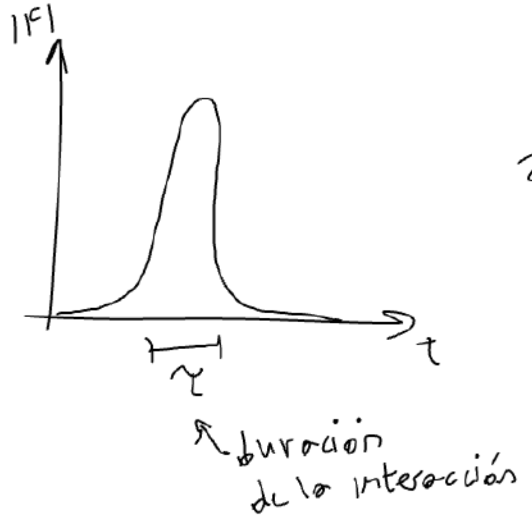
CLASE 26

Impulso y colisiones

En la mecánica relativista muchas cosas se modifican, pero vamos a considerar que, al igual que en la física clásica, el momento (o cantidad de mov. lineal) se conserva.

Sin embargo, veamos las modificaciones que debemos hacer. Por un lado, las leyes de la mecánica clásica son invariantes ante T de G pero no ante T. de L. Además, la acción y reacción (3ra ley) tiene sentido únicamente para fuerzas de contacto. y no para interacciones a distancia ya que rápidamente entraríamos en contradicciones con la simultaneidad y la causalidad.

Comenzamos por estudiar las colisiones, donde las fuerzas involucradas catalogan como fuerzas de contacto: Es decir, recordando lo visto en relación a los impulsos

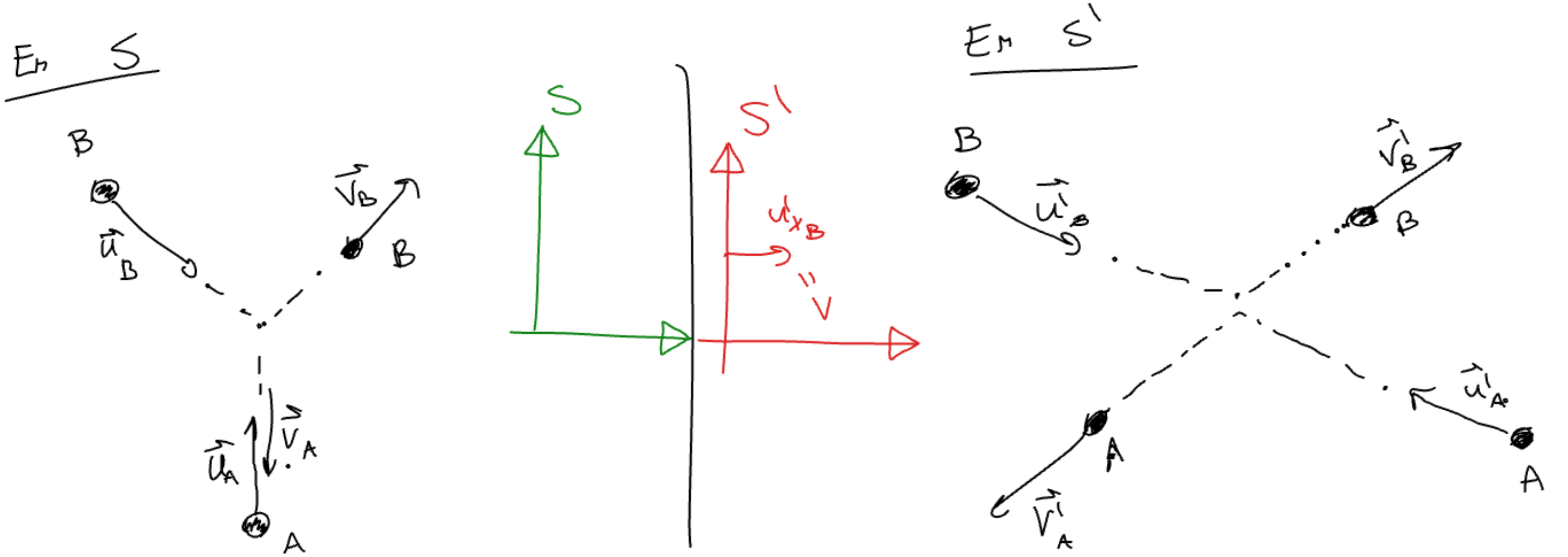


$\tau << t_{típicos}$ y además la separación de las partículas es despreciable al momento de la interacción.

