44}\, ct + b_4
\end{aligned}\right\} \quad \text{Forma más general.}$$

La linealidad se debe a la homogeneidad. (Si un objeto se coloca en el espacio su tamaño no puede variar dependiendo de que posición tenga en el espacio. Lo mismo sucede para la duración de los eventos respecto al momento en que suceden).

Consideremos la situación general de dos sist. de ref. que tienen

Consideremos la situación general de dos sist. de ref. que tienen ejes paralelos y una velocidad relativa $\vec{v}$ arbitraria.



El origen de S' se relaciona con las coordenadas x, y, z, ct de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}ct + b_1 = 0 = x' \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}ct + b_2 = 0 = y' \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}ct + b_3 = 0 = z' \end{array}\right\} \quad \underline{\text{Ecs } O'}$$

$$a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}ct + b_4 = ct'$$

Diremos que cuando O' está en la posición $\vec{r}$ (cte) es el instante ct

Digamos que cuando O' está en la posición $\vec{r}_0$ (cte) es el instante ct_0 y en S' es ct_0'.

$$\Rightarrow \quad b_1 = -a_{11}x_0 - a_{12}y_0 - a_{13}z_0 - a_{14}ct_0$$

$$b_2 = -a_{21}x_0 - a_{22}y_0 - a_{23}z_0 - a_{24}ct_0$$

$$b_3 = -a_{31}x_0 - a_{32}y_0 - a_{33}z_0 - a_{34}ct_0$$

$$b_4 - ct_0' = -a_{41}x_0 - a_{42}y_0 - a_{43}z_0 - a_{44}ct_0$$

Además al pasar el tiempo el plano de $x' = cte$ $\Rightarrow \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x',y,z} = v_x \Rightarrow a_{11}v_x + a_{14}c = 0$

$$\Rightarrow a_{14} = -a_{11}\frac{v_x}{c}$$

Análogamente puedo ver que $a_{24} = -a_{22}\frac{v_y}{c}$ y $a_{34} = -a_{33}\frac{v_z}{c}$

y el origen de S' ($x'=0$, $y'=0$ y $z'=0$) se mueve con $\vec{v}$ y de la última relación Ecs O' es

$$a_{41}v_x + a_{42}v_y + a_{43}v_z + a_{44}c = c\overbrace{\left(\frac{dt'}{dt}\right)_{x',y',z'}}^{\equiv \frac{1}{\gamma}}$$

$$= \frac{1}{\left(\frac{dt}{dt'}\right)_{x',y',z'}}$$

$\Rightarrow$ Juntando todo tengo que la forma más general se convierte en:

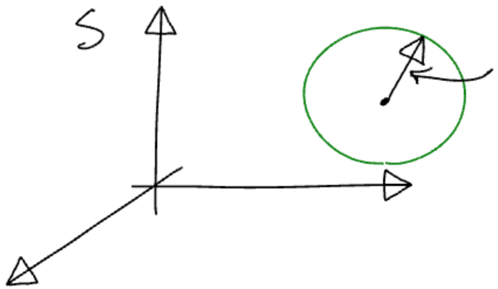
$$\boxed{\begin{aligned}
x' &= a_{11}\left(x-x_0-\beta_x c(t-t_0)\right) + a_{12}(y-y_0) + a_{13}(z-z_0)\\
y' &= a_{21}(x-x_0) + a_{22}\left(y-y_0-\beta_y c(t-t_0)\right) + a_{23}(z-z_0)\\
z' &= a_{31}(x-x_0) + a_{32}(y-y_0) + a_{33}\left(z-z_0-\beta_z c(t-t_0)\right)\\
c(t'-t'_0) &= a_{41}\left(x-x_0-\beta_x c(t-t_0)\right) + a_{42}\left(y-y_0-\beta_y c(t-t_0)\right) + a_{43}\left(z-z_0-\beta_z c(t-t_0)\right) + \frac{c}{\gamma}(t-t_0)
\end{aligned}}$$

$$\vec{\beta} = \beta_x \hat{\imath} + \beta_y \hat{\jmath} + \beta_z \hat{k}$$

$$\beta_x = \frac{v_x}{c}, \quad \beta_y = \frac{v_y}{c}, \quad \beta_z = \frac{v_z}{c}$$

Si en x_0, y_0, z_0, ct_0 se emite un pulso de luz, el frente de onda debe cumplir

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 - c^2(t-t_0)^2 = 0$$

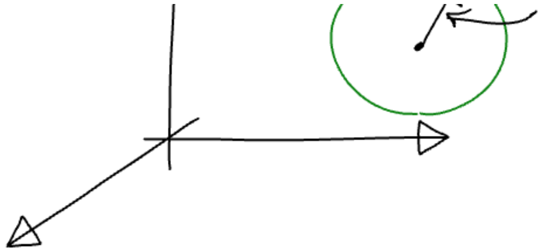


$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = c(t-t_0) \qquad (a)$$

pero para S' debe ser

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2(t'-t'_0)^2 = 0 \qquad (b)$$

(II) en acción.



