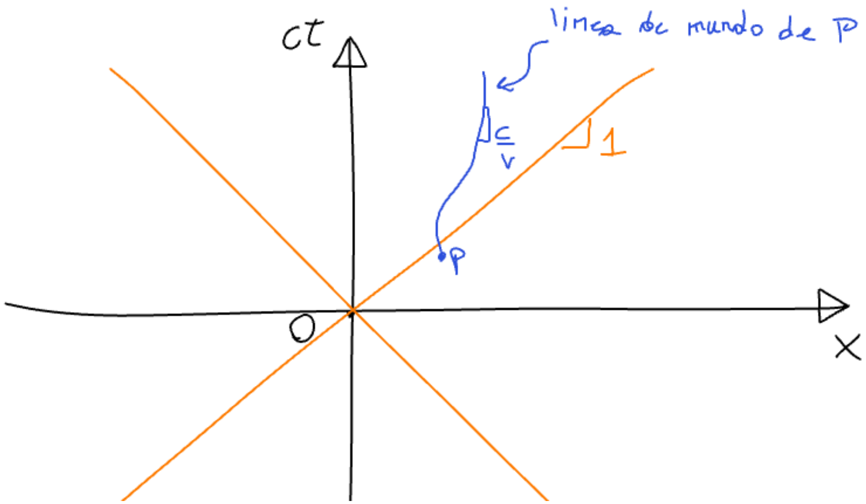
CLASE 24

Diagramas de Minkowski

Los diagramas de Minkowski son una herramienta práctica para el análisis o la descripción de fenómenos relativistas. Fueron introducidos en 1908 por Hermann Minkowski.

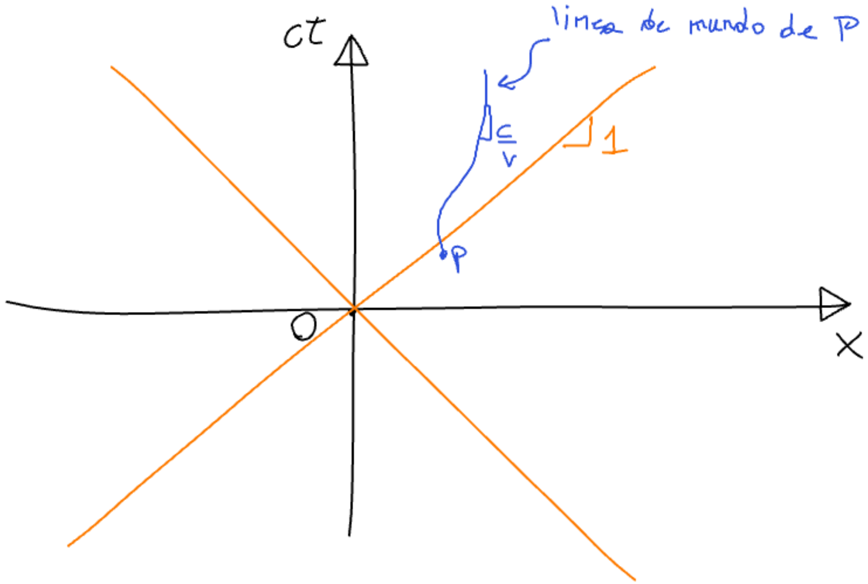
Para discutir los DM (diag. de Minkowski) vamos a olvidarnos de las direcciones perpendiculares al movimiento (rel) y graficamos el espacio-tiempo $ct-x$.



Un rayo de luz o pulso que se propague desde O. Éste saldrá inclinado en este diagrama con pendiente 1.

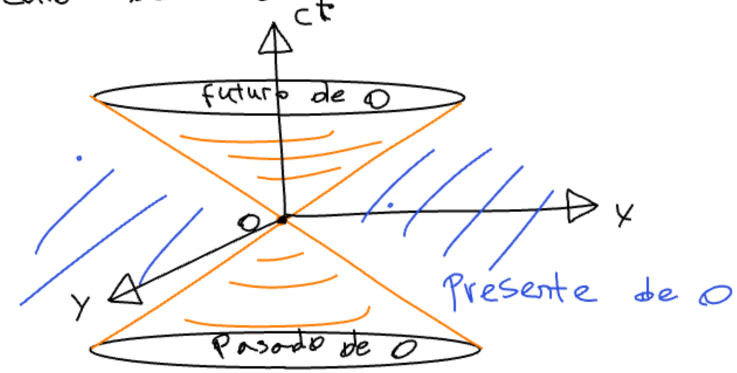
Muchas veces van a encontrar, en la literatura, el cono de luz

direcciones perpendiculares al movimiento (rel) y graficamos el espacio-tiempo $ct - x$.



