CLASE 27

Recapitulemos un poco.

Habíamos visto que la energía cinética de una partícula era $K = m_0 c^2(\gamma(v) - 1)$

y la energía de una partícula era

$$E = \underbrace{m_0 c^2}_{\text{usualmente denominado energía en reposo.}} + K = m_0 c^2 \gamma(v) \quad \text{o más popularmente} \quad \boxed{E = mc^2}$$

$$m = m(v) = m_0 \gamma(v)$$

El momento de una partícula es $\vec{p} = m\vec{v} = m_0 \gamma(v) \vec{v}$

y $E^2 = p^2c^2 + m_0^2 c^4$

Fuerzas y 2^{da} ley de Newton

Experimentalmente se encuentra que $\vec{F}$ (por ej. $\vec{F}=q(\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B})$) se relaciona con el momento como $\vec{F}=\frac{d\vec{p}}{dt} \neq m\vec{a}$ con $\vec{p}=m_0\gamma(v)\vec{v}$.

Esto implica que $\vec{F} = m\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}}_{\vec{a}} + \vec{v}\frac{dm}{dt}$ como $m=\frac{E}{c^2} \Rightarrow \frac{dm}{dt} = \frac{\frac{dE}{dt}}{c^2} = \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}(K+m_0c^2) = \frac{1}{c^2}\frac{dK}{dt}$

$$\vec{F} = \overset{m_0\gamma(v)}{m}\vec{a} + \frac{\vec{v}}{c^2}\frac{dK}{dt} \qquad K \equiv \int \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \int \vec{F}\cdot\vec{v}\,dt \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} - \frac{\vec{v}}{mc^2}(\vec{F}\cdot\vec{v})}$$

$\Rightarrow$ En gral. va a suceder que $\vec{F} \not\parallel \vec{a}$

Hay 2 casos simples en que $\vec{F} // \vec{a}$

1) si $\vec{F} // \vec{v} \Rightarrow$ la part. se mueve en línea recta

y es $\vec{a}_{//} \equiv \vec{a}\big|_{\vec{F}//\vec{v}} \Rightarrow a_{//} = \frac{F_{//}}{m}\underbrace{(1-\beta^2)}_{\frac{1}{\gamma^2}} = \frac{F_{//}}{m_0\gamma^3} \Rightarrow F_{//} = \underbrace{m_0\gamma^3}_{\text{masa longitudinal}} a_{//}$

2) si $\vec{F} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{F}\cdot\vec{v} = 0 \Rightarrow$ la part. se mueve instantaneamente sobre un arc. de circ.

$\vec{a}_{\perp} \equiv \vec{a}\big|_{\vec{F}\perp\vec{v}} \Rightarrow \vec{F}_{\perp} = \underbrace{m_0\gamma}_{\text{masa transversal.}} \vec{a}_{\perp}$

Ejemplo de fuerzas del tipo 1: Electrones acelerados por una diferencia de potencial de V_0

$$\Rightarrow K = \int \vec{F}\cdot d\vec{l} = -\overset{1{,}6\times10^{-19}\,C}{e}\underbrace{\int \vec{E}\cdot d\vec{l}}_{-\Delta V = -V_0} = eV_0 = m_0c^2(\gamma(v)-1)$$

$$\Rightarrow \underset{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}{\gamma(v)} = 1 + \frac{eV_0}{m_0c^2} \rightarrow v^2 = c^2\left(1 - \frac{1}{\left(1+\frac{eV_0}{m_0c^2}\right)^2}\right) \rightarrow v = c\sqrt{1 - \frac{1}{\left(1+\frac{eV_0}{m_0c^2}\right)^2}} \sim c\sqrt{1-\left[1-\frac{2eV_0}{m_0c^2}\right]} \Rightarrow v \sim \sqrt{\frac{2eV_0}{m_0}}$$

$$\left(\frac{m_0v^2}{2} = eV_0\right)$$

$\Uparrow$ lim clásico

$$\frac{eV_0}{m_0c^2} = x \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{(1+x)^2} \sim 1 - 2x + o(x^2)$$

