CLASE 25

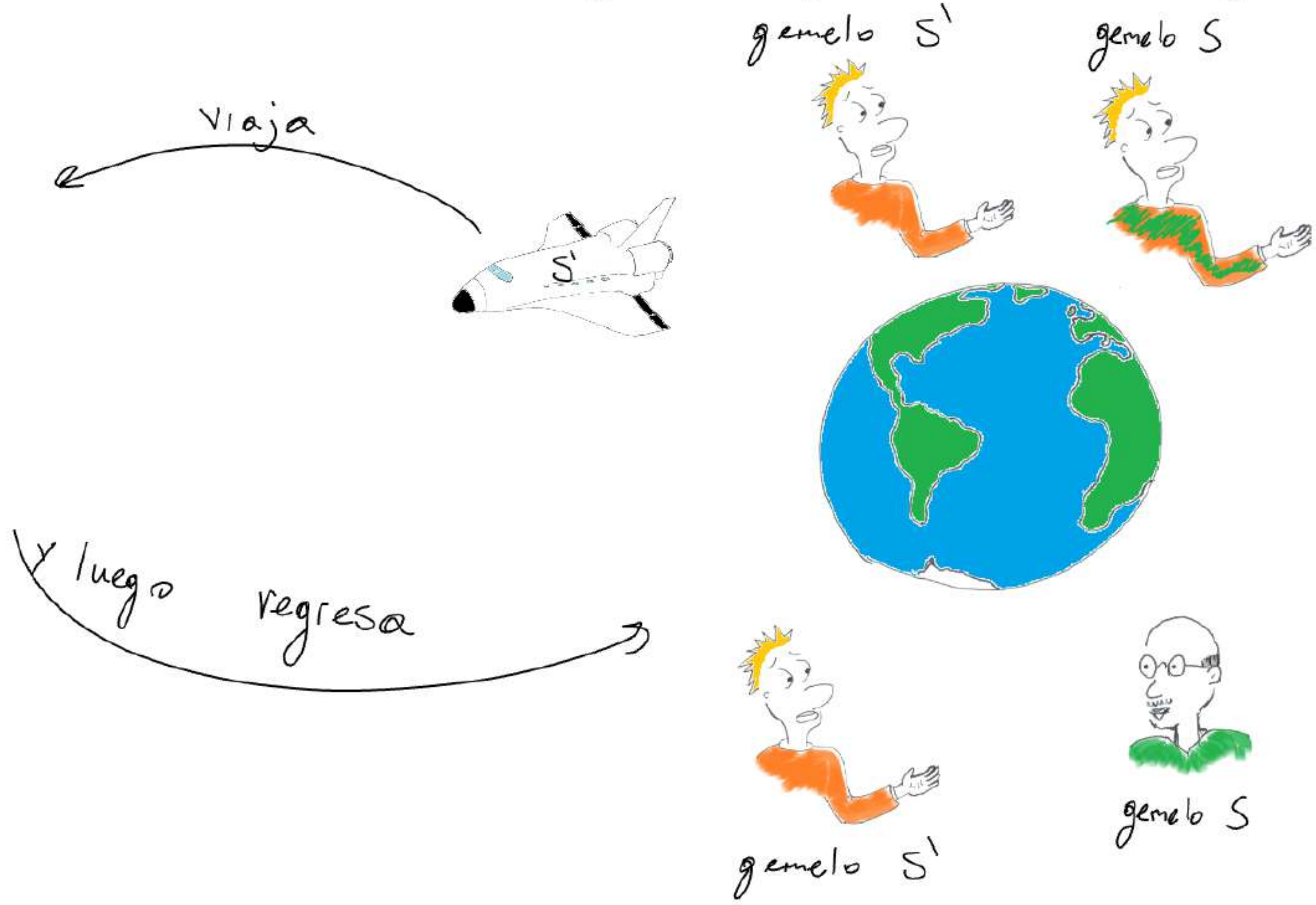
Paradoja de los gemelos

La paradoja de los gemelos fue propuesta por Paul Langevin en 1911 y hace referencia al tiempo propio y al diferente paso del tiempo para 2 obs. con movimiento relativo.