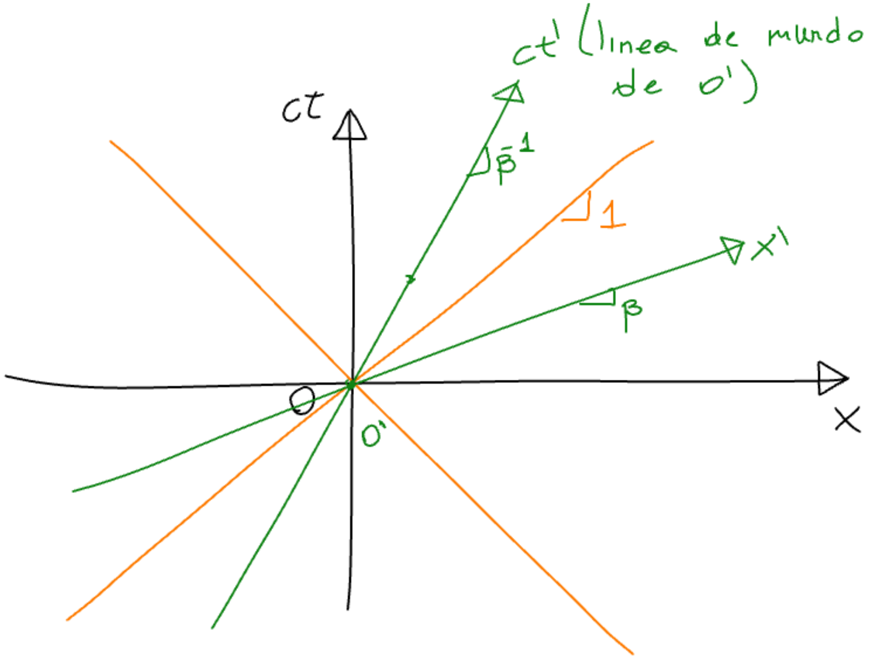
Un rayo de luz o pulso que se propague desde O. Éste saldrá inclinado en este diagrama con pendiente 1.

Muchas veces van a encontrar, en la literatura, el cono de luz



Para describir el movimiento de una partícula P en este diagrama, trazaremos una curva con su posición en función del tiempo donde su pendiente será $\frac{d(ct)}{dx} = c / \frac{dx}{dt} = \frac{c}{v} > 1$.

será $\frac{d(ct)}{dx} = c/\frac{dx}{dt} = \frac{c}{v} > 1$.



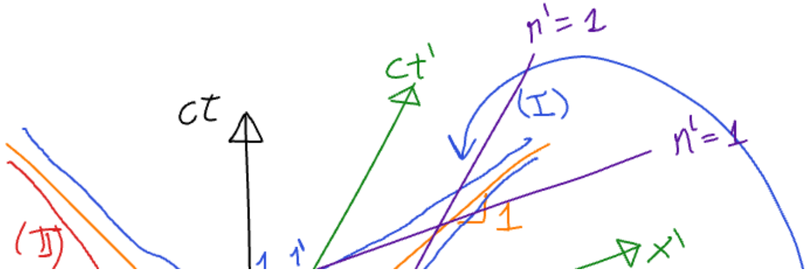
El sistema S' en este diagrama será: (el origen y los ejes)

$$\underline{x' = cte = n'} = \gamma(x - \beta ct) \Rightarrow ct = \frac{x}{\beta} - \frac{n'}{\gamma\beta}$$

Si $n' = 0$ esto es el eje ct'!!

