

CAPÍTULO 0

INTRODUCCIÓN Y CONCEPTOS PRELIMINARES

0.0 - Introducción al Curso.

Las presentes *notas* de Mecánica corresponden al curso 1999 de Mecánica Newtoniana del Ciclo Único de Facultad de Ingeniería de la Universidad de la República y tienen el objeto de suplir la carencia de textos de la materia adecuados al mismo. Constan básicamente de dos partes, además de este capítulo introductorio agregado para el curso 1999. La primera parte corresponde a los Capítulos 1 a 4 y trata sobre Mecánica de la Partícula. Estos capítulos están basados en los apuntes correspondientes al curso de Mecánica I del Ciclo Básico de Ingeniería (Plan 1989), el cual era el primer curso de Física que los estudiantes de Ingeniería veían en su carrera. El curso actual de Mecánica Newtoniana es un segundo curso sobre el tema con que los estudiantes se encuentran en el presente Plan de Estudios, por eso la parte introductoria de cada uno de ellos debe considerarse más como un repaso de temas ya estudiados en Física General 1, que como temas nuevos. Sin embargo, todos ellos profundizan y extienden los conceptos, llevándolos a un ámbito más formal y general que el visto anteriormente. Estos temas de repaso son mantenidos en estos capítulos porque son parte del orden lógico en que deben desarrollarse.

La segunda parte, correspondiente a Mecánica de Sistemas de Partículas, y principalmente Mecánica de Sistemas Rígidos, son apuntes que fueron creados expresamente para el curso 1998, año en que se dictó por primera vez esta asignatura. Los mismos ya fueron creados para el contexto en que los temas serían dictados, pero como tales están en una etapa más *verde*, en el sentido de que no han sido revisados lo suficiente como lo fueron aquellos de la primera parte. Esto puede llevar a pensar que son más *breves* en extensión, pero esto es causado por el hecho de que aún no han *crecido y alcanzado su madurez*. Por eso llamamos la atención a los estudiantes para que no menosprecien esta parte del curso, que es en realidad la más importante.

Finalmente queremos resaltar que entendemos que estas *notas* deben considerarse como tales; es decir, son *notas* y/o *apuntes* pero no son un libro de texto, ya que a pesar de la constante revisión a la que las mismas son sometidas, siempre existen errores u omisiones diversas, siendo las mismas, por fortuna, principalmente problemas tipográficos o de edición. Por este motivo pedimos a todos aquellos estudiantes que las utilicen, que las lean con espíritu crítico, no solamente para poder estar atentos a estos errores, sino porque es el cuestionamiento constante de las nuevas ideas lo que permite razonar y entender las mismas, para poder seguir de esta manera el proceso lógico de aprendizaje de una materia. Pedimos también que aquellos suficientemente emprendedores que encuentren este tipo de errores nos los hagan llegar, así también como comentarios en general, para poder ir mejorando y adecuándolas al curso en las sucesivas ediciones de las mismas.

0.1 - Introducción a la Introducción.

Este Capítulo 0 fue agregado con el objeto de hacer un repaso de las herramientas matemáticas y otros conceptos que serán usados en el curso correspondiente. El estudio de la Mecánica para Ingenieros tiene una doble importancia. Por un lado está el aspecto técnico, de que con el aprendizaje de unos pocos principios y la aplicación de los mismos se podrán resolver problemas prácticos. Los problemas serán tanto de equilibrio de sistemas (*Estática*) en el diseño de estructuras fijas, por ejemplo puentes y edificios, como también en el de sistemas en movimiento (*Dinámica*) que es de gran utilidad en el análisis de estructuras en movimiento, por ejemplo, estructuras fijas sometidas a cargas bruscas, o el diseño de todo tipo de maquinarias tales como motores, buques, automóviles o aviones, y hasta el movimiento de los electrones en un tubo de rayos catódicos.

Pero además del aspecto técnico anterior la Mecánica es una materia que permite el aprendizaje del análisis de problemas reales utilizando la artillería pesada de la Matemática. Este lenguaje, necesario para el estudio y resolución de los problemas de esta materia, pero que también se aplica a muchas ramas de la Ciencia, tuvo que esperar que Isaac Newton (1642-1727) desarrollase el cálculo diferencial para poder extender las ideas previamente establecidas por Galileo Galilei (1564-1642) sobre la Dinámica postulándolas en forma de tres principios básicos denominados las *leyes de Newton*; y que con el uso de instrumentos de precisión, como el reloj de péndulo inventado por Christiaan Huygens (1629-1695), se pudiesen hacer comparaciones cuantitativas entre diferentes experimentos con los principios teóricos por ellos desarrollados. Más tarde Leonhard Euler (1707-1783) desarrollaría mucho más las mismas para que fuesen una poderosa herramienta en las revoluciones tecnológicas e industriales de los siglos XVIII y XIX.

Para poder utilizar estas herramientas matemáticas en el estudio de los problemas reales es necesario idealizar los mismos, esto es debemos crear modelos que representen en forma esquemática el problema a estudiar. Como ejemplo consideremos el estudio de un automóvil

moviéndose en una carretera con un motor de determinada potencia; queremos saber cuánto tiempo demorará en recorrer cierta distancia en determinadas condiciones. Puede ser suficiente (e importante en la simplificación del problema) considerar el mismo simplemente como una partícula puntual moviéndose sobre una recta. Esto significa despreciar la forma y dimensiones de dicho cuerpo. Luego, para el estudio de este problema, alcanzaría la aplicación de lo que el estudiante aprenderá en la primer parte de este curso. Sin embargo, puede quererse estudiar el problema más a fondo. Para ello tal vez querríamos modelar el auto como un cuerpo de dimensiones a determinar apoyado sobre sus ruedas, las que se modelarían como figuras circulares rígidas. Porque una figura o cuerpo (como le llamaremos posteriormente) sea rígido entendemos que todos los movimientos relativos de las diferentes partes del mismo entre sí son pequeños (o sea, *despreciables*) frente al movimiento del cuerpo en su conjunto. Para el estudio de este nuevo modelo de auto, debemos recurrir a lo que el estudiante aprenderá en la segunda parte de este curso.

Cuál de los dos modelos nos sirve para resolver el problema dependerá de la profundidad del estudio en particular que deseemos realizar. Es decir, la respuesta al problema dependerá del planteo del mismo; o sea, de la elección de un modelo u otro. Y obviamente la resolución en general será más complicada para el modelo más complicado, e incompleta en algunos casos para el modelo más sencillo. Muchas veces la parte más difícil de la resolución de un problema en particular es el planteo del mismo. En este curso esa parte ya vendrá por lo general previamente resuelta, y lo que se pretende que el estudiante realice es la utilización de las herramientas matemáticas para la resolución de la situación física descrita mediante una idealización que se le presentará en el enunciado del problema.

Hacemos notar que en este, nuestro segundo modelo de auto, se ha idealizado las ruedas del mismo como rígidas, mientras que si es un auto decente con ruedas neumáticas, las mismas se deformarán con el peso del auto sobre ellas. O sea, estamos *aproximando la realidad física* con un modelo matemático, porque consideramos no es de importancia la deformación de las mismas. Como veremos, en este curso, siempre despreciaremos este tipo de movimientos *internos* o deformaciones de los cuerpos.

Además de eso, dado que el modelo matemático en algunos casos puede no presentar una solución analítica simple, es necesario hacer algunas *aproximaciones matemáticas*; es decir, que los datos del problema verifiquen algunas relaciones que nos permitan simplificar el problema matemático. En ese caso estaremos resolviendo la situación sólo para un rango determinado de validez adicional, más allá de la simplificación a que nos lleva el modelo.

Queda claro así que nosotros estudiaremos problemas ideales que serán aplicables a la realidad solamente bajo ciertas condiciones. Estas condiciones son el límite de aplicabilidad de nuestros modelos o teorías. Aclaremos que la Mecánica Newtoniana que estudiaremos, y que también se le llama Mecánica Clásica, no es aplicable a la resolución de todos los problemas posibles. Es decir, los principios simples en los que se basa cubren una amplia región de validez y de lo que podríamos llamar nuestro sentido *común* de la realidad. Pero no es posible de resolver con los mismos, problemas que en la época en que estos principios fueron desarrollados aún

estaban lejos de ser planteados, como muestran las fechas en que vivieron sus mayores impulsores, dadas anteriormente. Efectivamente, la Mecánica Clásica no *es* completa ni *debe* ser considerada la verdad absoluta de todo el universo (como ninguna teoría actual debe serlo). Toda teoría basada en un conjunto de postulados vale solo en aquellas condiciones en que los mismos son aplicables, y la Mecánica Clásica como tal deja de ser válida cuando se cumplen una de las siguientes tres condiciones:

- 1) los objetos en movimientos que se están estudiando se mueven muy “*rápido*”,
- 2) los objetos en movimiento que se están estudiando son muy “*pequeños*”,
- 3) los objetos en movimiento que se están estudiando están cerca de objetos muy “*masivos*”.

Efectivamente, en el caso de que los objetos en estudio se muevan a velocidad cercana a la velocidad de la luz, los postulados de la Mecánica Clásica precisan de postulados adicionales que dan lugar a la Mecánica *Relativista*. La velocidad de la luz es de $3 \times 10^8 \text{ m/s} = 1,1 \times 10^9 \text{ km/hr}$, que como veremos está muy por encima de todas las velocidades que estudiaremos a lo largo de este curso, y muy por encima de las velocidades que involucrarán los trabajos técnicos de casi todos los Ingenieros que egresan de esta Facultad.

Por otro lado, cuando se estudia el movimiento de partículas *reales* muy pequeñas, como el movimiento de los electrones en torno del núcleo del átomo, o el movimiento de los portadores de carga en un transistor de última generación, se precisa la utilización de postulados completamente diferentes a los de la Mecánica Clásica, que dan lugar a la denominada Mecánica *Cuántica*. El problema surge aquí porque la Mecánica Newtoniana idealiza para su tratamiento matemático la existencia de partículas infinitamente pequeñas (puntos) con masas no nulas. Esto es una idealización muy razonable para el mundo *macroscópico* en el que vivimos. Pero en un mundo *nanoscópico* en que las distancias involucradas sean del orden del nanómetro ($1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$) o menores, entonces esto puede ya no ser cierto.¹

¹ - Tratando de no dejar esta idea demasiado vaga, expliquemos que la Mecánica Cuántica plantea que toda partícula tiene un comportamiento dual: como partícula o como onda. En nuestro mundo macroscópico todos los objetos pueden considerarse como macroscópicos. Sin embargo, por ejemplo en el caso de los electrones, puede manifestarse un comportamiento u otro indiferentemente. Cuando el comportamiento como partícula es el que prevalece, entonces valen los postulados de la Mecánica Clásica, pero cuando prevalece el comportamiento como onda debe recurrirse a la Mecánica Cuántica.

En forma anecdótica, digamos en la época en que se desarrolló la Mecánica Clásica, también se discutía cuál era la naturaleza de la luz. Isaac Newton afirmaba la existencia de corpúsculos o partículas de luz, en cuanto que Christiaan Huygens mantenía que la luz era una onda. La Mecánica Cuántica, creada y desarrollada en la primera mitad del siglo XX (más de 200 años después de esas discusiones) vino a demostrar que ambas proposiciones eran correctas.

Finalmente, y sin entrar tampoco en los detalles, los objetos muy masivos, generan *campos gravitatorios* intensos y modifican drásticamente la descripción espacio temporal de la mecánica newtoniana. Pero, dado que aún no hemos ni descrito estos elementos para nuestro caso, pasaremos a continuación a definir los Conceptos Preliminares que utilizaremos a lo largo de todo el curso.

0.2 – Conceptos Fundamentales.

A continuación pasaremos a dar algunas definiciones y conceptos que son fundamentales y deben comprenderse desde un principio. Muchas de ellas son casi intuitivas y todas ellas serán descritas por elementos matemáticos.

Para empezar todos nuestros elementos se ubicarán en el *espacio* (\mathbf{R}^3) que físicamente es una región que se extiende infinitamente en todas direcciones, y que matemáticamente lo describiremos por un espacio *afín* de tres dimensiones. Un punto de este espacio estará determinado por sus coordenadas medidas respecto a algún *sistema de referencia*. En el primer capítulo entraremos en detalle sobre que sistemas de coordenadas mediremos, y más adelante nos quedará claro que existen muchos tipos de sistemas de referencia; pero asumiremos que existe uno preferencial al que llamaremos *sistema de referencia inercial primario* o *sistema de Copérnico*, y diremos que este está “fijo” en el espacio y los demás pueden moverse respecto de él. Aquellos que se muevan con velocidad constante serán también *inerciales*, y en ellos valdrán las leyes de Newton, mientras que en los que son acelerados (velocidad variable) respecto del mismo son *no-inerciales* y en ellos habrá que hacer ciertas modificaciones en las ecuaciones fundamentales a las que lleguemos.

El espacio con el que trabajaremos es un espacio *euclídeo*; es decir tenemos una métrica euclideana para definir conceptos tales como la distancia entre dos puntos, el área de una superficie o el volumen de una región de dicho espacio. Todas estas magnitudes están relacionadas. Definiéndose una magnitud o unidad fundamental de *longitud*, por ejemplo: *metros*, todas las distancias se medirán entonces en metros (m); las áreas en metros cuadrados (m^2) y los volúmenes en metros cúbicos (m^3).

Pretendemos estudiar el movimiento de los objetos, y como vemos, hasta los sistemas de referencia, o de coordenadas en que describimos nuestro espacio se estarán moviendo, precisamos describir este movimiento de alguna forma. Para ello introducimos el *tiempo* como una variable matemática que nos da una medida de la sucesión de los acontecimientos. En Mecánica Newtoniana esto es una cantidad absoluta. El pasaje del tiempo es inexorable e independiente de cualquier otro parámetro o acontecimiento, por lo que matemáticamente será siempre *una variable*

independiente.² El tiempo entonces se interpreta como una magnitud independiente de la longitud y por tanto se mide en unidades *independientes* (por ejemplo: *segundos*).

