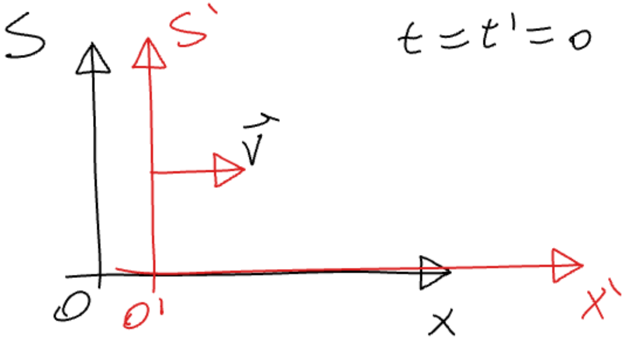
CLASE 23

Transformaciones de Lorentz y su significado

Habíamos, en la clase pasada, obtenido las transf. de Lorentz que nos relacionan las coordenadas de 2 sist. de ref que tienen un movimiento relativo uno respecto a otro:



$t = t' = 0$ es $O \equiv O'$

$$ct' = \gamma\,(ct - \beta x)$$

$$x' = \gamma\,(x - \beta ct)$$

$$\begin{pmatrix} y' = y \\ z' = z \end{pmatrix}$$

$$\beta \equiv \frac{v}{c} \qquad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Ejemplos: ¿A qué velocidad se mueve un reloj si mide el tiempo a la mitad del ritmo de un reloj en reposo?

$$t = \gamma\left(t' + \frac{\beta x'}{c}\right) \qquad \Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \beta \cancel{\frac{\Delta x'}{c}}^{\,0}\right) \Rightarrow \Delta t = \gamma \Delta t'$$

si $\boxed{\Delta t = 2\,\Delta t'}$

$$\Rightarrow \quad 2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow 1-\beta^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0{,}866$$

¿A qué velocidad se mueve una varilla (en la dirección de su eje) si su longitud parece ser la mitad que en reposo?

$$x' = \gamma(x - \beta c t)$$

$$ct' = \gamma(ct - \beta x)$$

$$x'_B - x'_A = L' = \gamma\left(x_B - x_A - \beta(ct_B - ct_A)\right)$$

$$\Rightarrow L' = \gamma(x_B - x_A)\overbrace{(1-\beta^2)}^{1/\gamma^2}$$

$$ct'_A = ct'_B \Rightarrow \quad ct_A - \beta x_A = ct_B - \beta x_B$$

$$\hookrightarrow ct_B - ct_A = \beta(x_B - x_A)$$

$$\Rightarrow L' = \frac{(x_B - x_A)}{\gamma} = \frac{L_0}{\gamma} \Rightarrow L' = \frac{L_0}{2}$$

$$\Rightarrow \gamma = 2 \Rightarrow \beta = 0{,}866.$$

Con lo anterior queda claro la necesidad de precisar lo que es la medición (que todo bastante turbio) y como podemos describir los eventos.

Eventos

Los puntos del espacio-tiempo los podemos describir imaginando eventos que tienen lugar en cada punto del espacio y las coordenadas del evento describen el punto del espacio-tiempo.

Estos eventos tienen un rol similar al concepto de carga de prueba que se utiliza para definir el campo eléctrico.

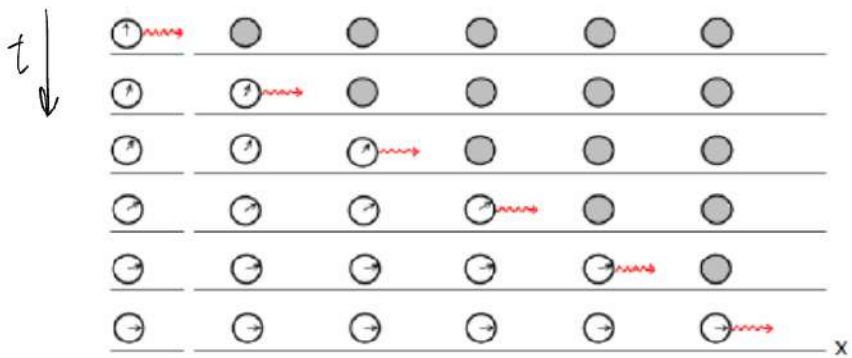
Un observador / sist de ref. describirá un cierto evento A con unas coord. x_A, y_A, z_A, t_A mientras que otro observador le asignará al evento A las coord. x'_A, y'_A, z'_A, t'_A que se relacionan con las otras por medio de las transformaciones de Lorentz.

Relojes Sincronizados

Dado que los sucesos/eventos no ocurren en la ubicación del observador (al menos no necesariamente) no resulta evidente la forma en que éste asigna el instante de tiempo en que tuvo lugar el evento.

Para esto, imaginemos que cada observador, dispone en cada punto del espacio un reloj sincronizado con el suyo. Esta sincronización se puede hacer de varias formas. Por ejemplo, comenzamos a correr un reloj en 0 en $t=t_0$ y en ese instante se emite un pulso de luz en todas las direcciones, de forma tal que cada reloj se pone en marcha cuando recibe el pulso marcando como instante inicial de tiempo $t_0 + \frac{r}{c}$ siendo r la distancia al origen.