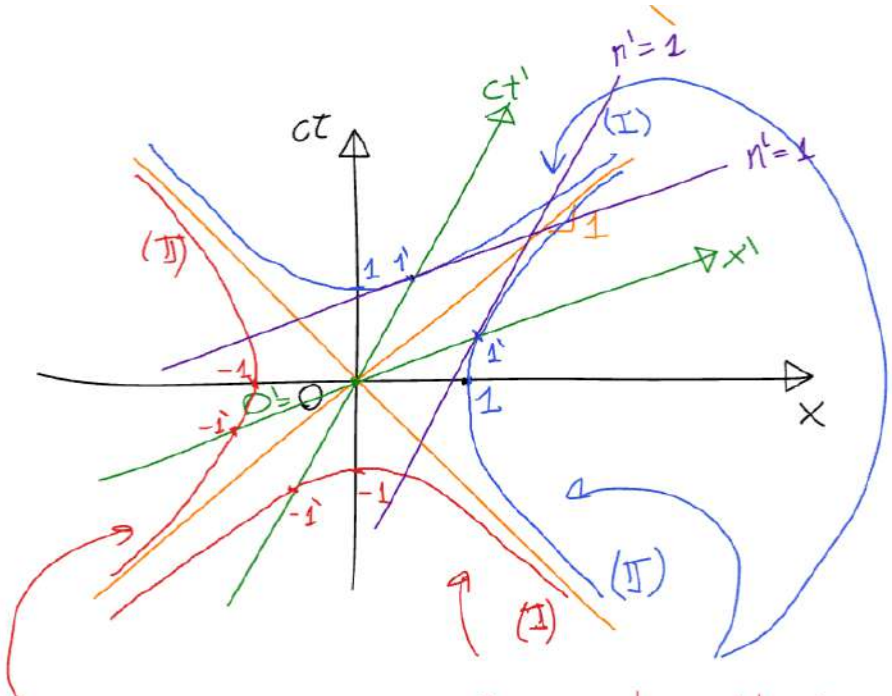
$$\underline{ct' = cte = n'} = \gamma(ct - \beta x) \Rightarrow ct = \beta x + \frac{n'}{\gamma}$$

Si $n' = 0$ esto es el eje x'!!



Vamos a graficar las curvas $c^2t^2 - x^2 = 1$ (I)

y $x^2 - c^2t^2 = 1$ (II)



Curvas de calibración

Vamos a graficar las curvas $c^2t^2 - x^2 = 1$ (I)

y $x^2 - c^2t^2 = 1$ (II)

$$\Rightarrow \quad ct = \pm\sqrt{1+x^2} \quad \text{(I)}$$

$$x = \pm\sqrt{1+c^2t^2} \quad \text{(II)}$$

Tomemos las curvas y expresemoslas en términos de las variable ct' y x'

$$c^2t^2 - x^2 = 1$$

$$\gamma^2(c^2t'^2 + 2\beta ct'x' + \beta^2x'^2) - \gamma^2(x'^2 + 2\beta ct'x' + \beta^2c^2t'^2) = 1$$

$ct = \gamma(ct' + \beta x')$

$x = \gamma(x' + \beta ct')$

$\begin{pmatrix} ct' = \gamma(ct - \beta x) \\ x' = \gamma(x - \beta ct) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \gamma^2c^2t'^2 - \gamma^2\beta^2c^2t'^2 - \gamma^2x'^2 + \gamma^2\beta^2x'^2 = 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\gamma^2(1-\beta^2)}_{1}\left[c^2t'^2 - x'^2\right] = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{c^2t'^2 - x'^2 = 1}$$