Nuestro interés es no sólo describir el movimiento de esos sistemas de referencia, sino también el de objetos del mundo real. Como hemos dicho, nosotros trabajaremos con objetos ideales que pretenden describir o modelar objetos que existen en el espacio real. La *materia* es la sustancia que ocupa el espacio y de la que los cuerpos reales están hechos. El movimiento de esa materia, está gobernado por la *inercia* de la misma. La *inercia* es la propiedad de la materia que origina una oposición a la variación de su movimiento. Este es un concepto *nuevo* que aparece en la Mecánica Newtoniana a diferencia de lo que se creía anteriormente. La *masa* es tan solo una medida cuantitativa de la inercia. Y dado que este concepto es también nuevo, entonces se introduce también como una magnitud fundamental y se mide en una unidad independiente de las de longitud y tiempo (por ejemplo: *kilogramo*).

Cualquier superficie cerrada llena de materia es lo que llamaremos un *cuerpo*. Y en la primer parte del curso utilizaremos el concepto de *partícula* o *punto material* que es un cuerpo de dimensiones despreciables, o sea, un punto con masa. En ciertos casos se puede tratar como punto material un cuerpo de dimensiones finitas, por ejemplo: el auto del primer modelo mencionado anteriormente. En otros casos el punto material puede ser un elemento diferencial, o sea, cualquier cuerpo puede suponerse formado por infinitos puntos materiales; por eso, al estudiar sistemas de partículas en la segunda parte del curso, estaremos planteando las bases para el estudio de cualquier cuerpo. En particular nos concentraremos en *cuerpos rígidos*, que como dicho es aquel que no sufre deformación relativa entre sus partes.

La idea básica de la Mecánica Newtoniana es que los cuerpos se mueven porque están sometidos (o no) alguna *fuerza*. La *fuerza* es la acción de un cuerpo sobre otro. A pesar de ellos los cuerpos no tienen que estar en contacto y aceptamos el concepto de interacción a distancia. Las fuerzas tienden a hacer que un cuerpo se mueva de acuerdo a la acción de las mismas. Es el estudio de esta influencia y cómo el movimiento de un determinado cuerpo cambia ante la acción de una fuerza el objeto principal de este curso. Al desarrollar este estudio veremos que no precisamos introducir nuevas magnitudes fundamentales ni nuevas unidades independientes para medir la fuerza, pero aclaremos que es en sí una magnitud diferente de las antes descritas.

² - En Relatividad, o sea, cuando estudiamos objetos moviéndose a velocidades cercanas a la de la luz, este concepto debe ser modificado y el tiempo es una coordenada más, dependiente del sistema de referencia en que se trabaja.

0.3 – Elementos Matemáticos.

A continuación damos un breve repaso de los elementos algebraicos más importantes con los que trabajaremos y sus propiedades fundamentales.

0.3.a - Escalares.

Una cantidad *escalar* es aquella a la cual se asocia solamente una variable; o sea, para su completa descripción alcanza el enunciado algebraico de su magnitud. La distinción importante que debemos hacer es que el valor que un escalar tome *no depende* del sistema de coordenadas en que se lo mida. Por ejemplo: el tiempo, el radio de un círculo, la distancia entre dos puntos, un área, un volumen, la masa, la densidad, la energía o la potencia. Muchas de estas cantidades pueden tener solo valores positivos, mientras que otros (tiempo, energía y potencia) pueden ser negativos también. Como vemos, todos estos ejemplos toman valores dentro del conjunto de los números reales (y en general todas las cantidades que utilizaremos en este curso son números reales). Cualquier operación entre escalares será también un escalar.

En algunos casos, como la energía, cierta precaución debe ser tomada en cuenta. La misma, como la definiremos posteriormente es el producto de varios escalares. Como tal es una cantidad escalar. Pero la definición en sí dependerá del sistema de referencia en consideración, por lo que la energía dependerá del mismo, porque la propia definición depende de los sistemas.

0.3.b - Vectores.

Una *cantidad vectorial* o *vector* es aquella a que se le asocia no sólo una magnitud, sino también una dirección y un sentido. Ejemplos de vectores son un desplazamiento, la velocidad, la aceleración, la fuerza, la cantidad de movimiento o el momento angular.

Los estudiantes deben estar completamente familiarizados con los vectores y su representación en coordenadas, pero repasemos aquí las ideas básicas. Nosotros distinguiremos dos tipos de vectores: los *vectores libres*, que es a los que nos referimos en este momento, y los *vectores aplicados*, sobre los que nos extenderemos en este capítulo posteriormente.

0.3.b.i) Operaciones con Vectores.

Las operaciones definidas para el espacio de los vectores son las siguientes:

- El producto de un vector por un escalar: si \vec{a} es un vector y b un escalar, entonces el producto de ambos será un vector $\vec{c} = b\vec{a}$.
- La suma de dos vectores: si \vec{a} y \vec{b} son vectores, la suma de ambos es un vector $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$.

Tenemos definidos dos productos de vectores diferentes:

- El producto *escalar* de dos vectores: $c = \vec{a} \cdot \vec{b}$ donde \vec{a} y \vec{b} son vectores y c un escalar.

El producto escalar de un vector por si mismo es lo que se llama el cuadrado del vector, que obviamente es un escalar, y es igual al cuadrado de su *módulo* o *norma*. O sea:

$$\left| \vec{a} \right|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \quad (0.1)$$

El último término en la ecuación anterior es una notación que utilizaremos.

Cuando un vector tiene cuadrado unitario, es decir, su norma vale 1, se dice que se trata de un *versor*, y si el producto escalar de dos vectores es nulo los vectores son *ortogonales*.

- El producto *vectorial* de dos vectores: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ ³ donde tanto \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} son todos vectores.

En algunos casos a aquellos vectores que provienen de una operación de un producto vectorial se los diferencia llamándoles *seudovectores*, porque tienen comportamientos diferentes frente a la simetría especular, pero esto no tendrá mayor importancia para nosotros, y sí conviene distinguir que muchos vectores a los que nosotros llamaremos *momentos* están originados en una operación de producto vectorial. Pero entraremos en detalle cuando hablemos de vectores aplicados.

³ - A veces también se usa la notación $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$.

0.3.b.ii) Base de Vectores Libres.

Para representar un vector libre debemos tener una determinada *base* de vectores libres. Por *base* de vectores libres entendemos un conjunto de *tres* vectores *linealmente independientes*, que por ser el espacio de los vectores en cuestión de *tres* dimensiones, alcanza para generar, a partir de las operaciones anteriores, *todos* los vectores de dicho espacio. Usualmente trabajaremos con bases *ortonormales*, en que los vectores de la base son versores ortogonales entre sí. O sea, en una base ortonormal formada por los vectores $\vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3$ (o genéricamente diremos $\left\{ \vec{\mathbf{e}}_i \right\}$ con $i = 1, 2, \text{ o } 3$) se cumple:

$$\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij} \quad (0.2)$$

donde δ_{ij} es la delta de *Kronecker* que cumple que:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (0.3)$$

Las bases ortonormales pueden ser directas o indirectas, según sea el comportamiento de sus vectores frente al producto vectorial. Una base es ortonormal *directa* cuando se verifica que:

$$\vec{\mathbf{e}}_i \times \vec{\mathbf{e}}_j = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \vec{\mathbf{e}}_k \quad (0.4)$$

donde:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } i, j, k \text{ es una permutación par de } 1,2,3 \\ -1 & \text{si } i, j, k \text{ es una permutación impar de } 1,2,3 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (0.5)$$

es decir que, además de la propiedad obvia de que el producto vectorial de cualquier versor de la base por sí mismo es nulo, tendremos que:

$$\vec{\mathbf{e}}_1 \times \vec{\mathbf{e}}_2 = \vec{\mathbf{e}}_3 \quad \vec{\mathbf{e}}_2 \times \vec{\mathbf{e}}_3 = \vec{\mathbf{e}}_1 \quad \vec{\mathbf{e}}_3 \times \vec{\mathbf{e}}_1 = \vec{\mathbf{e}}_2 \quad (0.6)$$

y de que, dados dos vectores cualesquiera $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$ se verifica (propiedad *anticonmutativa* del producto vectorial):

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = -\vec{\mathbf{b}} \times \vec{\mathbf{a}} \quad (0.7)$$

que:

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3 \quad \vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1 \quad \vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2 \quad (0.8)$$

El orden relativo que tienen que tener los vectores en el espacio es el indicado en la Figura 0.1, donde la perspectiva pretende ser tal que el versor \vec{e}_1 es *saliente* del plano de la hoja (que vendría dado por \vec{e}_2 y \vec{e}_3).

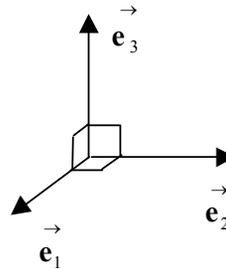


Figura 0.1

No debemos confundir una *base de vectores libres* con un *sistema de coordenadas* como los que serán descritos en el Capítulo 1, ni con los *sistemas de referencia* que utilizaremos para describir nuestra teoría. Un *sistema de coordenadas* es una base de vectores libres más un origen de coordenadas. Cualquier vector libre tendrá la misma representación en diferentes sistemas de coordenadas que tengan la misma base de vectores libres (o sea, los ejes de los sistemas de coordenadas sean paralelos).⁴

Finalmente un vector \vec{a} se representa en una determinada base de vectores libres a través de un conjunto *único* de tres números reales ordenados (es decir, un vector de \mathbf{R}^3) (a_1, a_2, a_3) que son sus proyecciones en cada uno de los tres versores de la base:

$$a_i = \vec{a} \cdot \vec{e}_i \quad (0.9)$$

y podemos escribir que:

$$\vec{a} = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{e}_i \quad (0.10)$$

Aclaremos que las coordenadas de un vector *no son cantidades escalares* porque dependen de los vectores de la base, como se ve a partir de la Ecuación 0.9.

⁴ - Tampoco debemos confundir los *sistemas de referencia* con los *sistemas de coordenadas*, ya que *diferentes* sistemas de coordenadas pueden utilizarse para describir *un mismo* sistema de referencia.

0.3.b.iii) Cambio de Base.

Supongamos que ahora deseamos cambiar de la base $\left\{ \vec{\mathbf{e}}_i \right\}$ a una nueva base ortonormal $\left\{ \vec{\mathbf{e}}'_i \right\}$. Los nuevos versores de la base continuarán verificando la condición de ortonormalidad pero estarán dirigidos en direcciones diferentes. Esto puede suceder cuando cambiamos de un determinado sistema de coordenadas a uno nuevo manteniendo el origen de coordenadas. Los nuevos ejes estarán girados respecto a los originales, lo que se representa dando nuevos versores para la dirección de cada uno de ellos.

Cualquier vector $\vec{\mathbf{a}}$ tiene una existencia independiente de la base en que queramos representarlo, por lo que, dado que los vectores que conforman la base han cambiado, según la Ecuación 0.9, sus coordenadas también cambiarán. Las nuevas coordenadas serán:

$$a'_i = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{e}}'_i \quad (0.11)$$

Para ver cuales son las relaciones entre esta y las antiguas precisamos definir mejor los versores de la nueva base, por lo que asumamos que λ_{ji} es la coordenada i -ésima del vector $\vec{\mathbf{e}}'_j$, o sea:

$$\lambda_{ji} = \vec{\mathbf{e}}'_j \cdot \vec{\mathbf{e}}_i \quad (0.12)$$

o sea:

$$\vec{\mathbf{e}}'_j = \sum_{i=1}^3 \lambda_{ji} \vec{\mathbf{e}}_i \quad (0.13)$$

Luego, teniendo en cuenta que los índices en las sumas son completamente arbitrarios:

$$a'_i = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{e}}'_i = \left(\sum_{j=1}^3 a_j \vec{\mathbf{e}}_j \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^3 \lambda_{ik} \vec{\mathbf{e}}_k \right) = \sum_{j,k=1}^3 \lambda_{ik} a_j \left(\vec{\mathbf{e}}_j \cdot \vec{\mathbf{e}}_k \right) = \sum_{j,k=1}^3 \lambda_{ik} a_j \delta_{jk}$$

por lo que, de la definición de la delta de Kronecker Ecuación 0.3 tendremos que:

$$\boxed{a'_i = \sum_{j=1}^3 \lambda_{ij} a_j} \quad (0.14)$$

Esta es la relación que vincula las coordenadas del vector $\vec{\mathbf{a}}$ en la nueva base respecto a las coordenadas en la base original.

Si observamos bien y definimos las siguientes matrices reales:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a'_1 \\ a'_2 \\ a'_3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{pmatrix}$$

la relación 0.14 de cambio de coordenadas se puede escribir mucho más simple como:

$$\boxed{\mathbf{A}' = \mathbf{L}\mathbf{A}} \quad (0.15)$$

Es decir, la matriz \mathbf{A}' 3 x 1 formada por el arreglo ordenado de las coordenadas del vector $\vec{\mathbf{a}}$ en la nueva base $\left\{ \vec{\mathbf{e}}'_i \right\}$, es igual a la matriz \mathbf{A} 3 x 1 similar de las coordenadas en la base original $\left\{ \vec{\mathbf{e}}_i \right\}$, multiplicada a la izquierda por una matriz \mathbf{L} cuadrada 3 x 3 formada por las coordenadas de los vectores de la nueva base en la base original. A esta matriz \mathbf{L} se le llama *matriz de cambio de base*.

La relación 0.15 es la que define el comportamiento de un vector; es decir, cualquier cantidad con la que trabajemos será un vector si sus componentes ordenadas como matrices columna verifican esa relación ante un cambio de base ortonormal; o, equivalentemente la relación equivalente 0.14.

0.3.b.iv) Propiedades de la Matriz de Cambio de Base.