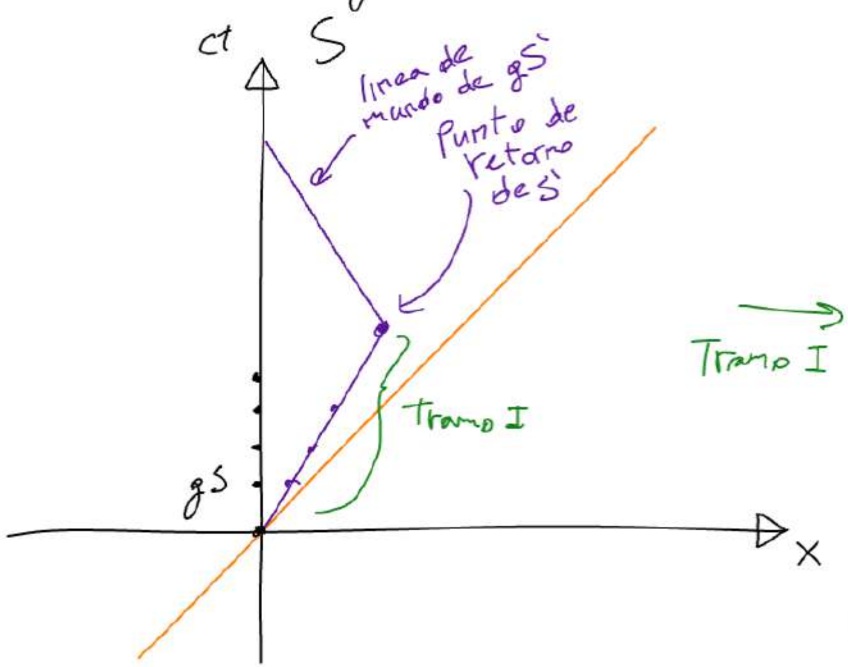
Si tenemos 2 observadores (con mov. relativo) cada uno ve al otro como si el tiempo le pasara más lento. en un factor $\frac{1}{\gamma}$.

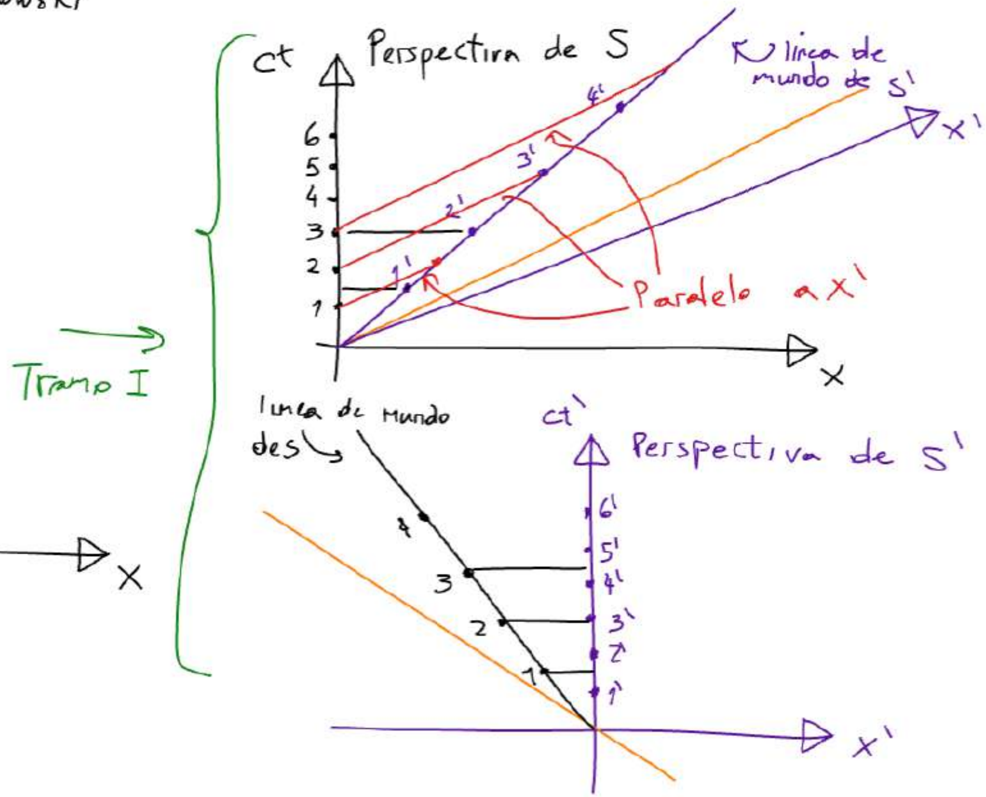
La paradoja toma su forma al considerar dos observadores, popularmente gemelos, en el que uno parte en un viaje a velocidades relativistas (respecto del otro) y luego regresa y se encuentra con su gemelo. ¿Quién es el más joven?

regresa y se encuentra con su gemelo. ¿Quién es el más joven?