si $x' = 0 \Rightarrow ct' = \pm 1$

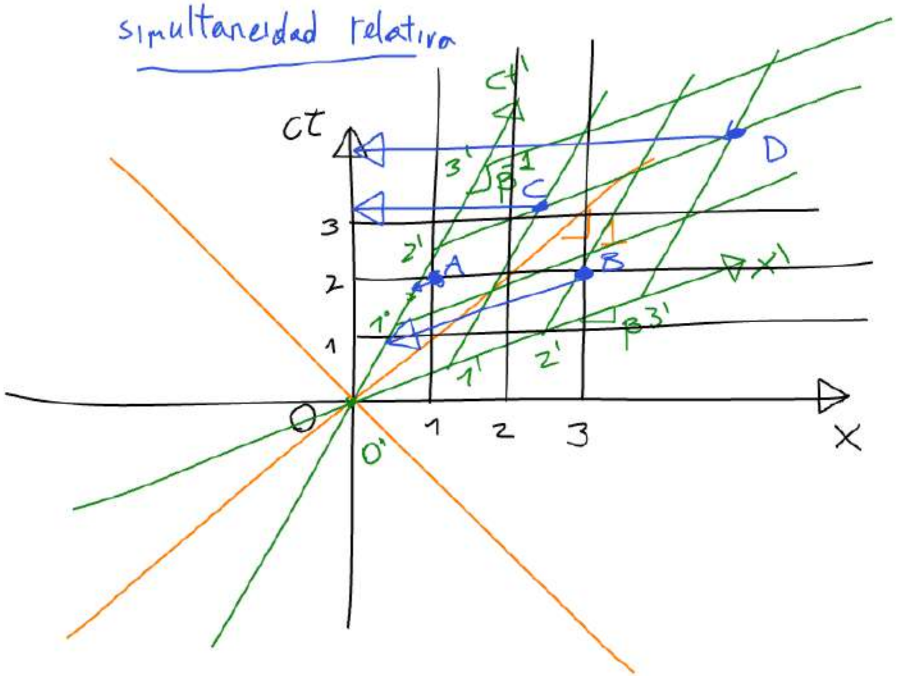
Análogamente $\boxed{x^2 - c^2t^2 = 1 = x'^2 - c^2t'^2}$

si $ct' = 0 \Rightarrow x' = \pm 1$

$\Rightarrow ct' = \pm 1$

$\rightsquigarrow$ si $ct' = 0 \Rightarrow x' = \pm 1$

simultaneidad relativa

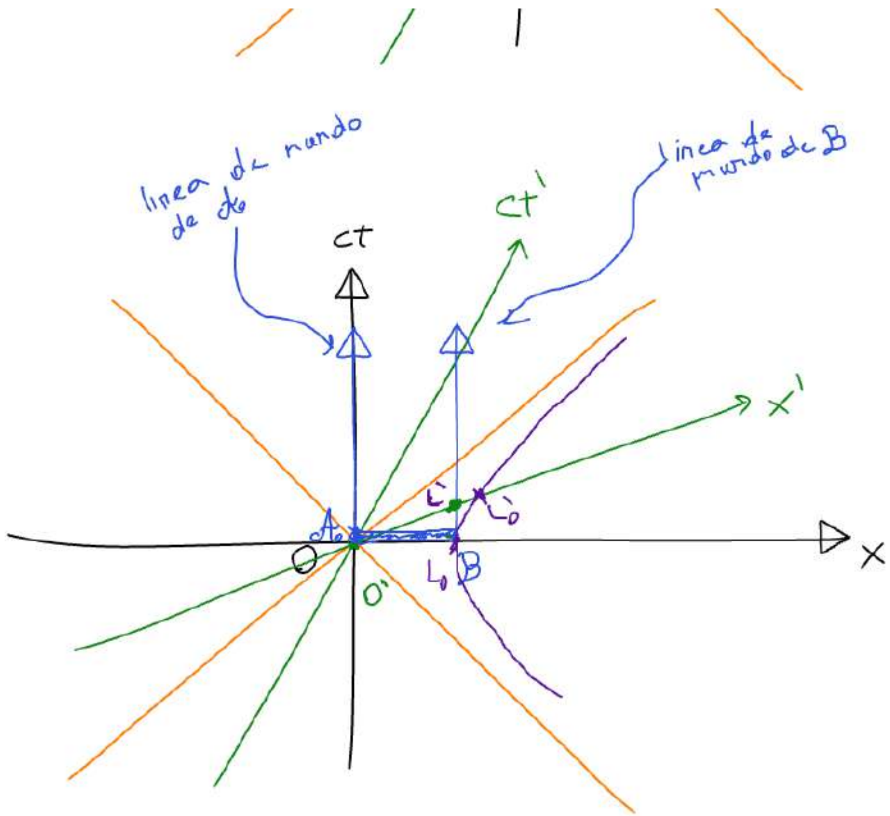


Con este diagrama, es fácil ver que los eventos simultáneos son relativos al observador.

Consideremos los eventos A y B simultáneos en S $\Rightarrow$ no son simult. en S'

Análogamente puedo considerar eventos C y D simultáneos en S' y puedo ver inmediatamente que no son simultáneos S.

Veamos la contracción de Lorentz gráficamente.