Esquemáticamente



De esta forma, podemos asignarle a cada evento, que tiene lugar en cualquier punto del espacio, las coord. y el instante t que marca el reloj en el lugar del evento al momento del evento en cuestión.

$\Rightarrow$ la relatividad trae consigo, la necesidad de abandonar (o como mínimo, modificar) el concepto de simultaneidad como puede observarse directamente de las transf. de Lorentz

$$x' = \gamma (x - \beta ct)$$
$$ct' = \gamma (ct - \beta x)$$

dos sucesos, A y B, que ocurren simultaneamente para S $t_A = t_B = t_0$ serán tales que $t'_A \neq t'_B$ si $x_A \neq x_B$. Es decir, no serán simultaneos en S'

$$\left.\begin{aligned} ct'_B &= \gamma (ct_B - \beta x_B) \\ ct'_A &= \gamma (ct_A - \beta x_A) \end{aligned}\right\} \Rightarrow ct'_B - ct'_A = \underbrace{\gamma\beta (x_A - x_B)}_{t_A = t_B} \neq 0$$

Medida de Longitud.

En el ejemplo anterior que hicimos del largo de la varilla Implícitamente estabamos hablando de medidas de longitudes. Seamos más explícitos: Una medida de longitud será la distancia entre dos eventos que ocurren en el mismo instante de tiempo, y por ende, son relativas al observador/referencial que realiza la medida.

Consideremos de nuevo, la medición del largo de un objeto.

En un ref. S hay una varilla de largo L_0 en reposo.

Si la varilla es medida desde un ref. S' moviendose con velocidad v respecto de S en la dirección del eje de la varilla. se tendrá que

los sucesos A y B que ocurren en los ext. de la varilla

En un ref. S hay una varilla de largo L_0 en reposo.

Si la varilla es medida desde un ref. S' moviendose con velocidad v respecto de S en la dirección del eje de la varilla. se tendrá que

los sucesos A y B que ocurren en los ext. de la varilla en el instante $t'_A = t'_B$ están separados espacialmente

misma cuenta de antes

$$\left\{\begin{array}{l} x'_B - x'_A = \gamma\left(x_B - x_A - \beta(ct_B - ct_A)\right) \\ ct'_B = ct'_A \Rightarrow ct_B - ct_A = \beta(x_B - x_A) \end{array}\right\} \Rightarrow x'_B - x'_A = \frac{x_B - x_A}{\gamma}$$

$\Rightarrow$ siendo que la varilla está en reposo en S es $x_B - x_A = L_0$ y $x'_B - x'_A$ por construcción de los sucesos, será el largo de la varilla medida desde S'

$$\boxed{L' = \frac{L_0}{\gamma}}$$ contracción de Lorentz

Medida de t

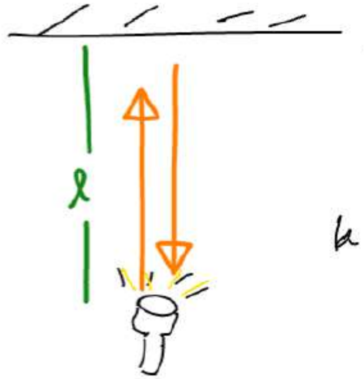
Medidas de tiempo

Similarmente, consideremos dos eventos A y B que tienen lugar en el mismo punto $x_A = x_B$ en un referencial S. La separación temporal (lapso) medida en S sea τ_0, la sep. temporal de estos eventos medida desde S' será

$$t'_B - t'_A = \gamma\left(t_B - t_A - \frac{\beta}{c}(x_B - x_A)\right) \underset{x_A = x_B}{=} \gamma(t_B - t_A) \Rightarrow \underbrace{t'_B - t'_A}_{\tau'} = \gamma \tau_0$$

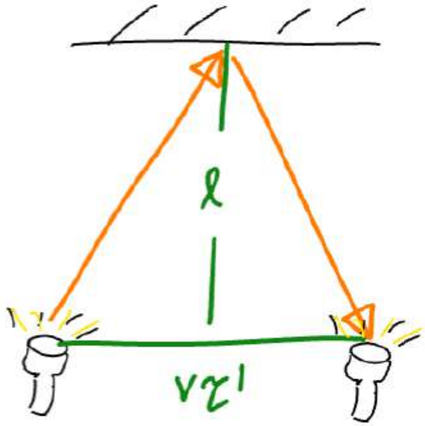
$$\Rightarrow \boxed{\tau' = \gamma \tau_0} \quad \text{Dilatación temporal}$$

Una forma de visualizarlo es considerar una persona que prende y apaga una linterna estando sentado bajo un espejo en un tren en mov. respecto a otro observador externo al tren



Para la persona del tren, el tiempo entre los eventos de prender la linterna, A, y que vuelva la luz, B, es $\tau_0 = \frac{2\ell}{c}$

Para el externo al tren



$$\tau' = \frac{2\sqrt{\ell^2 + \left(\frac{v\tau'}{2}\right)^2}}{c} \rightarrow \boxed{\tau' = \tau_0 \gamma}$$