Es importante observar que \mathbf{A} y \mathbf{A}' , que como matrices son *diferentes* (es decir, tienen componentes diferentes), son la representación del *mismo* vector $\vec{\mathbf{a}}$ en dos bases *diferentes*. Esto es importante porque hay que recordar que el cuadrado de este vector, su módulo al cuadrado, definido como el producto de él por sí mismo (Ecuación 0.1), es un escalar, por lo que debe ser independiente de la base en que se calcule. Calculemoslo en una y otra base:

$$\vec{\mathbf{a}}^2 = \vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} = \left(\sum_{i=1}^3 a_i \vec{\mathbf{e}}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 a_j \vec{\mathbf{e}}_j \right) = \sum_{i,j=1}^3 a_i a_j \left(\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_j \right) = \sum_{i,j=1}^3 a_i a_j \delta_{ij}$$

o sea que:

$$\vec{\mathbf{a}}^2 = \sum_{i=1}^3 a_i^2 \quad (0.16)$$

Similarmente:

$$\vec{\mathbf{a}}^2 = \sum_{i=1}^3 a_i'^2 \quad (0.17)$$

Haciendo uso de la relación 0.14:

$$\vec{\mathbf{a}}^2 = \sum_{i=1}^3 a_i'^2 = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{j=1}^3 \lambda_{ij} a_j \right) \left(\sum_{k=1}^3 \lambda_{ik} a_k \right) = \sum_{j,k=1}^3 \left(\sum_{i=1}^3 \lambda_{ij} \lambda_{ik} \right) a_j a_k = \sum_{i=1}^3 a_i^2$$

La última igualdad en esta relación proviene de la Ecuación 0.16 y del hecho de que, como dicho, el cuadrado de un vector es independiente de la base de coordenadas, por ser un escalar. Esta relación debe valer en forma general cualquiera sea el vector $\vec{\mathbf{a}}$ y por lo tanto cualquiera sean sus coordenadas. Por esta razón, para que se cumpla esa igualdad es necesario que los elementos de la matriz de cambio de base verifiquen la siguiente igualdad:

$$\sum_{i=1}^3 \lambda_{ij} \lambda_{ik} = \delta_{jk} \quad (0.18)$$

En esta relación el orden de los subíndices tiene importancia. Los elementos λ_{ij} serían los elementos de una matriz transpuesta a la de una que tenga los elementos λ_{ji} . O sea, si definimos una matriz \mathbf{M} cuyos elementos sean $\mu_{ji} = \lambda_{ij}$, entonces esta matriz no es más que la matriz transpuesta de la de cambio de base \mathbf{L} :

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}^T \quad (0.19)$$

Entonces la relación 0.18 nos diría que:

$$\sum_{i=1}^3 \mu_{ji} \lambda_{ik} = \delta_{jk} \quad (0.20)$$

lo que escrito en forma matricial es:

$$\mathbf{M}\mathbf{L} = \mathbf{I} \quad (0.21)$$

donde \mathbf{I} es la matriz identidad:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (0.22)$$

Esto implica que $\mathbf{M} = \mathbf{L}^T$ es la matriz inversa de \mathbf{L} , es decir:

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}^T = \mathbf{L}^{-1} \quad (0.23)$$

A las matrices que cumplen esta relación se les llama matrices *ortogonales*.

Luego, de la relación 0.15 podemos decir que las coordenadas del vector $\vec{\mathbf{a}}$ en la base $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ expresadas en función de la base $\{\vec{\mathbf{e}}'_i\}$ es:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{A}' = \mathbf{L}^T \mathbf{A}' \quad (0.24)$$

o lo que es lo mismo:

$$a_i = \sum_{j=1}^3 \lambda_{ji} a'_j \quad (0.25)$$

0.3.b.v) Rotaciones respecto a un eje.

A manera de ejemplo vamos a ver ahora como queda la matriz de cambio de base cuando se gira la base respecto a uno de los ejes de la misma, por ejemplo, $\vec{\mathbf{e}}_3$. Consideremos entonces que queremos pasar de la base $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ a la $\{\vec{\mathbf{e}}'_i\}$, tales que $\vec{\mathbf{e}}'_3 = \vec{\mathbf{e}}_3$, y los otros versores están girados un ángulo α en sentido antihorario vistos desde el extremo de $\vec{\mathbf{e}}_3$, de manera que ambas bases siguen siendo ortonormales directas (Ver Figura 0.2).

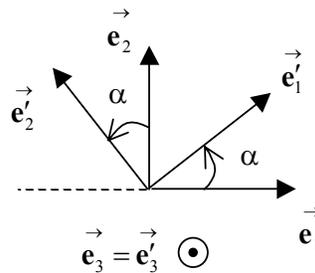


Figura 0.2

Para ver cuál es la matriz de cambio de base, debemos estudiar como cambian los vectores de la base. Para esto escribámoslos en forma genérica y luego hallemos sus componentes:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{e}}'_1 &= \lambda_{11} \vec{\mathbf{e}}_1 + \lambda_{12} \vec{\mathbf{e}}_2 + \lambda_{13} \vec{\mathbf{e}}_3 \\ \vec{\mathbf{e}}'_2 &= \lambda_{21} \vec{\mathbf{e}}_1 + \lambda_{22} \vec{\mathbf{e}}_2 + \lambda_{23} \vec{\mathbf{e}}_3 \\ \vec{\mathbf{e}}'_3 &= \lambda_{31} \vec{\mathbf{e}}_1 + \lambda_{32} \vec{\mathbf{e}}_2 + \lambda_{33} \vec{\mathbf{e}}_3\end{aligned}\quad (0.26)$$

Como $\vec{\mathbf{e}}'_3 = \vec{\mathbf{e}}_3$ tendremos en forma inmediata que: $\lambda_{31} = \lambda_{32} = 0, \lambda_{33} = 1$; y por la propiedad de ortogonalidad de la base será: $\lambda_{13} = \lambda_{23} = 0$. Por lo que:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{e}}'_1 &= \lambda_{11} \vec{\mathbf{e}}_1 + \lambda_{12} \vec{\mathbf{e}}_2 \\ \vec{\mathbf{e}}'_2 &= \lambda_{21} \vec{\mathbf{e}}_1 + \lambda_{22} \vec{\mathbf{e}}_2 \\ \vec{\mathbf{e}}'_3 &= \vec{\mathbf{e}}_3\end{aligned}\quad (0.27)$$

Multiplicando escalarmente cada una de las dos primeras ecuaciones por $\vec{\mathbf{e}}_1$ y $\vec{\mathbf{e}}_2$ tendremos que:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}'_1 &= \lambda_{11}, & \vec{\mathbf{e}}_2 \cdot \vec{\mathbf{e}}'_1 &= \lambda_{12} \\ \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}'_2 &= \lambda_{21}, & \vec{\mathbf{e}}_2 \cdot \vec{\mathbf{e}}'_2 &= \lambda_{22}\end{aligned}\quad (0.28)$$

Como todos los vectores aquí involucrados son versores, los productos escalares que allí aparecen serán los cosenos de los ángulos que forman entre sí dichos vectores. Fijándonos en la Figura 0.2 tendremos:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}'_1 &= \cos \alpha, & \vec{\mathbf{e}}_2 \cdot \vec{\mathbf{e}}'_1 &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha \\ \vec{\mathbf{e}}_1 \cdot \vec{\mathbf{e}}'_2 &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha, & \vec{\mathbf{e}}_2 \cdot \vec{\mathbf{e}}'_2 &= \cos \alpha\end{aligned}\quad (0.29)$$

Las relaciones vectoriales anteriores quedarán como:

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathbf{e}}'_1 &= \cos \alpha \vec{\mathbf{e}}_1 + \sin \alpha \vec{\mathbf{e}}_2 \\
 \vec{\mathbf{e}}'_2 &= -\sin \alpha \vec{\mathbf{e}}_1 + \cos \alpha \vec{\mathbf{e}}_2 \\
 \vec{\mathbf{e}}'_3 &= \vec{\mathbf{e}}_3
 \end{aligned} \tag{0.30}$$

y la matriz de cambio de base será:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{0.31}$$

La matriz inversa, que lleva de la base $\{\vec{\mathbf{e}}'_i\}$ a la $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ es:

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}^T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{0.32}$$

lo que implicaría que:

$$\begin{aligned}
 \vec{\mathbf{e}}_1 &= \cos \alpha \vec{\mathbf{e}}'_1 - \sin \alpha \vec{\mathbf{e}}'_2 \\
 \vec{\mathbf{e}}_2 &= \sin \alpha \vec{\mathbf{e}}'_1 + \cos \alpha \vec{\mathbf{e}}'_2 \\
 \vec{\mathbf{e}}_3 &= \vec{\mathbf{e}}'_3
 \end{aligned} \tag{0.33}$$

Este resultado puede verificarse intentando calcular las componentes de los versores de $\{\vec{\mathbf{e}}'_i\}$ en la base $\{\vec{\mathbf{e}}_i\}$ como lo hicimos antes.

0.3.c - Tensores.

En la sección anterior dijimos que lo que caracteriza a un vector es la forma en que sus coordenadas cambian ante un cambio de base. También vimos que había dos tipos de productos de vectores por vectores:

- 1) El producto *escalar*, en que un vector multiplicado por otro vector da un *escalar*.
- 2) El producto *vectorial*, en que un vector multiplicado por otro vector da un tercer *vector*.

Aquí comenzaremos hablando de un tercer tipo de producto de vectores por vectores, que llamaremos el producto *tensorial* cuyo resultado es una clase de cantidad u objeto diferente, que es un *tensor*. Así como dijimos que lo que caracteriza a un escalar es que es *invariante* respecto a los sistemas de coordenadas; y dijimos que un vector es toda aquella cantidad que frente a los cambios de base sus coordenadas cambian de acuerdo a la Ecuación 0.14; de la misma forma definiremos un tensor según se comporten sus coordenadas frente a un cambio de base, es decir, frente a un cambio de coordenadas que involucre solamente una rotación.

Adelantando nuestro resultado, vimos que para describir un escalar precisamos solamente de un único número real. Para describir un vector precisamos de tres números reales, es decir sus tres coordenadas. O sea, dado que un escalar se representa por un número (una matriz 1 x 1) y un vector por un vector de \mathbf{R}^3 , es decir, una matriz 1 x 3, se verá que un tensor se representa por una matriz cuadrada 3 x 3.

0.3.c.i) Producto Tensorial.

Comenzaremos calculando como se expresa el producto escalar de dos vectores en función de sus coordenadas. Sean:

$$\vec{\mathbf{a}} = a_1 \vec{\mathbf{e}}_1 + a_2 \vec{\mathbf{e}}_2 + a_3 \vec{\mathbf{e}}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \vec{\mathbf{e}}_i \quad \vec{\mathbf{b}} = b_1 \vec{\mathbf{e}}_1 + b_2 \vec{\mathbf{e}}_2 + b_3 \vec{\mathbf{e}}_3 = \sum_{i=1}^3 b_i \vec{\mathbf{e}}_i$$

Trabajando en forma similar como se dedujo la Ecuación 0.16:

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \left(\sum_{i=1}^3 a_i \vec{\mathbf{e}}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 b_j \vec{\mathbf{e}}_j \right) = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \left(\vec{\mathbf{e}}_i \cdot \vec{\mathbf{e}}_j \right) = \sum_{i,j=1}^3 a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i$$

y definiendo la matriz 3 x 1 de coordenadas de $\vec{\mathbf{b}}$: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, lo anterior puede expresarse

como:

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i = \mathbf{A}^T \mathbf{B} = \mathbf{B}^T \mathbf{A} \quad (0.34)$$

O sea que el producto *escalar* de dos vectores $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$ se calcula como el producto de sus representaciones matriciales 3 x 1, dando lugar a un escalar, es decir, una matriz 1 x 1. Pero dadas dos matrices 3 x 1 \mathbf{A} y \mathbf{B} , existe otra forma de multiplicarlas que da lugar a una matriz \mathbf{C} cuadrada 3 x 3 que es la siguiente:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} \quad (0.35)$$

La matriz \mathbf{C} es la representación en coordenadas de una nueva cantidad, resultado de operación del multiplicar *tensorialmente* los vectores $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$. Este nuevo producto que denominamos *producto tensorial* lo identificaremos con el símbolo \otimes ; o sea, si denominamos $\vec{\mathbf{c}}$ a esta cantidad, entonces:

$$\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} \otimes \vec{\mathbf{b}} \quad (0.36)$$

0.3.c.ii) Cambio de Base y Definición de Tensores.

Observar que $\vec{\mathbf{c}}$ no es un vector, pues su representación en coordenadas no es una matriz 3 x 1, sino una matriz 3 x 3. Esto es lo que denominaremos un *tensor*. Como en el caso de un vector, en que no cualquier conjunto ordenado de tres números reales era un vector, un conjunto cualquiera de nueve números ordenados tampoco será un tensor. Un vector es un concepto más abstracto, siendo las coordenadas solo su representación en una determinada base, y las mismas deben de cambiar de acuerdo a la relación (0.14) al cambiar de base. De la misma forma no cualquier arreglo ordenado de nueve números será un tensor, sino sólo aquellos que verifiquen cierto comportamiento frente a los cambios de base lo serán.

De la Ecuación 0.35 vemos que las coordenadas, componentes o elementos de la matriz \mathbf{C} que representa al tensor $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{c}}$ en la base $\{\overset{\rightarrow}{\mathbf{e}}_i\}$ es:

$$c_{ij} = a_i b_j \quad (0.37)$$

Para que $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{c}}$ esté coherentemente definido, en la base $\{\overset{\rightarrow}{\mathbf{e}}_i\}$ los elementos de la matriz \mathbf{C}' que lo representa deben ser:

$$c'_{ij} = a'_i b'_j \quad (0.38)$$

ya que cualquier cantidad debe definirse en forma equivalente en una base u otra. Ahora bien, las coordenadas de $\overset{\rightarrow}{\mathbf{a}}$ y $\overset{\rightarrow}{\mathbf{b}}$ cambiarán según la Ecuación 0.14:

$$c'_{ij} = a'_i b'_j = \left(\sum_{k=1}^3 \lambda_{ik} a_k \right) \left(\sum_{l=1}^3 \lambda_{jl} a_l \right) = \sum_{k,l=1}^3 \lambda_{ik} a_k a_l \lambda_{jl}$$

O sea que, utilizando las Ecuaciones 0.37 y la definición de los elementos $\mu_{jl} = \lambda_{jl}$ para los elementos de $\mathbf{M} = \mathbf{L}^T$ tenemos que:

$$c'_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 \lambda_{ik} c_{kl} \mu_{jl} \quad (0.39)$$

lo que matricialmente puede escribirse como:

$$\mathbf{C}' = \mathbf{LCL}^T \quad (0.40)$$

Ahora sí se puede definir un tensor, como aquel elemento que se represente por un arreglo ordenado de 9 coordenadas en forma de una matriz 3 x 3, las cuales deben cambiar de acuerdo a la Ecuación 0.39, o equivalentemente la 0.40, ante un cambio de base.