Veamos la contracción de Lorentz gráficamente.

Consideremos una varilla en reposo en S cuyos extremos son A y B.

Como está en reposo en S, sus líneas de mundo son las del diagrama.

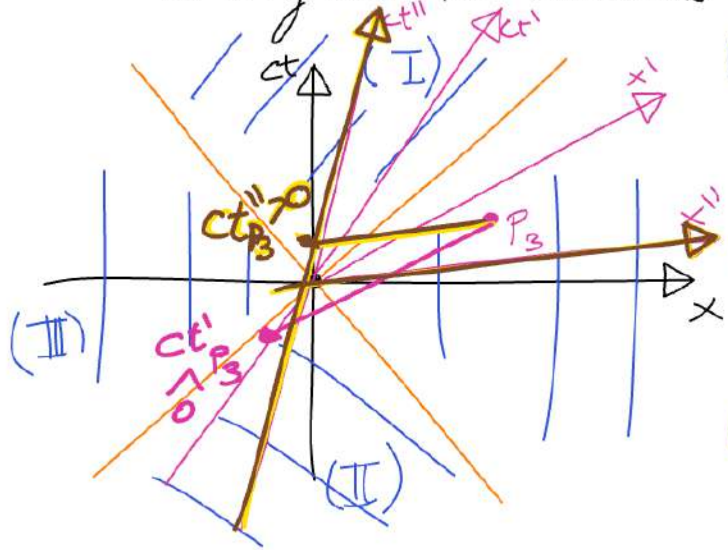
Para medir desde S' debo medir los extremos a un mismo ct'

$\Rightarrow$ Veamos el extremo B al instante $ct' = 0$.

Y comparando con la curva de calibración veo que su longitud $L' < L'_0$.

Pasado, Presente y futuro

El diagrama de Minkowski revela, fácilmente que

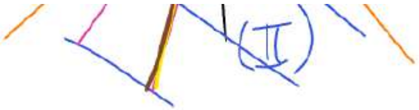


(I) representa los puntos del espacio tiempo que están en el futuro de O

(II) representa los puntos del espacio tiempo que están en el pasado de O

(III) representa los puntos del espacio tiempo que están en presente de O

Podemos, para cualquier punto de la región (III) encontrar un referencial en que un evento ocurra antes que O y que visto de otro referencial ocurra luego.



representan los puntos del
espacio tiempo que están en
presente de O

Podemos, para cualquier punto de la región (III) encontrar un referencial en que un evento ocurra antes que O y que visto de otro referencial ocurra luego.

Sin embargo, para un punto en la región (I) [(II)] que llamamos futuro [pasado] de O nunca van a existir eventos cuya proyección en el eje ct o ct' o ct''... sea menor [mayor] a cero.
Es decir, todos los eventos en (I) se dan con t positivos sin importar el ref.
todos los eventos en (II) se dan con t negativos sin importar el ref.

Invariantes de Lorentz y cuadrivectores

Invariantes de Lorentz y cuadrivectores

Para dos eventos cualesquiera, A y B, su separación espacio-temporal definida por:

$$\Delta s^2 \equiv (x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 - c^2 (t_A - t_B)^2$$

es invariante ante transformaciones de Lorentz.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \Delta s^2 = {} & \gamma^2 \left((x'_A - x'_B)^2 + \cancel{2\beta c (t'_A - t'_B)(x'_A - x'_B)} + \beta^2 c^2 (t'_A - t'_B)^2 \right) \\ & + (y'_A - y'_B)^2 + (z'_A - z'_B)^2 \\ & - \gamma^2 \left(c^2 (t'_A - t'_B)^2 + \cancel{2\beta c (t'_A - t'_B)(x'_A - x'_B)} + \beta^2 (x'_A - x'_B)^2 \right) \\ = {} & (x'_A - x'_B)^2 + (y'_A - y'_B)^2 + (z'_A - z'_B)^2 - c^2 (t'_A - t'_B) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ sea $\Delta s^2 \equiv \Delta r^2 - c^2 \Delta t^2 \Rightarrow$

si $\Delta s > 0$ decimos que la separación de los eventos es de tipo espacio

si $\Delta s < 0$ decimos que la separación de los eventos es de tipo tiempo

si $\Delta s = 0$ decimos que la separación de los eventos es tipo luz