Lo que va a suceder, es que debemos redefinir el momento lineal o la masa si queremos que en los choques la cantidad de mov. lineal se conserve.

Consideremos, para empezar, una colisión elástica entre 2 partículas idénticas y veamos este choque desde dos referenciales S y S' con mov. relativo.

Demandemos la cons. de la canti. de mov. tanto en S como en S'



$$\vec{u}'_A + \vec{u}'_B = \vec{V}'_A + \vec{V}'_B$$

Como la colisión es elástica, en S' (Ref. C.M.) las velocidades antes y después del choque son iguales, y el momento neto es 0.

$$m u'_{x_A} + m u'_{x_B} = 0 \Rightarrow u'_{x_A} = -u'_{x_B}$$
$$m u'_{y_A} + m u'_{y_B} = 0 \Rightarrow u'_{y_A} = -u'_{y_B}$$

$$\left.\begin{array}{l} \xrightarrow[\text{elástica}]{\text{Colisión}} \end{array} \begin{array}{l} |\vec{u}'_A| = |\vec{v}'_A| \\ |\vec{u}'_B| = |\vec{v}'_B| \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u'_{x_A} = V'_{x_A} = -V'_{x_B} \\ u'_{y_A} = -V'_{y_A} = V'_{y_B} \end{array}$$

En S es $u_{x_A} = 0$ $V_{x_A} = 0$. Para S, S' se mueve hacia la derecha con velocidad $u'_{x_B} = V$.

Clásicamente teníamos que la comp. vertical del momento no se ve alterada y es

Cons. de P_y en S

$$m u_{y_A} + m u_{y_B} = m V_{y_B} + m V_{y_A} \Rightarrow \boxed{2m u_{y_A} = -2m u_{y_B}} \; (*) \Rightarrow u_{y_A} = -u_{y_B}$$

transformemos las velocidades de S → S'

$$u'_{y_B} = \frac{u_{y_B}}{\gamma\left(1 - \frac{u_{x_B} V}{c^2}\right)}$$

$$u'_{y_A} = \frac{u_{y_A}}{\gamma\left(1 - \frac{u_{x_A} V}{c^2}\right)} \underset{u_{x_A}=0}{=} \frac{u_{y_A}}{\gamma}$$

dado que $u'_{y_B} = -u'_{y_A}$

$$\Rightarrow \boxed{u_{y_B} = -u_{y_A}\left(1 - \frac{u_{x_B} V}{c^2}\right)} \quad \text{I}$$

$$u_{y_A} = u_{y_A}\left(1 - \frac{u_{x_B} V}{c^2}\right)$$

esto es inconsistente

Esto quiere decir que si el momento se conserva en un ref ⇒ no se conserva en el otro.

El problema puede surgir de asumir que las masas de las dos partículas son iguales! en ambos refs.
Si las distancias y los tiempos son relativos al observador no hay razones fuertes para decir que la masa que mide/ve un observador no varía según el estado de mov. relativo del observador.

Si modificamos ⊛ $2m u_{y_A} = -2m u_{y_B} \rightarrow \boxed{2m_A u_{y_A} = -2m_B u_{y_B}}$

obtenemos que $m_B = -\dfrac{m_A u_{y_A}}{u_{y_B}}$

$$\frac{u'_{y_A}}{u'_{y_B}} = \left[\frac{\dfrac{u_{y_A}}{\cancel{\gamma}\left(1-\frac{u_{x_A}V}{c^2}\right)}}{\dfrac{u_{y_B}}{\cancel{\gamma}\left(1-\frac{u_{x_B}V}{c^2}\right)}}\right] \Rightarrow \frac{u_{y_A}}{u_{y_B}} = \underbrace{\left(u'_{y_A}/u'_{y_B}\right)}_{u'_{y_A}=-u'_{y_B}} \cdot \frac{1}{1-\frac{u_{x_B}V}{c^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{m_B = \frac{m_A}{1-\frac{u_{x_B}V}{c^2}}} \quad \text{II}$$

Las masas no son iguales en S !!

recordando que $v = u'_{x_B} = \dfrac{u_{x_B} - v}{1 - \frac{u_{x_B} v}{c^2}}$ $\Rightarrow$ $v - \dfrac{u_{x_B} v^2}{c^2} = u_{x_B} \cdot v$

tranf. de vel.