0.3.c.iii) El Producto Tensorial como una Aplicación Lineal.

Los tensores antes definidos, y en particular la cantidad $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{c}} = \overset{\rightarrow}{\mathbf{a}} \otimes \overset{\rightarrow}{\mathbf{b}}$ antes definida, pueden verse también de forma diferente, más que como cantidades en sí, como aplicaciones lineales, o funciones de vectores. Efectivamente, una *aplicación lineal* es una función que transforma un vector en otro vector, de forma que la misma cumple las propiedades usuales de

linealidad. Además de eso, las aplicaciones lineales suelen representarse por matrices cuadradas, de donde es inmediato asociar los tensores con las mismas.

Ahora entonces nos centraremos en interpretar el producto tensorial como una aplicación lineal.

Definamos por el momento la siguiente aplicación lineal \mathfrak{T} que cuando es aplicada a un vector $\vec{\mathbf{x}}$ arbitrario genera otro vector $\vec{\mathbf{y}}$ tal que verifica:

$$\vec{\mathbf{y}} = \mathfrak{T} \vec{\mathbf{x}} = \left(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{x}} \right) \vec{\mathbf{a}} \quad (0.41)$$

donde $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$ son dos vectores de los que la aplicación \mathfrak{T} depende.

Observar que en la definición aparece un producto escalar $\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{x}}$, y el número que resulte de aquí está multiplicado por el vector $\vec{\mathbf{a}}$. Ambas operaciones son lineales por lo que la aplicación \mathfrak{T} será lineal; o sea, dados dos vectores $\vec{\mathbf{x}}_1$ y $\vec{\mathbf{x}}_2$ cualesquiera, y dos escalares α y β también cualesquiera:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\mathbf{y}}_1 = \mathfrak{T} \vec{\mathbf{x}}_1 \\ \vec{\mathbf{y}}_2 = \mathfrak{T} \vec{\mathbf{x}}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathfrak{T} \left(\alpha \vec{\mathbf{x}}_1 + \beta \vec{\mathbf{x}}_2 \right) = \alpha \vec{\mathbf{y}}_1 + \beta \vec{\mathbf{y}}_2 \quad (0.42)$$

Buscaremos entonces cuál es su representación matricial. Para ello hay que ver como se transforman los vectores de la base ante la misma, y las coordenadas del vector resultante serán las columnas de la matriz \mathbf{F} que represente a \mathfrak{T} en la base en cuestión:

$$\mathfrak{T} \vec{\mathbf{e}}_1 = \left(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 \right) \vec{\mathbf{a}} = b_1 \vec{\mathbf{a}} = a_1 b_1 \vec{\mathbf{e}}_1 + a_2 b_1 \vec{\mathbf{e}}_2 + a_3 b_1 \vec{\mathbf{e}}_3$$

$$\mathfrak{T} \vec{\mathbf{e}}_2 = \left(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_2 \right) \vec{\mathbf{a}} = b_2 \vec{\mathbf{a}} = a_1 b_2 \vec{\mathbf{e}}_1 + a_2 b_2 \vec{\mathbf{e}}_2 + a_3 b_2 \vec{\mathbf{e}}_3$$

$$\mathfrak{T} \vec{\mathbf{e}}_3 = \left(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{e}}_3 \right) \vec{\mathbf{a}} = b_3 \vec{\mathbf{a}} = a_1 b_3 \vec{\mathbf{e}}_1 + a_2 b_3 \vec{\mathbf{e}}_2 + a_3 b_3 \vec{\mathbf{e}}_3$$

entonces:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix} \quad (0.43)$$

Efectivamente, la representación matricial de \mathfrak{F} coincide con la matriz de coordenadas \mathbf{C} del producto tensorial $\overset{\leftrightarrow}{\mathbf{c}}$, por lo que podemos concluir que ambas cosas son equivalentes y entonces:

$$\vec{\mathbf{y}} = \overset{\leftrightarrow}{\mathbf{c}} \vec{\mathbf{x}} = \mathfrak{F} \vec{\mathbf{x}} = \left(\overset{\rightarrow}{\mathbf{a}} \otimes \overset{\rightarrow}{\mathbf{b}} \right) \vec{\mathbf{x}} = \left(\overset{\rightarrow}{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{x}} \right) \overset{\rightarrow}{\mathbf{a}} \quad (0.44)$$

Concluimos entonces que el producto tensorial puede interpretarse como una aplicación lineal, ya que en cualquier base ortonormal ambas tienen la misma representación en coordenadas. Podemos generalizar, sin demostración, que todos los tensores, definidos como aquellas cantidades que verifican la propiedad de cambio de base de las Ecuaciones 0.39 o 0.40 se comportan como aplicaciones lineales.

Acotaremos finalmente que este tipo de tensores que hemos introducido, son los denominados *tensores de orden 2*. Dentro de este marco los vectores pueden interpretarse como tensores de orden 1 y los escalares como tensores de orden 0. Pueden, en general, definirse equivalentemente tensores de rango 3, cuyas representaciones en coordenadas sean matrices 3 x 3 x 3 y así sucesivamente. Pero en este curso no trabajaremos con cantidades tan complicadas.

0.3.c.iv) Propiedades adicionales del Producto Tensorial.

Volviendo a estudiar en particular el producto tensorial, y despreocupándonos por el momento de los tensores en general, este producto verifica algunas propiedades que las enumeramos aquí porque nos serán de utilidad posteriormente. Además de la propiedad de linealidad vista como aplicación (Ecuación 0.42) tenemos las siguientes propiedades de linealidad del mismo:

$$\left(\overset{\rightarrow}{\mathbf{a}}_1 + \overset{\rightarrow}{\mathbf{a}}_2 \right) \otimes \overset{\rightarrow}{\mathbf{b}} = \overset{\rightarrow}{\mathbf{a}}_1 \otimes \overset{\rightarrow}{\mathbf{b}} + \overset{\rightarrow}{\mathbf{a}}_2 \otimes \overset{\rightarrow}{\mathbf{b}} \quad (0.45)$$

$$\overset{\rightarrow}{\mathbf{a}} \otimes \left(\overset{\rightarrow}{\mathbf{b}}_1 + \overset{\rightarrow}{\mathbf{b}}_2 \right) = \overset{\rightarrow}{\mathbf{a}} \otimes \overset{\rightarrow}{\mathbf{b}}_1 + \overset{\rightarrow}{\mathbf{a}} \otimes \overset{\rightarrow}{\mathbf{b}}_2 \quad (0.46)$$

$$\vec{\mathbf{a}} \otimes (\gamma \vec{\mathbf{b}}) = (\gamma \vec{\mathbf{a}}) \otimes \vec{\mathbf{b}} = \gamma (\vec{\mathbf{a}} \otimes \vec{\mathbf{b}}) \quad (0.47)$$

0.4 – Sistemas de Vectores Aplicados.

Las operaciones anteriores definidas para vectores consideran a los mismos como vectores libres, es decir, alcanzan las tres coordenadas que lo definen para determinarlo completamente. Sin embargo, como veremos en más de una ocasión, los vectores con los que nosotros queremos trabajar actúan de alguna manera sobre un determinado punto; o, si se quiere en otras palabras, el punto de comienzo del vector es importante. Veamos algunos ejemplos que nos aparecerán repetidamente a lo largo del curso:

- 1) Sistemas de Partículas: Cuando tengamos un sistema de partículas moviéndose por el espacio, cada partícula se moverá con una velocidad diferente. La velocidad de cada una será un vector, y podemos pensar que ese vector comienza en cada instante en la partícula correspondiente.
- 2) Distribuciones de Fuerzas: Análogamente, en el sistema de partículas anterior, sobre cada partícula actuará una fuerza diferente y el punto de aplicación, o la partícula sobre la que la fuerza actúa será importante. Pensemos un momento, por ejemplo, en una calesita o una rueda que puede girar en torno a su centro, encontrándose el mismo fijo. Para hacerla girar empujándola, debemos empujar con una fuerza tangencial a su periferia. Si esa misma fuerza la aplicásemos en el centro no conseguiríamos ningún giro.
- 3) Distribuciones de Velocidades: Pensemos el ejemplo anterior de la calesita que gira en torno a su centro. El desplazamiento de cada punto en un intervalo de tiempo dependerá del giro de la misma. Cada punto se desplazará una determinada cantidad que dependerá de la posición del punto en cuestión; por ejemplo, de la distancia al centro de giro.

A lo largo del curso estudiaremos las particularidades de cada caso en detalle, sin embargo todos estos ejemplos tienen ciertas características comunes. Pensemos en el primer caso del sistema de partículas, que por ejemplo sea una galaxia con infinidad de estrellas. Si para describir el movimiento de la galaxia se deben dar los detalles del movimiento de cada una de sus estrellas, nos encontraremos frente a un problema imposible. De todas formas se puede estudiar el movimiento de la galaxia como un todo dando unos pocos parámetros; éstos son, su cantidad de movimiento o momento $\vec{\mathbf{p}}$ y el momento angular respecto a algún punto \mathbf{O} , $\vec{\mathbf{L}}_{\mathbf{O}}$. Aunque no nos describirán el movimiento del sistema completo, sí nos dan mucha información.

Estudiaremos ahora las generalidades de los sistemas de vectores aplicados que nos permitirán reducir el número de cantidades necesarias en el estudio de los mismos.

0.4.a – Vectores Aplicados.

0.4.a.i) Definición de Vector Aplicado.

A diferencia de un vector libre, un vector aplicado tiene un punto de aplicación en el espacio. Por eso definimos un *vector aplicado*

como una pareja dada por un vector libre $\vec{\mathbf{a}}$ y un *punto de aplicación* del mismo en el espacio, \mathbf{A} . O sea, que un vector aplicado es la pareja $\left\{ \mathbf{A}, \vec{\mathbf{a}} \right\}$.

A la recta $\vec{\mathbf{A}} \vec{\mathbf{a}}$, es decir, la recta que pasa por el punto \mathbf{A} y tiene la misma dirección

que el vector $\vec{\mathbf{a}}$, se le llama *recta de aplicación* o *recta de acción* del vector aplicado $\left\{ \mathbf{A}, \vec{\mathbf{a}} \right\}$.

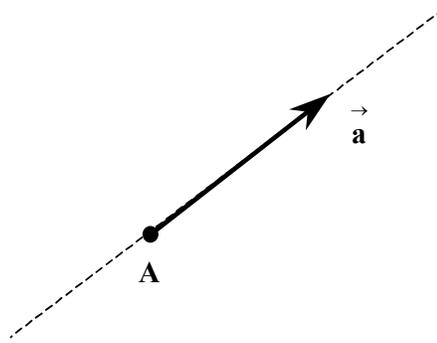


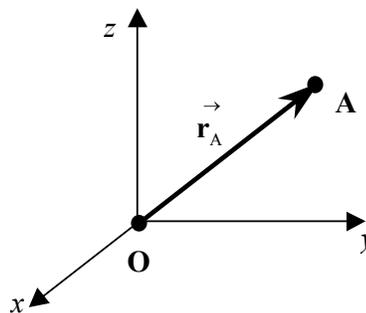
Figura 0.3

0.4.a.ii) Sistemas de Coordenadas como ejemplo de Vectores Aplicados.

Como \mathbf{A} es un punto del espacio, para determinarlo completamente debemos dar su posición, y para ello daremos sus coordenadas. En otras palabras, lo que estamos dando es un

vector libre $\vec{\mathbf{r}}_A$ que lo determina en el espacio. Pero en realidad, este vector está medido en un determinado sistema de coordenadas, para el que, como dijimos, se precisa un origen de coordenadas \mathbf{O} . Así que para determinar el punto \mathbf{A} precisamos de un vector aplicado $\left\{ \mathbf{O}, \vec{\mathbf{r}}_A \right\}$.

Por lo tanto, al referimos a un vector aplicado $\left\{ \mathbf{A}, \vec{\mathbf{a}} \right\}$ debemos dar dos vectores: $\vec{\mathbf{r}}_A$



y \vec{a} ; lo que es equivalente a dar seis coordenadas, tres del vector \vec{r}_A y tres del \vec{a} . En realidad lo que estamos dando es otro vector aplicado $\left\{O, \vec{r}_A\right\}$ y el vector libre \vec{a} . Obviamente que esto parecería una recurrencia infinita si no fuera que los puntos O y A tienen existencia en sí mismos, como los vectores; las coordenadas son solo una forma de determinar uno en relación a otro. O sea, podemos introducir el concepto de *diferencia* de puntos, cuyo resultado es un vector, de forma que, como se muestra en la Figura 0.4:

$$\vec{r}_A = A - O \quad (0.48)$$

Tratando de generalizar esta relación para dos puntos cualesquiera A y B , como muestra la Figura 0.5, diremos que:

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (B - O) - (A - O) = B - A \quad (0.49)$$

En esta ecuación estamos introduciendo y compatibilizando diferentes notaciones con que podemos referirnos a un mismo vector. Pero hacemos notar que podemos decir que formalmente el punto O está siendo simplificado en la última igualdad de esa ecuación.

Si re-escribimos la Ecuación 0.48 considerando O como un punto general:

$$\vec{r}_A = A - O = \vec{r}_A - \vec{r}_O$$

por lo tanto:

$$(0.50)$$

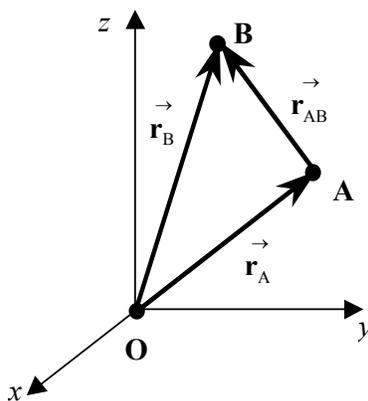


Figura 0.5

$$\vec{r}_O = 0$$

lo que es lógico con que al origen de coordenadas le

corresponde el vector $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

La notación introducida en la Ecuación 0.49, nos permite definir *formalmente* también la

$$(0.51)$$

suma de un punto y un vector. De la primer igualdad de dicha ecuación se deduce que:

$$\vec{\mathbf{r}}_B = \vec{\mathbf{r}}_A + \vec{\mathbf{r}}_{AB}$$

lo que, usando la notación introducida en la Ecuación 0.48 nos permite escribir:

$$\mathbf{B} - \mathbf{O} = (\mathbf{A} - \mathbf{O}) + \vec{\mathbf{r}}_{AB} \quad (0.52)$$

y simplificando formalmente el origen de coordenadas \mathbf{O} tendremos que:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \vec{\mathbf{r}}_{AB} \quad (0.53)$$

lo que formalmente sería la definición de sumar puntos y vectores.