$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = c(t-t_0)$ (a)

(II) en acción.

pero para S' debe ser

$$x'^2+y'^2+z'^2-c^2(t'-t'_0)^2=0 \quad (b)$$

Si reemplazo la forma más general en (b) y comparo con (a)

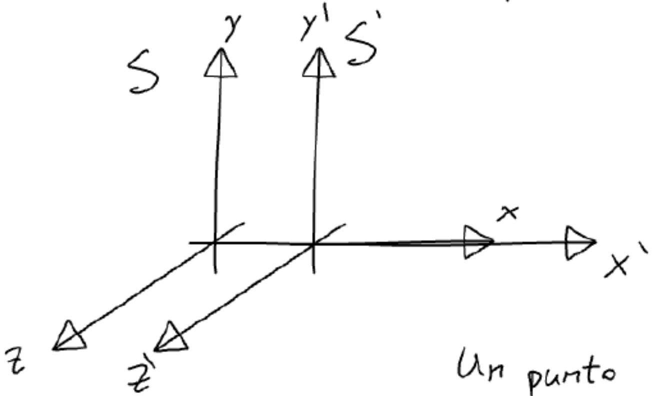
Voy a encontrar:

$$a_{11}^2+a_{21}^2+a_{31}^2-a_{41}^2=1$$
$$a_{12}^2+a_{22}^2+a_{32}^2-a_{42}^2=1$$
$$a_{13}^2+a_{23}^2+a_{33}^2-a_{43}^2=1$$
$$a_{11}a_{12}+a_{21}a_{22}+a_{31}a_{32}-a_{41}a_{42}=0$$
$$a_{11}a_{13}+a_{21}a_{23}+a_{31}a_{33}-a_{41}a_{43}=0$$
$$a_{12}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{32}a_{33}-a_{42}a_{43}=0$$

$$a_{41}=-\beta_x\gamma$$
$$a_{42}=-\beta_y\gamma$$
$$a_{43}=-\beta_z\gamma$$
$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-(\vec{\beta})^2}}.$$

En este punto vamos a considerar el caso simple de $\beta_y=\beta_z=0$ (mov. según x) y pongamos $x_0=y_0=z_0=t_0=t_0'=0$.

En este caso se puede ver que la forma más gral. queda $a_{21}=a_{31}=0$ porque si $y=z=0$ (puntos del eje x) $\Rightarrow$ $y'=z'=0$ (puntos del eje x')



De igual forma el plano xy se mapea en $x'y'$
$\Rightarrow$ $a_{23}=a_{32}=0$

Por razones de simetría t' no puede depender de las direcciones $\perp$ al mov. $\Rightarrow$ $a_{42}=a_{43}=0$

Un punto con $x=0$ está, en $t=0$, en el plano $x'=0$ $\Rightarrow$ $a_{12}=a_{13}=0$

$$\Rightarrow \quad x' = a_{11}(x - \overbrace{\beta_x}^{\beta} ct)$$

$$y' = a_{22}\, y$$

$$(*) \quad z' = a_{33}\, z$$

$$ct' = \frac{c}{\gamma} t + a_{41}(x - \beta_x ct)$$

Imponiendo que si un rayo de luz parte de los orígenes en el momento que coinciden $(t=t'=0)$

$$\Rightarrow \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0$$

y sustituyendo las expresiones $(*)$ y comparando con $x^2+y^2+z^2-c^2t^2=0$

$$\Rightarrow \quad x' = a_{11}(x - \overbrace{\beta_x}^{\beta} ct)$$
$$y' = a_{22}\, y$$
$$(*) \quad z' = a_{33}\, z$$
$$ct' = \frac{c}{\gamma} t + a_{41}(x - \beta_x ct)$$