Veamos un diagrama de Minkowski



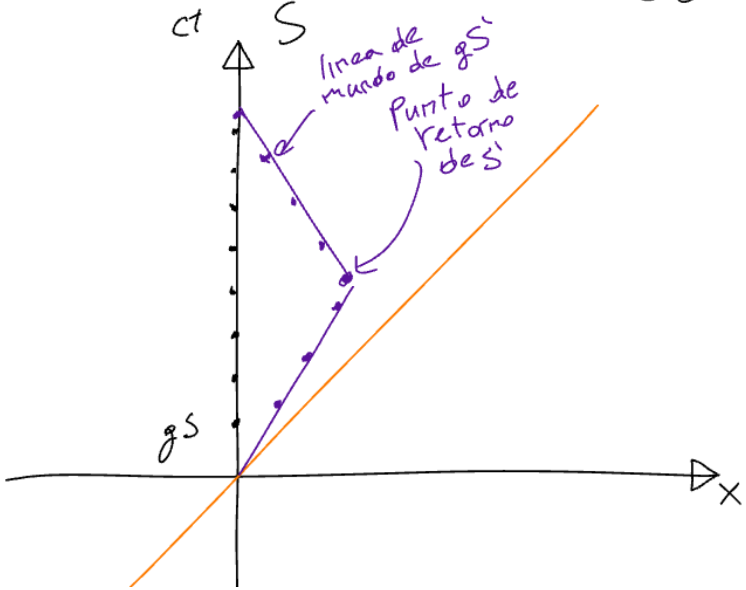


⟹ Para el viajero el más joven es el terrestre } ¿esto es la
Para el terrestre el más joven es el viajero } paradoja... o no!

El problema radica en que los dos observadores no son simétricos e intercambiables sus roles. El gemelo S' sufre una aceleración y no es un S.I. y por tanto no podemos esperar que la extrapolación a su ref. del paso del tiempo (y otros efectos) sean los mismos que para un referencial inercial.

La visión del gemelo S sí es correcto porque es la visión de un referencial inercial

Perspectiva correcta es la de S



Observación: La visión/perspectiva de S' puede también ser tenida en cuenta pero para ello debemos generalizar la teoría para incluir a los referenciales no inerciales (Relatividad General). Esto se ha hecho* y arroja la misma conclusión que para el referencial inercial

Por ejemplo:
DOI: 10.1007/s10702-006-1850-3

Transformaciones de velocidades y aceleraciones

En la primera parte del curso vimos que para dos referenciales es

$$\vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_T \xrightarrow[\text{sistemas no rotan}]{\text{si los}} \vec{V}_T = \vec{V}_{O'} \Rightarrow \vec{V} = \vec{V}' + \vec{V}_{O'}$$

$$\vec{V}_{P/S} = \vec{V}_{P/S'} + \vec{V}_{S'/S}$$

Velocidad de una partícula P vista desde S

Velocidad de transporte

Velocidad de una partícula P vista desde S'

El problema es que esto no puede seguir siendo válido ya que, sino, facilmente podríamos "ver" velocidades mayores a la de la luz.

Comencemos por plantear las T. de l

...mente podríamos "ver" velocidades mayores a la de la luz.

Comencemos por plantear las T. de L.

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta x) \\ x' &= \gamma(x - \beta ct) \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{aligned} ct &= \gamma(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma(x' + \beta ct') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}$$

Una partícula P que tenga velocidad $\vec{u}'$ en S' estará en la posición $(x' + u'_x \Delta t', y' + u'_y \Delta t', z' + u'_z \Delta t')$ un tiempo $\Delta t'$ luego de estar en (x', y', z')

¿cómo es u_x, u_y y u_z dados u'_x, u'_y y u'_z?

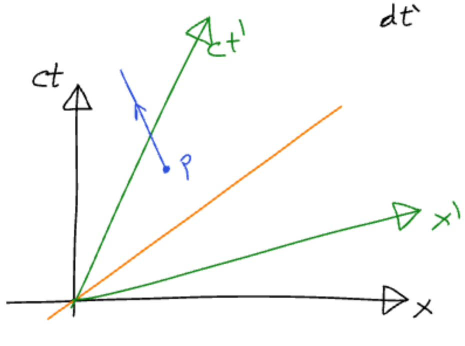
regla de la cadena

$$\left.\begin{aligned} ct &= \gamma(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma(x' + \beta ct') \\ y &= y' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} = u_x = \gamma\left(\frac{dx'}{dt} + \beta c \frac{dt'}{dt}\right) = \gamma\left(\frac{dx'}{dt'} + \beta c \frac{dt'}{dt'}\right)\frac{dt'}{dt} = \gamma(u'_x + \beta c) \cdot \frac{dt'}{dt}$$

$$\left.\begin{aligned} ct &= \gamma(ct' + \beta x') \\ x &= \gamma(x' + \beta ct') \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = u_x = \gamma\left(\frac{dx'}{dt} + \beta c \frac{dt'}{dt}\right) = \gamma\left(\frac{dx'}{dt'} + \beta c \frac{dt'}{dt'}\right)\frac{dt'}{dt} = \gamma(u'_x + \beta c)\cdot\frac{dt'}{dt}$$