Taylor

otro enfoque

$$F_{\parallel} = m_0\gamma^3 a_{\parallel} = -eE \Rightarrow \frac{dv}{dt} = a_{\parallel} = -\frac{eE}{m_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} \Rightarrow \frac{dv}{dt}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = -\frac{eE}{m_0} \Rightarrow \frac{dv}{dx}\overbrace{\frac{dx}{dt}}^{v}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}} = -\frac{eE}{m_0}$$

$$\Rightarrow \int_0^l \frac{v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}\frac{dv}{dx}dx = \int_0^l -\frac{eE\,dx}{m_0} = -\frac{e}{m_0}\underbrace{\int_0^l E\,dx}_{-V_0} = \frac{V_0e}{m_0} = c^2[\gamma(v) - \overset{\gamma(0)}{1}]$$

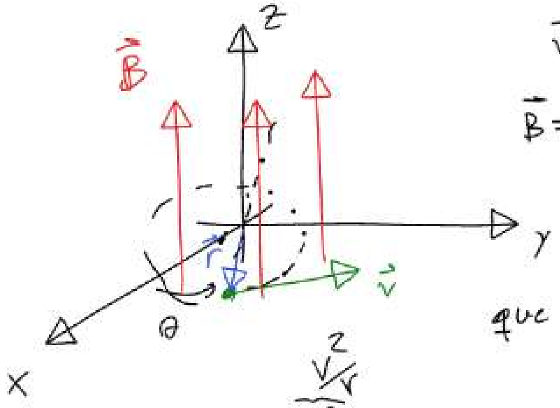
$$\frac{d}{dv}\left[\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\right] = \frac{1}{c^2}\frac{v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}}$$

Ejemplo de fuerzas del tipo 2 otro ejemplo del electromagnetismo.

Una carga q moviendose en un campo magnético de forma que $\vec{v} \perp \vec{B}$

$\Rightarrow \vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B} \perp \vec{v} \Rightarrow qvB = m_0 \gamma a_\perp$

$\vec{r} - \vec{r}_0 \equiv \vec{r}_{rel}$
O rot



$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta$

$\vec{B} = B\hat{k}$

$\vec{F} = qB(-\dot{r}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\hat{e}_r)$

$\vec{a}_\perp = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta$

La partícula realiza un movimiento circular en torno a algun punto del plano xy que puedo tomar como el origen del sist. de coord.

$qvB = -\overbrace{r\dot{\theta}^2}^{v^2/r} m_0 \gamma(v) \Rightarrow qB = -\frac{v}{r} \overset{m_0\gamma(v)}{m} \Rightarrow$ radio de la circ. es $\boxed{R = \frac{v \overset{m_0\gamma}{m}}{|q|B}}$

clásicam. $\frac{m_0 v^2}{2}$

misma exp clásica pero con masa relativista

Para un $\bar{e}$ con $\underbrace{10\text{ MeV}}$ de energía cinética

y $B = 2\ \frac{\text{weber}}{m^2}$ $\quad R_{clás} = 0{,}0053\,m \quad R_{rel} = 0{,}018\,m$

Cuadrivectores

La invarianza de Lorentz (recuerden la cantidad $\Delta s^2 = \Delta \vec{r}^2 - c^2 \Delta t^2$) se expresa mejor en términos de los cuadrivectores.

Un cuadrivector (4-vector) contravariante está definido como un conjunto de cantidades que, medidas desde 2 referenciales inerciales, se relacionan por una T de L.