0.4.a.iii) Momento de un Vector Aplicado.

Llamamos *momento* de un vector aplicado $\left\{ \mathbf{A}, \vec{\mathbf{a}} \right\}$ respecto a un determinado punto \mathbf{P} ,

al vector:

$$\vec{\mathbf{m}}_P = (\mathbf{A} - \mathbf{P}) \times \vec{\mathbf{a}} = \left(\vec{\mathbf{r}}_A - \vec{\mathbf{r}}_P \right) \times \vec{\mathbf{a}} \quad (0.54)$$

Utilizamos los dos tipos de notación introducida anteriormente porque la primera es independiente del sistema de coordenadas. Vemos, a través de la primera igualdad, que el momento de un vector no depende del sistema de coordenadas en uso; aunque, obviamente, la expresión del mismo dependerá de la base que se esté considerando, por tratarse de un vector libre.

La pareja $\left\{ \mathbf{P}, \vec{\mathbf{m}}_P \right\}$ se puede considerar como un nuevo vector aplicado.

0.4.a.iv) Cálculo de Momentos.

Como vemos de esta definición el momento $\vec{\mathbf{m}}_P$ de un vector aplicado $\left\{ \mathbf{A}, \vec{\mathbf{a}} \right\}$ es un pseudovector, porque está definido a través de un producto vectorial. Como tal, será perpendicular al vector en cuestión $\vec{\mathbf{a}}$ y a la recta que une el punto de aplicación del mismo con el punto en que se calcula el momento. Por lo tanto será perpendicular al plano definido por la recta de aplicación

del vector $\vec{A} \vec{a}$ y el punto P en que se calcula el mismo. El sentido del momento estará dado aplicando la regla de la mano derecha entre los vectores \vec{r}_{PA} y \vec{a} , como indica la Figura 0.6.

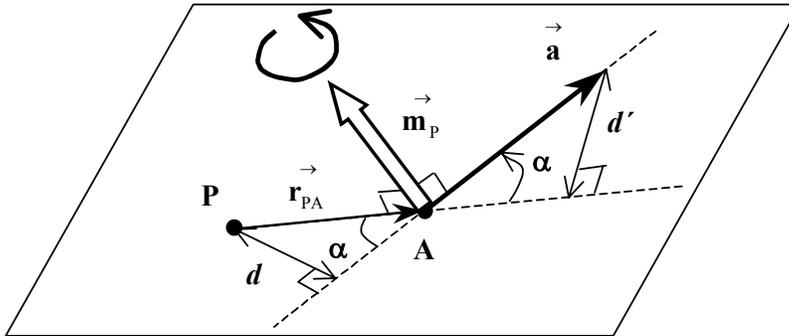


Figura 0.6

Su módulo será:

$$\left| \vec{m}_P \right| = \left| \vec{a} \right| \left| \vec{r}_{PA} \right| \operatorname{sen} \alpha = \left| \vec{a} \right| d \quad (0.55)$$

donde α es el ángulo entre el vector \vec{a} y \vec{r}_{PA} (es decir, entre la recta de acción del vector aplicado $\vec{A} \vec{a}$ y la recta PA) y

$$d = \left| \vec{r}_{PA} \right| \operatorname{sen} \alpha \quad (0.56)$$

es la distancia del punto P a la recta de acción $\vec{A} \vec{a}$. Alternativamente también se puede decir que:

$$\left| \vec{m}_P \right| = \left| \vec{a} \right| \left| \vec{r}_{PA} \right| \operatorname{sen} \alpha = \left| \vec{r}_{PA} \right| d' \quad (0.57)$$

donde ahora

$$d' = \left| \vec{a} \right| \operatorname{sen} \alpha \quad (0.58)$$

es la proyección del vector $\vec{\mathbf{a}}$ según la dirección *perpendicular* a la recta PA.

Cualesquiera de estas dos formas de cálculo del momento de un vector son de gran utilidad cuando calculemos momentos en configuraciones sencillas, como por ejemplo, problemas *planos*. En este tipo de problemas todos los vectores de interés están contenidos en un plano, que es el mismo en que se encuentran los puntos de aplicación y puntos de cálculo de momentos. Se le llaman problemas planos porque alcanza con trabajar con dos coordenadas solamente para tener una descripción completa del problema. Dependerá del caso particular cuál de las dos relaciones usar, si la Ecuación 0.55 o la 0.57. En el caso de momentos en el espacio, es decir, cuando se presente una geometría más general en que las tres direcciones independientes del espacio son importantes, es más conveniente hacer uso de la propia definición de momento Ecuación 0.54, y calcular el producto vectorial allí involucrado en forma general.

0.4.a.v) Cambio de Punto de Aplicación: Vectores Deslizantes.

Consideremos ahora dos vectores aplicados diferentes, a los que llamaremos $V^{(1)}$ y $V^{(2)}$:

$$V^{(1)} = \left\{ \mathbf{A}, \vec{\mathbf{a}} \right\} \text{ y } V^{(2)} = \left\{ \mathbf{B}, \vec{\mathbf{a}} \right\},$$

es decir, que se trata del mismo vector libre $\vec{\mathbf{a}}$ pero aplicado en puntos diferentes A y B. Los momentos de uno y otro vector respecto a un punto P arbitrario serán respectivamente:

$$\vec{\mathbf{m}}_P^{(1)} = \left(\vec{\mathbf{r}}_A - \vec{\mathbf{r}}_P \right) \times \vec{\mathbf{a}}$$

$$\vec{\mathbf{m}}_P^{(2)} = \left(\vec{\mathbf{r}}_B - \vec{\mathbf{r}}_P \right) \times \vec{\mathbf{a}}$$

La diferencia entre ellos será:

$$\vec{\mathbf{m}}_P^{(2)} - \vec{\mathbf{m}}_P^{(1)} = \left(\vec{\mathbf{r}}_B - \vec{\mathbf{r}}_A \right) \times \vec{\mathbf{a}} \quad (0.59)$$

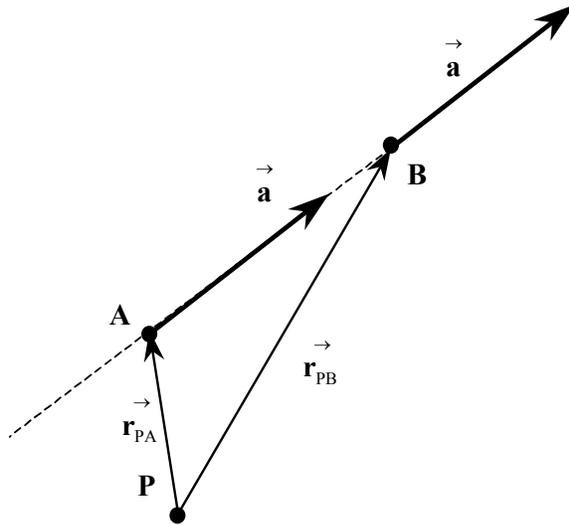


Figura 0.7

Estudiaremos que ocurre cuando la recta de aplicación de los vectores coincide; es decir, B se encuentra sobre la recta $A \vec{a}$, que coincidirá en ese caso con la $B \vec{a}$ (ver Figura 0.7). Entonces $\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$ será paralelo a \vec{a} y el segundo miembro de la Ecuación 0.59 será nulo, por lo que ambos momentos serán iguales:

$$\vec{m}_P^{(2)} = \vec{m}_P^{(1)} \quad (0.60)$$

Observar que este es el único caso en que esto es posible; o sea, si B no estuviese sobre la recta de acción de A entonces ese

término $(\vec{r}_B - \vec{r}_A) \times \vec{a}$ sería no nulo y los momentos serían diferentes.⁵

Como conclusión vemos que podemos desplazar el punto de aplicación de un vector aplicado sobre su recta de acción y el momento del mismo respecto a cualquier punto arbitrario del espacio no cambia. Por eso a un vector aplicado se le llama también *vector deslizante*, porque el mismo se desliza a través de su recta de acción.

0.4.a.vi) Cambio de Momentos respecto a su Punto de Aplicación.

⁵ - Hay dos casos singulares en que el segundo término de la Ecuación 0.59 es nulo que son:

- 1) cuando ambos puntos A y B coinciden; entonces, a pesar de que es un caso particular del caso general mencionado, los momentos serán iguales porque se trata de exactamente el mismo vector aplicado.
- 2) si $\vec{a} = 0$, pero acá tenemos la particularidad de que la recta de aplicación no está definida, y en realidad se podría decir que se trata de todo el espacio. En este caso, los momentos en todos los puntos del espacio serán nulos, por lo que es un caso particular de un vector aplicado idénticamente nulo.

Vemos, de la definición de momentos, Ecuación 0.54, que en principio, el momento $\vec{\mathbf{m}}_P$ depende, además del vector en cuestión, $\vec{\mathbf{a}}$, y del punto de aplicación del mismo, \mathbf{A} , de otro punto, en este caso \mathbf{P} , que es un punto cualquiera respecto del cual se calcula el momento.

Es decir, por su definición, el momento $\vec{\mathbf{m}}_P$ es el momento del vector aplicado $\left\{ \mathbf{A}, \vec{\mathbf{a}} \right\}$ respecto al punto \mathbf{P} . La importancia de este punto es tal que todos los momentos suelen escribirse de forma que el punto respecto al que se calcula aparece como subíndice. O sea, $\vec{\mathbf{m}}_P$ puede considerarse como una notación resumida que hace referencia al hecho de que el momento es en sí un vector aplicado $\left\{ \mathbf{P}, \vec{\mathbf{m}}_P \right\}$. En muchas de las operaciones que nos interesa hacer con vectores aplicados, y por lo general cuando se trate de momentos, para poder realizar las mismas dichos vectores deben estar aplicados en el mismo punto. Es decir, cuando sumemos momentos de diferentes vectores, los momentos que sumemos deben encontrarse calculados respecto a un mismo punto. Por esto es de interés estudiar como cambia el momento de un vector aplicado si cambiamos el punto respecto al cual el mismo se calcula.

Si deseamos calcular el momento en otro punto \mathbf{Q} , entonces tendremos:

$$\vec{\mathbf{m}}_Q = \left(\vec{\mathbf{r}}_A - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \times \vec{\mathbf{a}} = \left(\left(\vec{\mathbf{r}}_A - \vec{\mathbf{r}}_P \right) + \left(\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \right) \times \vec{\mathbf{a}} = \left(\vec{\mathbf{r}}_A - \vec{\mathbf{r}}_P \right) \times \vec{\mathbf{a}} + \left(\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \times \vec{\mathbf{a}}$$

y usando la propia definición de $\vec{\mathbf{m}}_P$ (Ecuación 0.54):

$$\vec{\mathbf{m}}_Q = \vec{\mathbf{m}}_P + \left(\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \times \vec{\mathbf{a}} \quad (0.61)$$

Esta ecuación nos da el momento del vector aplicado $\left\{ \mathbf{A}, \vec{\mathbf{a}} \right\}$ en el punto \mathbf{Q} calculado a partir del momento en el punto \mathbf{P} , donde obviamente \mathbf{P} y \mathbf{Q} son dos puntos arbitrarios.

Puede ser conveniente usar la propiedad de que el producto vectorial es *anticonmutativo*:

$$\left(\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \times \vec{\mathbf{a}} = -\vec{\mathbf{a}} \times \left(\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) = \vec{\mathbf{a}} \times \left(\vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_P \right) \quad (0.62)$$

y entonces la Ecuación 0.61 queda:

$$\vec{\mathbf{m}}_Q = \vec{\mathbf{m}}_P + \vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_P) \quad (0.63)$$

Ambas ecuaciones 0.61 y 0.63 son completamente equivalentes; sin embargo, esta segunda puede ser más fácil de memorizar, ya que en ella, utilizando esta notación para los

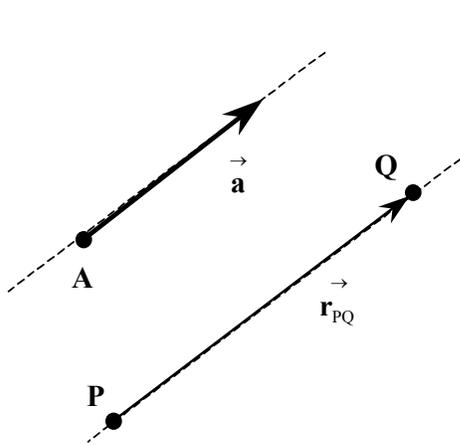


Figura 0.8

vectores posición $\vec{\mathbf{r}}_Q, \vec{\mathbf{r}}_P$ el orden de los puntos Q y P es el mismo, tanto en el subíndice de los momentos $\vec{\mathbf{m}}$, como en el de los vectores $\vec{\mathbf{r}}$ posición de dichos puntos.⁶

Observemos que, en el caso que se muestra en la Figura 0.8, en que el vector $\vec{\mathbf{r}}_{PQ} = \vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_P$ sea paralelo a $\vec{\mathbf{a}}$, entonces el producto vectorial

$$\vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_P) = 0 \quad (0.64)$$

y los momentos en P y Q son iguales:

$$\vec{\mathbf{m}}_Q = \vec{\mathbf{m}}_P \quad (0.65)$$

O sea que si yo traslado el punto P de cálculo del momento de un vector aplicado $\{A, \vec{\mathbf{a}}\}$ sobre una recta $P \vec{\mathbf{a}}$ paralela al mismo, el momento no cambia.

0.4.a.vii) Momento respecto a un eje.

⁶ - Observar que si cambiamos de notación y usamos $\vec{\mathbf{r}}_{PQ} = \vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_P$ el orden se mantendrá en la Ecuación 0.61, ya que hay una inversión en el orden de los puntos.