$\hookrightarrow$ $v = \dfrac{c^2}{u_{x_B}} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{u_{x_B}^2}{c^2}}\right)$

signo de $-$!! (signo $+$ implica $v > c$)

combino con (II) y obtengo $m_B = \dfrac{m_A}{\sqrt{1 - \frac{u_{x_B}^2}{c^2}}}$

si tomo límite de $u_{x_A} \to 0$ ($u_{x_B} \to 0$)

u_{x_B} es la velocidad de B! y m_A es la masa de A que está en reposo (masa de B en reposo)

$\Rightarrow$ $m(v) = \gamma(v) m_0$ siendo v la velocidad de la partícula y m_0 su masa en reposo

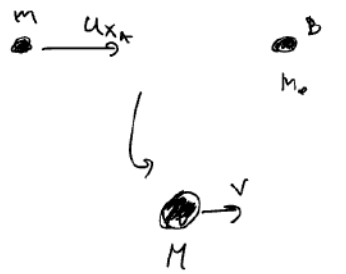
De esta forma $\boxed{\vec{p} = m(v)\vec{v}}$ ó $\boxed{\vec{p} = \gamma(v) m_0 \vec{v}}$

En lo anterior sólo supusimos que la energía se conservó en la sit. simétrica.

Analicemos un choque inelástico.

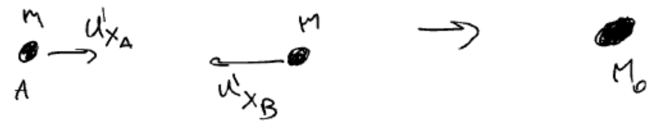
Dos partículas idénticas colisionan y quedan unidas.

En S



$$V = -u'_{x_B} = u'_{x_A}$$

En S'



$$m\, u'_{x_A} + m\, u'_{x_B} = 0 \Rightarrow u'_{x_A} = -u'_{x_B}$$

$$\boxed{u_{x_A} = \frac{u'_{x_A} - u'_{x_B}}{1 - \frac{u'_{x_A} u'_{x_B}}{c^2}} = \frac{-2u'_{x_B}}{1 + \frac{u'^2_{x_B}}{c^2}}}$$

III

Cons p_x en S $\Rightarrow m(u_{x_A})\,u_{x_A} + M_0 \cdot 0 = -M(u'_{x_B})\,u'_{x_B}$ IV

de III y IV $\Rightarrow m(u_{x_A}) \cdot \dfrac{\cancel{2u'_{x_B}}}{1+\frac{u'^2_{x_B}}{c^2}} = M_0\,\gamma(u'_{x_B})\,\cancel{u'_{x_B}}$

$$\Rightarrow 2m_0\,\gamma\left(\frac{2u'_{x_B}}{1+\frac{u'^2_{x_B}}{c^2}}\right) = M_0\,\gamma(u'_{x_B})\left(1+\frac{u'^2_{x_B}}{c^2}\right)$$

$$\underbrace{2m_0\sqrt{1-\frac{u'^2_{x_B}}{c^2}}}_{\frac{1}{\gamma(u'_{x_B})}} = M_0\left(1+\frac{u'^2_{x_B}}{c^2}\right)\cdot\underbrace{\sqrt{1-\frac{4u'^2_{x_B}}{c^2\left(1+\frac{u'^2_{x_B}}{c^2}\right)^2}}}_{\frac{1}{\gamma(u_{x_A})}} \Rightarrow 2m_0\underbrace{\sqrt{1-\frac{u'^2_{x_B}}{c^2}}}_{\frac{1}{\gamma(u'_{x_B})}} = M_0\underbrace{\sqrt{1-\frac{2u'^2_{x_B}}{c^2}+\frac{u'^4_{x_B}}{c^4}}}_{\frac{1}{\gamma^2(u'_{x_B})}}$$

$$\Rightarrow \boxed{2m_0\,\gamma(u'_{x_B}) = M_0}$$

$$\boxed{2\,m(u'_{x_B}) = M_0}$$

Se conserva la masa relativista!!