El cuadrivector posición-tiempo es el prototipo para los otros 4-vectores

$\tilde{x}^0 \equiv ct$

$\tilde{x}^1 \equiv x$

$\tilde{x}^2 \equiv y$

$\tilde{x}^3 \equiv z$

es el 4-vector posición-tiempo en S

$$\left.\begin{aligned} \tilde{x} &\equiv (ct, x, y, z) \\ \tilde{x}' &= (ct', x', y', z') \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tilde{x}'^{\mu} = \sum_{\nu=0}^{3} \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, \tilde{x}^{\nu}$$

4-vector posición-tiempo en S'

con $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ los elementos $\mu\nu$ de la matriz Λ que rep. la transf. de Lorentz comentario: es usual utilizar la convención de Einstein para suma de índices

<u>índices repetidos están sumados</u> $\quad x'^{\mu} = \underline{\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}} \equiv \sum_{\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu}$

$$\tilde{x}'^{\mu} = \begin{cases} \gamma x - \gamma\beta ct = \gamma \tilde{x}^{1} - \gamma\beta \tilde{x}^{0} = x' & \mu = 1 \\ \gamma ct - \gamma\beta x = \gamma \tilde{x}^{0} - \gamma\beta \tilde{x}^{1} = ct' & \mu = 0 \\ y = y' & \mu = 2 \\ z = z' & \mu = 3 \end{cases} \qquad \overbrace{\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{\Lambda} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

comentario 2: se suelen usar letras griegas para índices que varían de 0 a 3 y letras latinas para los índices que varían de 1 a 3

$\Rightarrow$ La magnitud de un vector $\vec{r}$ espacial está dada po $\vec{r}\cdot\vec{r}$ (el cuadrado) y es invariante ante T. de G. (incluyendo rotaciones). La invarianza de Lorentz de los intervalos / separaciones espaciotemporale ΔS se puede expresar como un producto interno de 4-vectores.

Definimos los cuadrivectores <u>covariantes</u> $\tilde{x}_\mu$

subíndice abajo

$$\tilde{x}_0 \equiv ct$$
$$\tilde{x}_1 \equiv -x$$
$$\tilde{x}_2 \equiv -y$$
$$\tilde{x}_3 \equiv -z$$

Como $\tilde{x}_\mu = g_{\mu\nu}\,\tilde{x}^\nu$

donde $g_{\mu\nu}$ es el elemento $\mu\nu$ de la matriz

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

defino el producto interno de cuadrivectores $\tilde{a}$ y $\tilde{b}$ como

$$\tilde{a}\cdot\tilde{b} \equiv \tilde{a}^{\mu}\tilde{b}_{\mu} = \tilde{a}^{0}\tilde{b}_{0}+\tilde{a}^{1}\tilde{b}_{1}+\tilde{a}^{2}\tilde{b}_{2}+\tilde{a}^{3}\tilde{b}_{3} = \tilde{a}^{0}\tilde{b}^{0}-\tilde{a}^{1}\tilde{b}^{1}-\tilde{a}^{2}\tilde{b}^{2}-\tilde{a}^{3}\tilde{b}^{3}$$
$$= \tilde{a}_{\mu}\tilde{b}^{\mu}$$

que es invariante de Lorentz! $\tilde{a}\cdot\tilde{b} = \tilde{a}'\cdot\tilde{b}'$

1er índice abajo es el elemento $\mu\nu$ de la matriz

El 4-vector covariante transforma como $\tilde{x}'_{\mu} = \tilde{\Lambda}_{\mu}{}^{\nu}\tilde{x}_{\nu}$

$$\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{a}'\cdot\tilde{b}' = (\tilde{a}'^{\mu})(\tilde{b}'_{\mu}) = (\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\tilde{a}^{\nu})(\Lambda_{\mu}{}^{\alpha}\tilde{b}_{\alpha}) = \underbrace{(\overset{\Lambda}{\Lambda^{\mu}{}_{\nu}}\,\overset{\Lambda^{-1}}{\Lambda_{\mu}{}^{\alpha}})}_{I_{\nu\alpha}}\tilde{a}^{\nu}\tilde{b}_{\alpha} = \tilde{a}^{\nu}\tilde{b}_{\nu}$$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ -x' \\ -y' \\ -z' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda^{-1}\,!!}\begin{pmatrix} ct \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{a}\cdot\tilde{b} = \tilde{a}'\cdot\tilde{b}'}$$

$\tilde{p} \equiv \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}$ es un cuadrivector!!