Llamaremos momento de un vector aplicado $\{A, \vec{a}\}$ respecto a una recta $P\vec{u}$ definida por un punto P y un versor \vec{u} , como muestra la Figura 0.9, a la cantidad *escalar* $m_{P\vec{u}}^{\vec{a}}$ definida como:

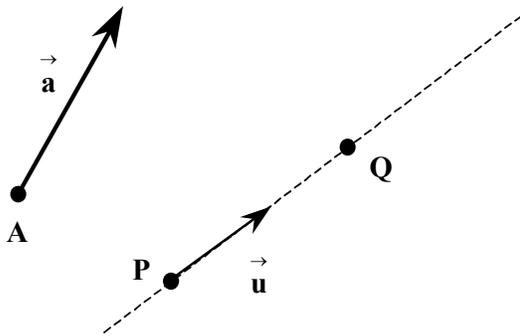


Figura 0.9

$$m_{P\vec{u}}^{\vec{a}} = \vec{u} \cdot \vec{m}_P \quad (0.66)$$

donde \vec{m}_P es el momento del vector $\{A, \vec{a}\}$ respecto al punto P .

A diferencia del momento *vector* definido anteriormente, esta cantidad es un *escalar*, y en su definición están involucrados, no solo el punto P arbitrario, sino

también un versor \vec{u} . Resaltamos el hecho de que sea un versor, es decir $\vec{u}^2 = 1$, porque si esto no fuese así la definición carecería de sentido.

Sin embargo, la definición anterior no depende del punto P que se considere sino solamente de la recta $P\vec{u}$. Efectivamente, consideremos otro punto Q cualquiera de la misma recta, como muestra la Figura 0.9. Aplicando la definición anterior sobre este nuevo punto, y la fórmula de cambio de momentos, Ecuación 0.63:

$$m_{Q\vec{u}}^{\vec{a}} = \vec{u} \cdot \vec{m}_Q = \vec{u} \cdot \left(\vec{m}_P + \vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_P) \right) = \vec{u} \cdot \vec{m}_P + \vec{u} \cdot \left(\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_P) \right)$$

donde, por estar el punto sobre la misma recta:

$$\vec{r}_Q - \vec{r}_P = \vec{r}_{PQ} = \left| \vec{r}_{PQ} \right| \vec{u} \quad (0.67)$$

es decir que $\vec{r}_Q - \vec{r}_P$ y \vec{u} son paralelos. El producto vectorial $\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_P)$ es perpendicular a \vec{u} , por lo que el producto mixto

$$\vec{u} \cdot \left(\vec{a} \times (\vec{r}_Q - \vec{r}_P) \right) = 0 \quad (0.68)$$

de donde resulta que:

$$m_{Q\vec{u}} = \vec{u} \cdot \vec{m}_Q = \vec{u} \cdot \vec{m}_P = m_{P\vec{u}} \quad (0.69)$$

A la recta $P\vec{u}$ respecto a la que se calcula este momento escalar se le suele llamar *eje*. La razón de esto es que, como veremos en el curso, esta definición tiene mucha importancia cuando se estudian el movimiento de giro de algún cuerpo respecto a un eje de rotación.

0.4.b – Sistemas de Vectores Aplicados.

En la sección anterior se definió y estudiaron algunas propiedades de un único vector aplicado $\left\{ A, \vec{a} \right\}$. Muchas veces en este curso nos aparecerán vectores de este tipo pero

agrupados; es decir, tendremos un conjunto de n vectores \vec{a}_i , con i variando desde 1 a n , cada uno de ellos aplicado en un punto A_i en principio diferente. Esto es lo que llamaremos un *Sistema de Vectores Aplicados*. Los 3 ejemplos dados al comienzo de la Sección 0.4 son todos casos de este tipo de sistemas que involucran varios vectores y no solamente uno. Estudiaremos ahora las propiedades de este tipo de sistemas.

0.4.b.i) Resultante y Momento de un Sistema de Vectores Aplicados.

Si tenemos un sistema de vectores aplicados $\left\{ A_i, \vec{a}_i \right\}$ con $i = 1, \dots, n$, definiremos las siguientes cantidades:

- La *resultante* es la suma vectorial de los vectores \vec{a}_i , o sea:

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{a}}_i \quad (0.70)$$

- El *momento* del sistema de vectores respecto a un punto \mathbf{P} como la suma de los momentos individuales de cada vector aplicado del sistema respecto a dicho punto:

$$\vec{\mathbf{M}}_P = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{m}}_{iP} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{A}_i - \mathbf{P}) \times \vec{\mathbf{a}}_i = \sum_{i=1}^n \left(\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{A}_i} - \vec{\mathbf{r}}_P \right) \times \vec{\mathbf{a}}_i \quad (0.71)$$

Estas cantidades así definidas son importantes por el hecho de que, si bien no seremos muy exhaustivos en la demostración de los detalles matemáticos, veremos que la resultante $\vec{\mathbf{R}}$ y el momento $\vec{\mathbf{M}}_P$ respecto a un determinado punto \mathbf{P} son los *únicos* parámetros o propiedades que nos interesan de cualquier sistema de vectores aplicados. Es decir, en cualquier aplicación en que nos aparezcan sistemas de vectores aplicados, las propiedades de los mismos vendrán completamente determinadas solamente por la pareja resultante $\vec{\mathbf{R}}$ y momento $\vec{\mathbf{M}}_P$, independientemente de cuál sea el conjunto de vectores aplicados particular de que se trate.

Por la propiedad anterior, la pareja $\left(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{M}}_P \right)$ es lo que se llama *coordenadas* del sistema de vectores respecto al punto \mathbf{P} . Observar que en esta definición de *coordenadas*, que es simplemente una denominación que se le da a esta pareja, nos referimos a un par de vectores. Para determinarlos completamente, precisaremos de una pareja de tres coordenadas en una determinada base de versores independientes; o sea un total de 6 coordenadas o variables independientes que nos determinan las propiedades del sistema de vectores aplicados.

0.4.b.ii) Fórmula de Cambio de Momentos de un Sistema de Vectores Aplicados.

Debemos observar que en la definición anterior de coordenadas de un sistema de vectores aplicados, $\left\{ \vec{A}_i, \vec{a}_i \right\}$ con $i = 1, \dots, n$, respecto a un determinado punto P, que es relativa a dicho punto, solo uno de los vectores depende del punto. Mientras que el momento \vec{M}_P depende del mismo, por su definición, Ecuación 0.71, la resultante \vec{R} es independiente de este punto. Sin embargo, tan solo por \vec{M}_P depender del punto P, las coordenadas respecto a dos puntos diferentes P y Q serán diferentes. Demostraremos a continuación que dadas las coordenadas $\left(\vec{R}, \vec{M}_P \right)$ en el punto P, las coordenadas $\left(\vec{R}, \vec{M}_Q \right)$ respecto a cualquier otro punto Q estarán completamente determinadas, independientemente de los vectores aplicados particulares.

De la definición de \vec{R} es inmediato que no depende del punto, como dicho anteriormente, por lo que lo único que precisamos es demostrar que el momento \vec{M}_Q puede determinarse completamente dadas las coordenadas en el punto P: $\left(\vec{R}, \vec{M}_P \right)$. Por definición:

$$\vec{M}_Q = \sum_{i=1}^n \vec{m}_{iQ} = \sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_{A_i} - \vec{r}_Q \right) \times \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_{A_i} - \vec{r}_P + \vec{r}_P - \vec{r}_Q \right) \times \vec{a}_i$$

Aquí en la última igualdad se sumó y restó el vector \vec{r}_P lo que da lugar a:

$$\vec{M}_Q = \sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_{A_i} - \vec{r}_P \right) \times \vec{a}_i + \sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_P - \vec{r}_Q \right) \times \vec{a}_i = \sum_{i=1}^n \left(\vec{r}_{A_i} - \vec{r}_P \right) \times \vec{a}_i + \left(\vec{r}_P - \vec{r}_Q \right) \times \sum_{i=1}^n \vec{a}_i$$

donde el vector $\left(\vec{r}_P - \vec{r}_Q \right)$ no depende del punto de aplicación de los vectores por lo que puede ponerse como factor común de todos los términos de la segunda de las dos sumatorias. Comparándolas con las ecuaciones 0.70 y 0.71 tenemos:

$$\vec{M}_Q = \vec{M}_P + \left(\vec{r}_P - \vec{r}_Q \right) \times \vec{R} \quad (0.72)$$

lo que es la denominada Fórmula de Cambio de Momentos, porque nos da el momento en un punto $\vec{\mathbf{M}}_Q$ en función de la resultante $\vec{\mathbf{R}}$ y el momento en otro $\vec{\mathbf{M}}_P$; es decir, que dadas las coordenadas $\left(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{M}}_P\right)$ en un punto P, las coordenadas $\left(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{M}}_Q\right)$ respecto a otro punto Q están automáticamente determinadas.

Esta ecuación es muy similar a la 0.61, que nos daba el momento respecto a un punto de un único vector aplicado en función del momento en otro punto y el propio vector, por lo que procediendo como entonces podemos escribir:

$$\boxed{\vec{\mathbf{M}}_Q = \vec{\mathbf{M}}_P + \vec{\mathbf{R}} \times \left(\vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_P\right)} \quad (0.73)$$

0.4.b.iii) Campos Vectoriales y Campo de Momentos.

La fórmula de cambio de momentos permite interpretar los momentos de un determinado sistema de vectores aplicados como un *campo vectorial*. Un campo vectorial es, por definición, cualquier función que a cada punto del espacio le hace corresponder un vector. O sea, dado un punto P cualquiera, un campo vectorial asocia a dicho punto un vector que podemos llamar $\vec{\mathbf{c}}(P)$. Dado un sistema de coordenadas para el espacio, un campo vectorial puede verse como una función de $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$: $\vec{\mathbf{c}}(P) = \vec{\mathbf{c}}\left(\vec{\mathbf{r}}_P\right)$.

Por ejemplo, el producto tensorial definido en la sección 0.3.c.iii a través de la Ecuación 0.41 es un caso de campo vectorial, donde $\vec{\mathbf{y}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right)$ es un campo vectorial con $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$ parámetros de dicha función. En general todo tensor y todas las aplicaciones lineales pueden verse como campos vectoriales. El recíproco no es cierto, ya que un campo vectorial cualquiera no tiene por qué ser lineal.

Un ejemplo de campo vectorial *no lineal*, que aparecerá muy seguido en el Capítulo 4 cuando estudiemos Movimiento Planetario, es la fuerza de atracción gravitatoria que existe entre dos cuerpos cualesquiera con masa. Dicha fuerza puede verse como un campo vectorial que asocia a un vector $\vec{\mathbf{r}}$, posición relativa entre los dos cuerpos, otro vector $\vec{\mathbf{F}}$, que es la fuerza de interacción entre ambos a través de la expresión:

$$\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) = -GMm \frac{\vec{\mathbf{r}}}{\left(\vec{\mathbf{r}}^2\right)^{3/2}} = -GMm \frac{\vec{\mathbf{r}}}{|\vec{\mathbf{r}}|^3} \quad (0.74)$$

donde M y m son las masas de los cuerpos considerados y G es una constante universal. El signo de menos es debido a que la fuerza entre los cuerpos es atractiva⁷. Como se puede ver, efectivamente se trata de una función que asocia un vector a otro vector.

De la misma manera, la fórmula de cambio de momentos asocia el momento $\vec{\mathbf{M}}_Q$ a cualquier punto Q del espacio, de coordenadas $\vec{\mathbf{r}}_Q$, donde $\vec{\mathbf{M}}_P$, $\vec{\mathbf{R}}$ y $\vec{\mathbf{r}}_P$ son parámetros de dicha función, como lo eran los vectores $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$ en la definición de producto tensorial. Al campo vectorial que surge de dichas ecuaciones 0.72 y 0.73 se le llama *campo de momentos*.

0.4.b.iv) Sistemas de Vectores Aplicados Equivalentes.

Consideremos dos sistemas de vectores aplicados diferentes: $S^{(1)} = \left\{ A_i, \vec{\mathbf{a}}_i \right\}$ con $i = 1, \dots, n$, y $S^{(2)} = \left\{ B_j, \vec{\mathbf{b}}_j \right\}$ con $j = 1, \dots, m$, que tengan las mismas coordenadas $\left(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{M}}_P \right)$, es decir, la misma resultante $\vec{\mathbf{R}}$ y el mismo momento $\vec{\mathbf{M}}_P$ respecto a un mismo punto P , en principio arbitrario, o sea:

$$\vec{\mathbf{R}}^{(1)} = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{a}}_i = \sum_{j=1}^m \vec{\mathbf{b}}_j = \vec{\mathbf{R}}^{(2)} \quad (0.75)$$

$$\vec{\mathbf{M}}_P^{(1)} = \sum_{i=1}^n (A_i - P) \times \vec{\mathbf{a}}_i = \sum_{j=1}^m (B_j - P) \times \vec{\mathbf{b}}_j = \vec{\mathbf{M}}_P^{(2)} \quad (0.76)$$

⁷ - Para que el signo sea relevante, el vector $\vec{\mathbf{r}}$ debe ser definido con un poco más de cuidado. No entraremos en este detalle por el momento.

En dichas condiciones los sistemas $S^{(1)}$ y $S^{(2)}$ serán completamente equivalentes y en todas nuestras aplicaciones veremos que podremos sustituir uno por el otro sin inconvenientes.

Acotemos que en la definición anterior hablamos de las coordenadas $\left(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{M}}_p\right)$ respecto a un punto P, la fórmula de cambio de momentos, Ecuación 0.73 nos dice que también tendrán las mismas coordenadas respecto a cualquier otro punto Q: ⁸

$$\vec{\mathbf{M}}_Q^{(1)} = \vec{\mathbf{M}}_P^{(1)} + \mathbf{R} \times \left(\vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_P\right) = \vec{\mathbf{M}}_P^{(2)} + \mathbf{R} \times \left(\vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_P\right) = \vec{\mathbf{M}}_Q^{(2)} \quad (0.77)$$

0.4.b.v) Suma de Sistemas de Vectores Aplicados.

