CLASE 28

Transformación del momento y la energía

Probemos que $\tilde{p} \equiv \left(\frac{E}{c}, p_x, p_y, p_z\right)$ es un cuadrivector.

Es decir, transforman de acuerdo a las transformaciones de Lorentz

$$\frac{E}{c} = \gamma\left(\frac{E'}{c} + \beta p_x'\right)$$
$$p_x = \gamma\left(p_x' + \beta \frac{E'}{c}\right)$$
$$p_y = p_y'$$
$$p_z = p_z'$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{E'}{c} = \gamma\left(\frac{E}{c} - \beta p_x\right) \\ p_x' = \gamma\left(p_x - \beta \frac{E}{c}\right) \\ p_y' = p_y \\ p_z' = p_z \end{array}\right]$$

para una partícula que se mueve con velocidad $\vec{u}$ en S y $\vec{u}'$ en S' es

$$u_x = \frac{u_x' + v}{1 + \frac{v u_x'}{c^2}} \;; \quad u_y = \frac{u_y'}{\gamma\left(1 + \frac{v u_x'}{c^2}\right)} \;; \quad u_z = \frac{u_z'}{\gamma\left(1 + \frac{v u_x'}{c^2}\right)} .$$

Probemos:

$$c^2 - u^2 = \frac{c^2\,(c^2 - v^2)(c^2 - u'^2)}{(c^2 + v u'_x)^2} \xrightarrow{\text{implica}} \boxed{\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \frac{1 + \frac{v u'_x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}}} \quad (*)$$

$$c^2 - u^2 = c^2 - [u_x^2 + u_y^2 + u_z^2] = c^2 - \frac{1}{\left(1 + \frac{v u'_x}{c^2}\right)^2}\left[u'^2_x + 2u'_x v + v^2 + \frac{u'^2_y}{\gamma^2} + \frac{u'^2_z}{\gamma^2}\right]$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \frac{v u'_x}{c^2}\right)^2}\left[c^2 + \cancel{2 v u'_x} + \frac{v^2 u'^2_x}{c^2} - \left\{u'^2_x + \cancel{2u'_x v} + v^2 + \frac{u'^2_y}{\gamma^2} + \frac{u'^2_z}{\gamma^2}\right\}\right]$$

$$= \frac{c^4}{(c^2 + v u'_x)^2}\left[c^2 - v^2 - \frac{\overbrace{u'^2_x + u'^2_y + u'^2_z}^{u'^2}}{\gamma^2}\right] = \frac{c^4\left[c^2 - v^2 - u'^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\right]}{(c^2 + v u'_x)^2}$$

$$= \frac{c^4\,(c^2 - v^2)\left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)}{(c^2 + v u'_x)^2} = \frac{c^2\,(c^2 - v^2)(c^2 - u'^2)}{(c^2 + v u'_x)^2} \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \quad p_x = \frac{m_0\, u_x}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad p_y = \frac{m_0\, u_y}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad p_z = \frac{m_0\, u_z}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \qquad \frac{E}{c} = \frac{m_0\, c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$$

$$p_x = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdot \left(\frac{u_x' + v}{1 + \frac{u_x' v}{c^2}} \right) \underset{(*)}{=} \underbrace{m_0 u_x' \cdot \overbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}^{\gamma} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}}_{p_x'} + \underbrace{m_0\, c\, \frac{v}{c} \cdot \overbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}^{\gamma} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}}_{\beta \frac{E'}{c}} = \boxed{\gamma \left(p_x' + \beta \frac{E'}{c} \right)}$$

$$\boxed{p_y = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \cdot \left(\frac{u_y' \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{u_x' v}{c^2}} \right) \underset{(*)}{=} \frac{m_0\, u_y'}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} = p_y'}$$

análogamente $\boxed{p_z = p_z'}$

$$\frac{E}{c} = \frac{m_0 c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \underset{(*)}{=} m_0 c \frac{1 + \frac{v u_x'}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}} = \underbrace{\frac{m_0 c}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}}_{\frac{E'}{c}} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{\gamma} + \underbrace{\frac{m_0 u_x'}{\sqrt{1-\frac{u'^2}{c^2}}}}_{p_x'} \cdot \underbrace{\frac{v}{c}}_{\beta} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}}_{\gamma}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{E}{c} = \gamma \left(\frac{E'}{c} + \beta p_x' \right)}$$

FIN

Resumen

1) Formulamos la mecánica clásica de 1 partícula (desarrollamos herramientas + casos diversos) para cualquier observador

2) Generalizamos a sist. de partículas, con foco en rígidos (desarrollamos herramientas + casos diversos)

3) Presentamos problemas e inconsistencias de la mecánica Newtoniana y comenzamos a desarrollar la mecánica relativista de 1 partícula (desarrollamos herramientas) para observadores inerciales