Imponiendo que si un rayo de luz parte de los orígenes en el momento que coinciden $(t = t' = 0)$

$$\Rightarrow \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0$$

y sustituyendo las expresiones $(*)$ y comparando con $x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0$

$$(a_{11}^2 - a_{41}^2)\, x^2 + a_{22}^2\, y^2 + a_{33}^2\, z^2 - \left(-\beta_x^2 (a_{11}^2 - a_{41}^2) + \frac{1}{\gamma^2} - \frac{2\beta_x}{\gamma} a_{41}\right) c^2 t^2 + 2ctx\left(-\beta_x (a_{11}^2 - a_{41}^2) - \frac{a_{41}}{\gamma}\right) = 0$$

$$\overbrace{(\;)}^{1} x^2 + \overbrace{(\;)}^{1} y^2 + \overbrace{(\;)}^{1} z^2 + \overbrace{(\;)}^{0} xt + \overbrace{(\;)}^{-c^2} t^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad a_{11}^2 - a_{41}^2 = 1$$

$$a_{22}^2 = 1 \rightarrow a_{22} = 1$$
$$a_{33}^2 = 1 \rightarrow a_{33} = 1$$

uso esto

$$a_{41} = -\beta_x \gamma$$

uso estos

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_x^2}}$$

$\Rightarrow$ reemplazo en $a_{11}^2 - a_{41}^2 = 1$ $\Rightarrow \quad a_{11}^2 = \gamma^2 \rightarrow a_{11} = \gamma$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ <u>Transformaciones de Lorentz</u> $(\vec{\beta} = \beta_x \hat{i})$

$$x' = \gamma(x - \beta_x ct)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$ct' = \gamma(ct - \beta_x x)$$

límite cuando $\beta_x \to 0$ $\longrightarrow$

$\beta_x c \to v_x$

<u>Galileo</u>

$$x' = x - \underbrace{\beta_x c}_{v_x} t$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$ct' = ct$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta_x\gamma & 0 & 0 \\ -\beta_x\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Obtengamos las expresiones generales:

Lo recién discutido significa que la dirección perpendicular a la dirección de movimiento no hay cambios mientras que en la dirección de mov. se da una modificación dada por

$$
\begin{aligned}
ct' &= \gamma\,(ct - \beta_x x) \\
x' &= \gamma\,(x - \beta_x ct)
\end{aligned}
\qquad \text{con } x \text{ la dirección de mov.}
$$

En una dirección genérica $\Rightarrow$ será $ct' = \gamma\,(ct - \vec{\beta}\cdot\vec{r})$ con $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1 - |\vec{\beta}|^2}}$

la posición la expresamos como $\vec{r} = \underbrace{\dfrac{(\vec{\beta}\times\vec{r})\times\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2}}_{\vec{r}_\perp} + \underbrace{\dfrac{(\vec{\beta}\cdot\vec{r})\,\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2}}_{\vec{r}_\parallel}$

$$- \vec{r} - \overbrace{\vec{r}_\parallel}^{\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{r}}{|\vec{\beta}|^2}\vec{\beta}}$$

En una dirección genérica $\Rightarrow$ será $ct' = \gamma\,(ct - \vec{\beta}\cdot\vec{r})$ con $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-|\vec{\beta}|^2}}$

la posición la expresamos como $\vec{r} = \underbrace{\dfrac{(\vec{\beta}\times\vec{r})\times\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2}}_{\vec{r}_\perp} + \underbrace{\dfrac{(\vec{\beta}\cdot\vec{r})\,\vec{\beta}}{|\vec{\beta}|^2}}_{\vec{r}_\parallel}$

$\vec{r} - \vec{r}_\parallel \sim \dfrac{\vec{\beta}\cdot\vec{r}}{|\vec{\beta}|^2}\,\vec{\beta}$

$$\Rightarrow \vec{r}\,' = \underbrace{\vec{r}_\perp}_{\vec{r}-\vec{r}_\parallel} + \gamma\left(\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{r}}{|\vec{\beta}|^2}\,\vec{\beta} - \vec{\beta}\,ct\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{r}\,' = \vec{r} + (\gamma-1)\,\frac{\vec{\beta}\cdot\vec{r}}{|\vec{\beta}|^2}\,\vec{\beta} - \gamma\vec{\beta}\,ct}$$

T. de Lorentz en dirección arb. (homogénea)

En notación matricial es

$$\boxed{\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta_x & -\gamma\beta_y & -\gamma\beta_z \\ -\gamma\beta_x & 1+(\gamma-1)\frac{\beta_x^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_y}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_y & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_y}{\beta^2} & 1+(\gamma-1)\frac{\beta_y^2}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_y\beta_z}{\beta^2} \\ -\gamma\beta_z & (\gamma-1)\frac{\beta_x\beta_z}{\beta^2} & (\gamma-1)\frac{\beta_y\beta_z}{\beta^2} & 1+(\gamma-1)\frac{\beta_z^2}{\beta^2} \end{pmatrix}}_{\Lambda} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}}$$