Consideremos dos sistemas de vectores aplicados $S^{(1)} = \left\{ \mathbf{A}_i, \mathbf{a}_i \right\}$, con $i = 1, \dots, n$, de coordenadas $\left(\vec{\mathbf{R}}^{(1)}, \vec{\mathbf{M}}_P^{(1)}\right)$ respecto a un punto P, y $S^{(2)} = \left\{ \mathbf{A}_{j+n}, \mathbf{a}_{j+n} \right\}$ con $j = 1, \dots, m$, de coordenadas $\left(\vec{\mathbf{R}}^{(2)}, \vec{\mathbf{M}}_P^{(2)}\right)$ respecto al mismo punto P. Formemos el sistema *unión* de ambos, al que llamaremos sistema *suma*, que sale de agrupar los dos anteriores: $S^{(suma)} = \left\{ \mathbf{A}_k, \mathbf{a}_k \right\}$ con $k = 1, \dots, n + m$. Las coordenadas de este último, aplicando las definiciones, vendrán dadas por:

$$\vec{\mathbf{R}}^{(suma)} = \vec{\mathbf{R}}^{(1)} + \vec{\mathbf{R}}^{(2)} \quad (0.78)$$

y:

$$\vec{\mathbf{M}}_P^{(suma)} = \vec{\mathbf{M}}_P^{(1)} + \vec{\mathbf{M}}_P^{(2)} \quad (0.79)$$

es decir, la resultante y momento del sistema *unión* son las sumas de las resultantes y momentos originales, es por esta razón que al mismo se le llama sistema *suma*; o sea, porque podemos asumir que $S^{(suma)} = S^{(1)} + S^{(2)}$.

⁸ - La resultante es la misma por la Ecuación 0.75.

Estas propiedades son casi inmediatas debido a las sumatorias involucradas en las definiciones, ecuaciones 0.70 y 0.71, pero haremos la demostración a continuación. De la propia definición de resultante tendremos:

$$\vec{\mathbf{R}}^{(1)} = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{a}}_i \quad \text{y} \quad \vec{\mathbf{R}}^{(2)} = \sum_{j=1}^m \vec{\mathbf{a}}_{j+n} \quad (0.80)$$

mientras que:

$$\vec{\mathbf{R}}^{(\text{suma})} = \sum_{k=1}^{n+m} \vec{\mathbf{a}}_k = \sum_{k=1}^n \vec{\mathbf{a}}_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} \vec{\mathbf{a}}_k \quad (0.81)$$

en donde solamente se ha separado la sumatoria en dos. Si cambiamos, en la primer sumatoria, el subíndice k por el subíndice i , mientras que hacemos el cambio de variable $j = k - n$ en la segunda, se llega a:

$$\vec{\mathbf{R}}^{(\text{suma})} = \sum_{k=1}^n \vec{\mathbf{a}}_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} \vec{\mathbf{a}}_k = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{a}}_i + \sum_{j=1}^m \vec{\mathbf{a}}_{j+n} = \vec{\mathbf{R}}^{(1)} + \vec{\mathbf{R}}^{(2)} \quad (0.82)$$

que es lo que queríamos demostrar (Ecuación 0.78).

Análogamente se puede demostrar para los momentos:

$$\vec{\mathbf{M}}_P^{(1)} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{A}_i - \mathbf{P}) \times \vec{\mathbf{a}}_i \quad \text{y} \quad \vec{\mathbf{M}}_P^{(2)} = \sum_{j=1}^m (\mathbf{A}_{j+n} - \mathbf{P}) \times \vec{\mathbf{a}}_{j+n} \quad (0.83)$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{M}}_P^{(\text{suma})} &= \sum_{k=1}^{n+m} (\mathbf{A}_k - \mathbf{P}) \times \vec{\mathbf{a}}_k = \sum_{k=1}^n (\mathbf{A}_k - \mathbf{P}) \times \vec{\mathbf{a}}_k + \sum_{k=n+1}^{n+m} (\mathbf{A}_k - \mathbf{P}) \times \vec{\mathbf{a}}_k = \\ &= \sum_{i=1}^n (\mathbf{A}_i - \mathbf{P}) \times \vec{\mathbf{a}}_i + \sum_{j=1}^m (\mathbf{A}_{j+n} - \mathbf{P}) \times \vec{\mathbf{a}}_{j+n} = \vec{\mathbf{M}}_P^{(1)} + \vec{\mathbf{M}}_P^{(2)} \end{aligned} \quad (0.84)$$

0.4.b.vi) Casos Importantes de Sistemas de Vectores Aplicados.

A continuación enumeraremos algunos ejemplos de sistemas de vectores aplicados, los cuales aparecerán frecuentemente a lo largo del curso:

- *Vector Deslizante:* Es un sistema constituido por un único vector aplicado

$$S^{(1)} = \left\{ A, \vec{a} \right\}. \text{ En este caso tendremos que:}$$

$$\vec{R} = \vec{a} \quad (0.85)$$

$$\vec{M}_p = (A - P) \times \vec{a} \quad (0.86)$$

Por lo visto en la Sección 0.4.a.v, los sistemas $S^{(1)} = \left\{ A, \vec{a} \right\}$ y $S^{(2)} = \left\{ B, \vec{a} \right\}$

de la Figura 0.7 son equivalentes.

- *Sistema Par o Par de Vectores:*⁹ Es un sistema constituido por dos vectores iguales y opuestos aplicados en puntos diferentes, siempre que la recta que los une no sea colineal con la dirección del vector. O sea:

$$S^{(1)} = \left\{ \left(A, \vec{a} \right), \left(B, -\vec{a} \right) \right\}, \text{ con}$$

$$\vec{r}_{AB} \times \vec{a} \neq 0.$$

La principal característica de este sistema es que su resultante es nula:

$$\vec{R} = \vec{a} - \vec{a} = 0 \quad (0.87)$$

Entonces, por la fórmula de cambio de momentos, Ecuación 0.73, el momento respecto a dos puntos cualesquiera P y Q, será igual. O sea,

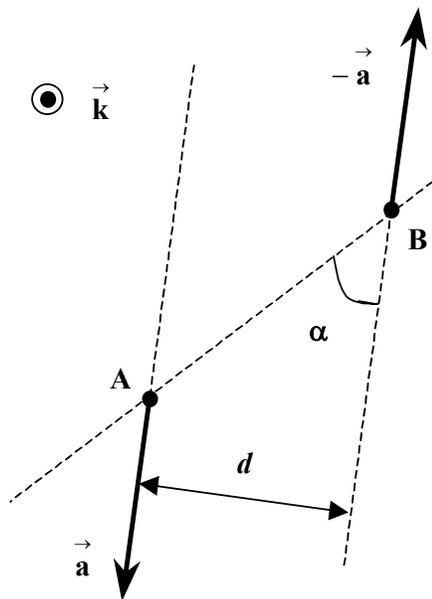


Figura 0.10

⁹ - Siempre que hablemos de un *par* nos estaremos refiriendo a un sistema de este tipo.

podemos escribir que:

$$\vec{\mathbf{M}}_p = \vec{\mathbf{M}} \quad (0.88)$$

Notar que entonces las coordenadas de un par respecto a cualquier punto serán $(0, \vec{\mathbf{M}})$. Solamente importarán las componentes del momento de este sistema, las cuales a su vez son independientes del punto. Este es entonces un sistema de vectores que representa un momento solamente; si a un determinado sistema de vectores le agregamos un par, solo estaremos alterando el momento del mismo, pero su resultante permanecerá inalterada.

Dado que el momento será independiente del punto, calculemoslo en alguno de los puntos de aplicación de los dos vectores del sistema, por ejemplo el punto A (ver Figura 0.10):

$$\vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{M}}_A = (\vec{\mathbf{r}}_A - \vec{\mathbf{r}}_A) \times \vec{\mathbf{a}} + (\vec{\mathbf{r}}_B - \vec{\mathbf{r}}_A) \times (-\vec{\mathbf{a}})$$

En esta ecuación el momento del primer vector será nulo, porque el vector $\vec{\mathbf{r}}_A - \vec{\mathbf{r}}_A = 0$, por lo que tendremos que:

$$\vec{\mathbf{M}} = \left| \vec{\mathbf{r}}_{AB} \right| \left| \vec{\mathbf{a}} \right| \sin \alpha \vec{\mathbf{k}} = \left| \vec{\mathbf{a}} \right| d \vec{\mathbf{k}} \quad (0.89)$$

siendo α el ángulo entre la recta AB y las rectas de acción de los vectores ($A \vec{\mathbf{a}}$ y $B \vec{\mathbf{a}}$, respectivamente), el vector $\vec{\mathbf{k}}$ un versor en la dirección perpendicular al plano de la Figura 0.10, y $d = \left| \vec{\mathbf{r}}_{AB} \right| \sin \alpha$ la distancia entre las rectas $A \vec{\mathbf{a}}$ y $B \vec{\mathbf{a}}$.

Observemos entonces que si acercamos las rectas aumentando el módulo de los vectores, de forma que el producto $\left| \vec{\mathbf{M}} \right| = \left| \vec{\mathbf{a}} \right| d$ sea constante, tendremos un sistema de vectores aplicados equivalente. O sea, el sistema de vectores anterior es equivalente a un sistema $S^{(2)} = \left\{ (A, \vec{\mathbf{b}}), (B', -\vec{\mathbf{b}}) \right\}$ siempre que mantengamos el producto

$\left| \vec{\mathbf{a}} \right| d = \left| \vec{\mathbf{b}} \right| d'$ donde $d' = \left| \vec{\mathbf{r}}_{AB'} \right| \text{sen } \alpha$ es la distancia entre las rectas de acción

A $\vec{\mathbf{b}}$ y B' $\vec{\mathbf{b}}$ de los vectores del sistema $S^{(2)}$.

- Sistemas Nulos Elementales: Decimos que un sistema de vectores aplicados es un *sistema nulo* cuando sus resultante y momento, en *todos* los puntos del espacio, son idénticamente nulos. A un sistema cualquiera de estos no le llamaremos *nulo elemental*, sino que, por definición, diremos que existen dos tipos de tales sistemas:

- 1) Vector deslizante nulo: Es un sistema constituido por n vectores, todos aplicados en el mismo punto, y tales que su suma sea nula; o sea:

$$S_0^{(1)} = \left\{ \mathbf{A}, \vec{\mathbf{a}}_i \right\} \text{ con } i = 1, \dots, n, \text{ y tal que:}$$

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{a}}_i = 0 \tag{0.90}$$

Obviamente se verificará que:

$$\vec{\mathbf{M}}_P = \sum_{i=1}^n \left(\vec{\mathbf{r}}_A - \vec{\mathbf{r}}_P \right) \times \vec{\mathbf{a}}_i = \left(\vec{\mathbf{r}}_A - \vec{\mathbf{r}}_P \right) \times \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{a}}_i = 0 \tag{0.91}$$

para todo punto P del espacio.

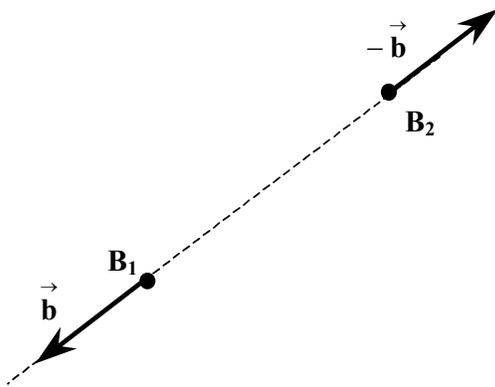


Figura 0.11

Este sistema es equivalente a un único vector $\vec{\mathbf{a}}_0 = 0$ aplicado en el punto A.

- 2) Par deslizante nulo: Es un par constituido por 2 vectores que tienen la misma dirección de la recta definida por sus puntos de aplicación; o sea:

$$S_0^{(2)} = \left\{ \left(\mathbf{B}_1, \vec{\mathbf{b}} \right), \left(\mathbf{B}_2, -\vec{\mathbf{b}} \right) \right\} \text{ y}$$

tal que el vector $\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2$ es paralelo a $\vec{\mathbf{b}}$ (Ver Figura 0.11):

$$\vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{b}} - \vec{\mathbf{b}} = 0 \quad (0.92)$$

En este caso, por tratarse de un par el momento no depende del punto:

$$\vec{\mathbf{M}}_P = \vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{M}}_{B_1} = (\mathbf{B}_1 - B_1) \times \vec{\mathbf{b}} + (\mathbf{B}_2 - B_1) \times (-\vec{\mathbf{b}}) = 0 \quad (0.93)$$

donde la última igualdad se verifica porque el primer sumando involucra el vector nulo $(\mathbf{B}_1 - B_1)$ y el segundo cumple que:

$$(\mathbf{B}_2 - B_1) \times (-\vec{\mathbf{b}}) = (\mathbf{B}_1 - B_2) \times \vec{\mathbf{b}} = 0 \quad (0.94)$$

por ser los vectores paralelos.

0.4.b.vii) Invariante Vectorial e Invariante Escalar.

Como vimos anteriormente, las coordenadas $(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{M}}_P)$ de un sistema de vectores aplicados cumplan la condición de que $\vec{\mathbf{R}}$ era independiente del punto P respecto al que las mismas estaban referidas. Por eso podemos decir que $\vec{\mathbf{R}}$ es un *invariante vectorial*, porque no cambia si cambiamos el punto al que hacemos referencia.

De la misma manera demostraremos ahora que existe otra cantidad, que no depende de dicho punto. Esta vez es un escalar, por eso lo denominaremos *invariante escalar* y está definido como el producto escalar de la resultante y el momento:

$$\mu = \vec{\mathbf{M}}_P \cdot \vec{\mathbf{R}} \quad (0.95)$$

Efectivamente, si lo calculamos en otro punto Q y hacemos referencia al anterior a través de la fórmula de cambio de momentos, Ecuación 0.73, tendremos:

$$\mu' = \vec{\mathbf{M}}_Q \cdot \vec{\mathbf{R}} = \left(\vec{\mathbf{M}}_P + \mathbf{R} \times (\vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_P) \right) \cdot \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{M}}_P \cdot \vec{\mathbf{R}} + \left(\mathbf{R} \times (\vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_P) \right) \cdot \vec{\mathbf{R}}$$

Como nuevamente el producto mixto:

$$\left(\vec{\mathbf{R}} \times \left(\vec{\mathbf{r}}_Q - \vec{\mathbf{r}}_P \right) \right) \cdot \vec{\mathbf{R}} = 0 \quad (0.96)$$

tenemos que:

$$\mu' = \vec{\mathbf{M}}_Q \cdot \vec{\mathbf{R}} = \vec{\mathbf{M}}_P \cdot \vec{\mathbf{R}} = \mu \quad (0.97)$$

0.4.b.viii) Propiedades Adicionales de los Sistemas de Vectores Aplicados.