regla de la cadena

$$c\frac{dt}{dt'} = \gamma\left(c\frac{dt'}{dt'} + \beta\frac{dx'}{dt'}\right) = \gamma(c + \beta u'_x) \Rightarrow \frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\gamma\left(1 + \frac{\beta u'_x}{c}\right)}$$



$$\Rightarrow u_x = \frac{u'_x + \beta c}{1 + \frac{\beta u'_x}{c}} \Rightarrow \boxed{\underset{v_{P/S}}{u_x} = \frac{\underset{v_{P/S'}}{u'_x} + \underset{v_{S'/S}}{v}}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}}}$$

pero $\beta = \frac{v}{c}$

Velocidad de S' respecto a S (en dir. x)

Transformaciones de velocidades.

$$u_y = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \frac{dy}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \frac{u'_y}{\gamma\left(1 + \frac{v u'_x}{c^2}\right)} \longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} u_y &= \frac{u'_y/\gamma}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}} \\ u_z &= \frac{u'_z/\gamma}{1 + \frac{v u'_x}{c^2}} \end{aligned}}$$

Ejemplos: Pongamos números

a) $V = 0{,}8c$ $\quad u'_x = 0{,}8c \Rightarrow u_x = \dfrac{1{,}6\,c}{1+0{,}64} = \dfrac{1{,}6}{1{,}64}\,c = 0{,}9756\,c$

b) $V = 0{,}9c$ $\quad u'_x = 0{,}99c \Rightarrow u_x = \dfrac{1{,}89\,c}{1+0{,}891} = \dfrac{1{,}89}{1{,}891}\,c = 0{,}99947\,c$

c) $V = 0{,}9c$ $\quad u'_x = c$!! $\Rightarrow u_x = \dfrac{1{,}9\,c}{1+0{,}9} = c$!!

⇒ si algo se mueve a la velocidad de la luz ⇒ todo otro observador lo va a ver a la velocidad de la luz

d) $V = 0{,}9c$ $\quad u'_x = -c \Rightarrow u_x = \dfrac{-0{,}1\,c}{1-0{,}9} = -c$!!

Sin importar el sentido

d) $v = 0{,}9c \qquad u'_x = -c \implies u_x = \dfrac{-0{,}1c}{1-0{,}9} = -c$!!

Sin importar el sentido

e) $v = 0{,}8c \qquad u'_x = \alpha c$ con $\alpha < 1$ $\qquad (|u'| = c \text{ !!})$

$u'_y = \sqrt{1-\alpha^2}\, c$

$$\left.\begin{aligned} \implies u_x &= \frac{[\alpha + 0{,}8]c}{1 + \alpha 0{,}8} \\ u_y &= \frac{\sqrt{1-\alpha^2}\,c}{\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{1-0{,}64}}\right)}_{\gamma}(1+\alpha 0{,}8)} \end{aligned}\right\} \implies |u| = \sqrt{\frac{(\alpha^2c^2 + 1{,}6\,\alpha c^2 + 0{,}64c^2) + (1-\alpha^2)c^2(1-0{,}64)}{(1+\alpha 0{,}8)^2}}$$

$$= c\sqrt{\frac{1{,}6\alpha + 1 + 0{,}64\alpha^2}{(1+\alpha 0{,}8)^2}} = c \text{ !!}$$

Sin importar la dirección

Pa... la... ...l...

Para los aceleraciones, clásicamente, teníamos que

$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_r + \vec{a}_c$ y entre S.I es $\vec{a}_T = \vec{a}_c = 0$

$\Rightarrow \vec{a} = \vec{a}'$

Veamos que sucede ahora

$$a_x = \frac{du_x}{dt} = \frac{du_x}{dt'}\frac{dt'}{dt} = \frac{1}{\gamma\left(1+\frac{u'_x V}{c^2}\right)}\left[\frac{\frac{d}{dt'}(u'_x+V)}{1+\frac{u'_x V}{c^2}} - \frac{u'_x+V}{1+\frac{u'_x V}{c^2}}\cdot\frac{d}{dt'}\left(1+\frac{u'_x V}{c^2}\right)\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{a_x = \frac{a'_x}{\gamma^3\left(1+\frac{u'_x V}{c^2}\right)}}$$

Transformaciones de aceleraciones

y análogamente es

$$a_{y,z} = \frac{du_{y,z}}{dt} = \frac{du_{y,z}}{dt'}\frac{dt'}{dt} \Rightarrow$$

$$\boxed{a_{y,z} = \frac{a'_{y,z} - a'_x\frac{u'_{y,z}V}{c^2}}{\gamma^2\left(1+\frac{Vu'_x}{c^2}\right)}}$$