(clase que viene)

Los tensores de mayor orden se definen análogamente a sus versiones clásicas

$\tilde{t}$ es un tensor de rango n si transforma como:

$$t'^{\alpha_1\ldots\alpha_n} = \Lambda^{\alpha_1}{}_{\beta_1}\cdots\Lambda^{\alpha_n}{}_{\beta_n}\, t^{\beta_1\ldots\beta_n}$$

Equivalencia masa - energía y creación de partículas

Un ejemplo de Física de partículas

El Bevatrón construido en Berkeley se ideó con el fin de producir antiprotones mediante la reacción

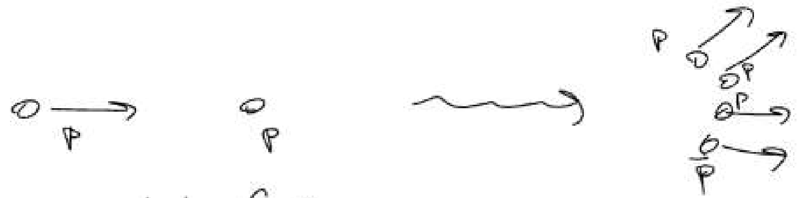
$$\boxed{p + p \longrightarrow p + p + p + \bar{p}}$$

colisiono 2 protones

surgen 2 protones y una pareja de protón-antiprotón

Protón a gran energía colisiono con uno en reposo y crea una pareja de proton-antiproton. ¿Cual es la umbral para esta reacción? ¿Que velocidad debe tener el protón?

En el ref del Lab



En el ref del C.M

$\Rightarrow$ como la masa es energía y viceversa, la energía que deben tener las partículas en el R.C.M. es, al menos, la energía de 4 protones en reposo $\underline{4m_0c^2}$ $\Rightarrow$ $E'_{umbral} = 4m_0c^2$ S' es el R.C.M.

$$\tilde{P}'_{\substack{final\\umbral}} = \Big(\underbrace{\frac{4m_0c^2}{c}}_{E/c}, 0, 0, 0\Big)$$

$$\tilde{P}_{\substack{inicial\\umbral}} = \underbrace{\tilde{P}_{\substack{proton\\proy}}}_{\left(\frac{E}{c}, |p|, 0, 0\right)} + \underbrace{\tilde{P}_{\substack{prot.\\obj}}}_{(m_0c, 0, 0, 0)} = \left(\frac{E}{c} + \frac{m_0c^2}{c}, |\vec{p}|, 0, 0\right)$$

Como el momento se conserva $\tilde{p}_{inicial} = \tilde{p}_{final}$

$$\tilde{p}_{inicial}^{\,2} \equiv \tilde{p}_{inicial} \cdot \tilde{p}_{inicial} = \frac{(E+m_0c^2)^2}{c^2} - \vec{p}^{\,2} = \tilde{p}'^{\,2}_{final} = 16 m_0^2 c^2$$

$$c^2\vec{p}^{\,2} = E^2 - m_0^2c^4$$

$$\boxed{E_{umbral} = 7\, m_0 c^2}$$

$$\Rightarrow 7 = \gamma(v)$$

$$\tilde{p}^{\mu}_{inicial}\,\tilde{p}_{inicial_\mu} = \tilde{p}^{\mu}_{final}\,\tilde{p}_{final_\mu} = \tilde{p}'^{\mu}_{final}\,\tilde{p}'_{final_\mu}$$

$$\left(\frac{E+m_0c^2}{c}, |\vec{p}|, 0, 0\right) \quad \left(\frac{E+m_0c^2}{c}, -|\vec{p}|, 0, 0\right)$$

v !!

$\simeq$

$0{,}9897c$