Estos cambios que hicimos van de la mano de generalizar la 2ª ley de Newton a $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ con $\vec{p} = m(v)\vec{v}$. de donde se concluye que la cant. de mov. lineal se conserva en los choques y la forma de la segunda ley permanece ~ igual.

Energía cinética

Al igual que en la física clásica, podemos definir (generalizar) la energía cinética como

$$K = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int \frac{d}{dt}(m(v)\vec{v})\cdot d\vec{l} \underset{\text{suporgamos una única dirección}}{=} \int \frac{d}{dt}(m(v)v)\,dx = \int \frac{d}{dt}(m(v)\,v)\,\overbrace{\frac{dx}{dt}}^{v}\,dt = \int \frac{d}{dt}(m_0\,\gamma(v)\,v)\,v\,dt$$

En A la partícula está en reposo y en B tiene velocidad v.

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow \boxed{v = c\sqrt{1-\frac{m_0^2}{m^2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{c}{2\sqrt{1-\frac{m_0}{m^2}}}\left(+\frac{2m_0^2}{m^3}\right)\frac{dm}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(m(v)v)v = c^2\left(1-\frac{m_0^2}{m^2}\right)\frac{dm}{dt} + mc\cancel{\sqrt{1-\frac{m_0^2}{m^2}}}\frac{c}{\cancel{\sqrt{1-\frac{m_0}{m^2}}}}\frac{m_0^2}{m^3}\frac{dm}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(m(v)v)v = c^2\frac{dm}{dt}\left[1-\cancel{\frac{m_0^2}{m^2}}+\cancel{\frac{m_0^2}{m^2}}\right] = c^2\frac{dm}{dt}$$

$\Rightarrow$ La energía cinética de 1 part es:

$$\left[K = \int c^2\frac{dm}{dt}dt = c^2 m(v) - c^2 m_0\right]$$

Definimos la energía E de una partícula como:

$$\boxed{E} \equiv m_0c^2 + K = \boxed{mc^2}$$

definición

Energía en reposo

Energía cinética

$$mc = \frac{E}{c}$$

$$(K+m_0c^2)^2 = E^2 = m_0^2\gamma^2(v)c^4 = m_0^2c^4 + m_0^2(\gamma^2-1)c^4$$

$$\Rightarrow E^2 = m_0^2c^4 + m_0^2\left(\frac{1}{1-\frac{v^2}{c^2}}-1\right)c^4 = m_0^2c^4 + \underbrace{\left(\frac{m_0^2v^2c^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}\right)}_{\underbrace{m_0^2\gamma^2v^2}_{p^2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{E^2 = (m_0c^2)^2 + (pc)^2}$$

$$\underline{P = \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right)}$$

cuadrivector momento.

$$\boxed{P = (mc, p_x, p_y, p_z)} \longrightarrow (P)^2 = m^2c^2 - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = (m_0c^2)^2$$

generalización de prod. interno.

$$\boxed{\Delta r = (ct, \Delta x, \Delta y, \Delta z)}. \longrightarrow (\Delta r)^2 = c^2t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2$$

conservar el cuadrivector momento es cons. la cant. de mov. lineal y la energía (o la masa!!)

Taylor de $\gamma(v)$ en torno a $v=0$

$$K = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2(\gamma(v) - 1) = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = m_0c^2\left(\underbrace{1 + \frac{1}{2}\Big(\overbrace{\frac{1}{(1-\frac{v^2}{c^2})^{3/2}}}^{1}\Big)\Big|_{\frac{v^2}{c^2}\to 0}\frac{v^2}{c^2} + o\left(\frac{v^4}{c^4}\right)} - 1\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x^2)$$

$$\Rightarrow K = m_0c^2 \cdot \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2} + o\left(\frac{v^4}{c^4}\right)\right] = \frac{m_0v^2}{2} + \alpha m_0\frac{v^4}{c^2} + o\left(\frac{v^6}{c^6}\right) \xrightarrow[v\to 0]{} \frac{m_0v^2}{2} \;!!$$