A continuación enumeramos algunas propiedades generales de los sistemas de vectores aplicados. Muchas de ellas requieren de una demostración cuidadosa, mientras que otras son obvias tras las definiciones y conceptos expuestos anteriormente. Las mencionamos aquí porque pueden ser de gran ayuda al interpretar muchos de los resultados que obtendremos posteriormente, así como también facilitar el cálculo en las diversas aplicaciones y ejercicios que aparecerán durante el año.

- 1) Si a un sistema de vectores se le agrega un sistema de vectores nulo elemental, el nuevo sistema tendrá la misma resultante y momento que el original.
- 2) La condición necesaria y suficiente para que dos sistemas de vectores aplicados sean equivalentes es que tengan el mismo momento respecto a tres puntos no alineados.
- 3) Todo sistema de vectores es equivalente a uno constituido por dos únicos vectores, uno de ellos aplicado en un punto prefijado.
- 4) Todo sistema de vectores es equivalente a uno constituido por tres vectores aplicados en tres puntos no alineados prefijados.
- 5) La condición necesaria y suficiente para que un sistema de vectores aplicados sea equivalente a un vector deslizante o un par es que el invariante escalar sea nulo.
- 6) La condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial $\vec{\mathbf{c}}(\mathbf{P})$ sea un campo de momentos es que:

$$\left(\vec{\mathbf{c}}(\mathbf{P}) - \vec{\mathbf{c}}(\mathbf{Q}) \right) \cdot \left(\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) = 0 \quad (0.98)$$

0.4.c – Ejemplos de Sistemas de Vectores Aplicados.

A continuación volveremos con un poco más de detenimiento sobre las aplicaciones que daremos en este curso a los conceptos definidos y estudiados anteriormente en forma general para sistemas de vectores aplicados. Estudiaremos los tres ejemplos particulares mencionados al principio de la sección 0.4.

0.4.c.i) Cinética de un Sistema de Partículas.

En el Capítulo 5 de este curso estudiaremos en forma general los Sistemas de Partículas como generalización de los conceptos que introduciremos en la primer parte del curso que se aplican a una única partícula. Entendemos por *Sistemas de Partículas* a un conjunto de n puntos P_i , con $i = 1, \dots, n$, de coordenadas $\vec{\mathbf{r}}_i = \vec{\mathbf{r}}_i$ los cuales tienen masas m_i , y se mueven con velocidades $\vec{\mathbf{v}}_i$. Independientemente de cuál sea el movimiento de estas partículas, y las variaciones que introduzcan estos movimientos en las posiciones P_i al avanzar el tiempo, por ahora deseamos estudiarlo como si el tiempo no anduviese; o sea, como si tuviésemos una fotografía de la posición de las partículas y la información adicional de cuál es la velocidad instantánea de cada una de ellas.

Definimos entonces la *Cantidad de Movimiento* de la i -ésima partícula como:

$$\vec{\mathbf{p}}_i = m_i \vec{\mathbf{v}}_i \quad (0.99)$$

y consideraremos el sistema de estos vectores, cantidades de movimiento aplicados sobre la partícula correspondiente: $\left\{ \vec{\mathbf{P}}_i, \vec{\mathbf{p}}_i \right\}$ con $i = 1, \dots, n$. La resultante de este sistema de vectores aplicados es lo que llamamos la *Cantidad de Movimiento Total*; es decir, la del sistema de partículas considerado como un todo:

$$\vec{\mathbf{P}} = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{\mathbf{v}}_i \quad (0.100)$$

Veremos en el Capítulo 5 que podemos definir un punto en particular, que denominaremos *Centro de Masas* o *Baricentro*, \mathbf{G} , al que se le puede asignar toda la masa del sistema. Es decir, siendo

$$M = \sum_{i=1}^n m_i \quad (0.101)$$

la masa total del sistema, se verifica que:

$$\vec{\mathbf{P}} = M \vec{\mathbf{v}}_G \quad (0.102)$$

donde $\vec{\mathbf{v}}_G$ es la velocidad del centro de masas.

Aplicando la definición, Ecuación 0.54, los momentos individuales de estos vectores aplicados, respecto a algún punto Q, serán:

$$\vec{\mathbf{l}}_{iQ} = (\mathbf{P}_i - \mathbf{Q}) \times \vec{\mathbf{p}}_i = \left(\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \times \vec{\mathbf{p}}_i = m_i \left(\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \times \vec{\mathbf{v}}_i \quad (0.103)$$

donde $\vec{\mathbf{l}}_{iQ}$ es, por definición, el Momento Angular de la partícula i respecto al punto Q.

Considerando en particular el momento angular respecto al origen de coordenadas, al que llamaremos para simplificar simplemente $\vec{\mathbf{l}}_i$, tendremos:

$$\vec{\mathbf{l}}_i = \vec{\mathbf{l}}_{iO} = (\mathbf{P}_i - \mathbf{O}) \times \vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{p}}_i = m_i \vec{\mathbf{r}}_i \times \vec{\mathbf{v}}_i \quad (0.104)$$

Es inmediato de su definición, Ecuación 0.103, que:

$$\vec{\mathbf{l}}_{iQ} = \vec{\mathbf{l}}_i - \vec{\mathbf{r}}_Q \times \vec{\mathbf{p}}_i = \vec{\mathbf{l}}_i + \vec{\mathbf{p}}_i \times \vec{\mathbf{r}}_Q \quad (0.105)$$

lo que no es más que el cambio de punto de aplicación del momento, ecuaciones 0.61 y 0.63.

Para el *Momento Angular Total* del sistema de partículas respecto al punto Q tendremos:

$$\vec{\mathbf{L}}_Q = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{l}}_{iQ} = \sum_{i=1}^n (\mathbf{P}_i - \mathbf{Q}) \times \vec{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^n \left(\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \times \vec{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \left(\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \times \vec{\mathbf{v}}_i \quad (0.106)$$

y para cualquier otro punto S se cumplirá, por la fórmula de cambio de momentos:

$$\vec{\mathbf{L}}_S = \vec{\mathbf{L}}_Q + \vec{\mathbf{P}} \times \left(\vec{\mathbf{r}}_S - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) = \vec{\mathbf{L}}_Q + M \vec{\mathbf{v}}_G \times \left(\vec{\mathbf{r}}_S - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \quad (0.107)$$

Ejemplos:1) Partícula única:

En el caso que tengamos una única partícula A de masa m y velocidad \vec{v} , estaríamos frente al caso de un vector deslizante. La cantidad de movimiento total será:

$$\vec{P} = \vec{p} = m \vec{v} \quad (0.108)$$

y el momento angular respecto al origen:

$$\vec{I} = \vec{r}_A \times \vec{p} = m \vec{r}_A \times \vec{v} \quad (0.109)$$

El momento respecto a un punto P cualquiera será:

$$\vec{I}_P = \left(\vec{r}_A - \vec{r}_P \right) \times \vec{p} = m \left(\vec{r}_A - \vec{r}_P \right) \times \vec{v} \quad (0.110)$$

Por lo que hemos visto previamente de vectores deslizantes el momento angular $\vec{I}_Q = 0$ para todo punto Q que se encuentre en la recta de acción del vector deslizante, que en este caso será $A \vec{v}$.

2) Velocidades iguales y opuestas:

Consideremos un sistema formado por dos partículas P_1 y P_2 , de igual masa m y tal que se mueven con velocidades iguales y opuestas \vec{v} y $-\vec{v}$, respectivamente. Este sistema es similar a un par de vectores aplicados, por lo que tendremos:

$$\vec{p}_1 = m \vec{v} \quad (0.111)$$

$$\vec{p}_2 = m \left(-\vec{v} \right) = -m \vec{v} = -\vec{p}_1 \quad (0.112)$$

$$\vec{P} = \vec{p}_2 + \vec{p}_1 = 0 \quad (0.113)$$

Haciendo uso de la Ecuación 0.102 vemos que el baricentro de este sistema estará fijo:

$$\vec{\mathbf{v}}_G = \mathbf{0} \quad (0.114)$$

ya que la masa total del sistema es:

$$M = 2m \neq 0 \quad (0.115)$$

El momento angular será obviamente igual en todos los puntos del espacio y su módulo será:

$$l = \left| \vec{\mathbf{I}} \right| = m d \left| \vec{\mathbf{v}} \right| \quad (0.116)$$

siendo d la distancia entre las rectas de acción $P_1 \vec{\mathbf{v}}$ y $P_2 \vec{\mathbf{v}}$ de ambos vectores.

3) *Traslación de un Sistema de Partículas.*

Consideremos el caso general del sistema de n partículas en que todas ellas tengan la misma velocidad $\vec{\mathbf{v}}_i = \vec{\mathbf{v}}$. Esto es lo que se dice un sistema con movimiento de *traslación*, entonces de las ecuaciones 0.100 y 0.102:

$$\vec{\mathbf{P}} = M \vec{\mathbf{v}}_G = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{\mathbf{v}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{\mathbf{v}} = \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \vec{\mathbf{v}} = M \vec{\mathbf{v}}$$

o sea que la velocidad del baricentro será igual a la de todas las demás partículas del sistema:

$$\vec{\mathbf{v}}_G = \vec{\mathbf{v}} \quad (0.117)$$

El momento angular total respecto a un punto Q será:

$$\vec{\mathbf{L}}_Q = \sum_{i=1}^n \left(\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \times \vec{\mathbf{p}}_i = \sum_{i=1}^n m_i \left(\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \times \vec{\mathbf{v}} = \left(\sum_{i=1}^n m_i \left(\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \right) \times \vec{\mathbf{v}}$$

donde trabajando con la sumatoria del último miembro:

$$\sum_{i=1}^n m_i \left(\vec{\mathbf{r}}_i - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{\mathbf{r}}_i - \sum_{i=1}^n m_i \vec{\mathbf{r}}_Q = \sum_{i=1}^n m_i \vec{\mathbf{r}}_i - \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \vec{\mathbf{r}}_Q$$

que usando la definición de masa total del sistema, Ecuación 0.101:

$$\sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i - M \vec{r}_Q \quad (0.118)$$

por lo que:

$$\vec{L}_Q = \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i - M \vec{r}_Q \right) \times \vec{v} = \left(\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \right) \times \vec{v} - M \vec{r}_Q \times \vec{v} \quad (0.119)$$

Pero volviendo a la Ecuación 0.118, vemos que existe un punto en que el momento angular es nulo ya que el segundo miembro de esta ecuación puede hacerse cero. Como veremos posteriormente este punto es precisamente el centro de masa del sistema, que por definición es aquel punto G de coordenadas:

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \quad (0.120)$$

por lo que efectivamente, sustituyendo vemos que:

$$\vec{L}_G = 0 \quad (0.121)$$

Comparando entonces este caso de un sistema de partículas con movimiento de traslación con el de una única partícula, vemos que el primero es equivalente a una partícula ubicada en el baricentro G del sistema, de masa M (la masa del sistema total) y con velocidad \vec{v} (la misma del resto de todas las partículas).

Ambos sistemas tienen la misma cantidad de movimiento $\vec{P} = M \vec{v}$ y momento angular $\vec{L}_G = 0$. O sea, ambos sistemas de vectores aplicados son equivalentes.

0.4.c.ii) Distribuciones de Fuerzas.

Consideremos ahora el mismo sistema de partículas o puntos P_i pero ahora nos concentraremos no en las velocidades con que se mueven, sino en las fuerzas aplicadas sobre ellos. Llamémosle \vec{F}_i a una fuerza aplicada sobre la i -ésima partícula P_i . Estudiaremos ahora

brevemente el sistema de vectores aplicados $\left\{ \mathbf{P}_i, \vec{\mathbf{F}}_i \right\}$ con $i = 1, \dots, n$, al que llamaremos indistintamente *Sistema de Fuerzas Aplicadas* o *Distribución de Fuerzas*.¹⁰

Los conceptos vertidos anteriormente de sistemas de vectores, se trasladan directamente, por lo que se definen la resultante y el momento respecto a un punto Q a través de las ecuaciones 0.70 y 0.71:

$$\vec{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{F}}_i \quad (0.122)$$

$$\vec{\mathbf{M}}_Q = \sum_{i=1}^n (\mathbf{P}_i - \mathbf{Q}) \times \vec{\mathbf{F}}_i = \sum_{i=1}^n (\vec{\mathbf{r}}_{\mathbf{P}_i} - \vec{\mathbf{r}}_Q) \times \vec{\mathbf{F}}_i \quad (0.123)$$

y vale también la Fórmula de Cambio de Momentos, Ecuación 0.73:

$$\vec{\mathbf{M}}_S = \vec{\mathbf{M}}_Q + \vec{\mathbf{R}} \times (\vec{\mathbf{r}}_S - \vec{\mathbf{r}}_Q) \quad (0.124)$$

Dos sistemas de fuerzas que tengan las mismas coordenadas $\left(\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{M}}_Q \right)$ respecto a un mismo punto Q cualquiera, serán equivalentes.

Esta propiedad será de gran importancia en nuestro curso porque nos permitirá introducir simplificaciones de materia fundamental (es decir, en las deducciones teóricas que realicemos) así como también simplificaciones en el momento de realizar cálculos específicos a los problemas planteados. Discutiremos ahora como la aplicaremos en diferentes partes del curso:

1) Consideremos dos sistemas de fuerzas $S^{(1)} = \left\{ \mathbf{P}_i, \vec{\mathbf{F}}_i \right\}$, con $i = 1, \dots, n$, de

coordenadas $\left(\vec{\mathbf{R}}^{(1)}, \vec{\mathbf{M}}_Q^{(1)} \right)$ respecto a un punto Q, y $S^{(2)} = \left\{ \mathbf{P}_j, \vec{\mathbf{F}}_{j+n} \right\}$ con $j =$

¹⁰ - Notar que la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_i$ no es necesariamente la fuerza total aplicada sobre la partícula \mathbf{P}_i , por lo que si hay más de una fuerza actuando sobre una misma partícula aparecerían como vectores aplicados diferentes.

$1, \dots, m$, de coordenadas nulas; es decir, las coordenadas respecto al punto Q $\left(\begin{matrix} \vec{\mathbf{R}}^{(2)} \\ \vec{\mathbf{M}}_Q^{(2)} \end{matrix} \right)$ serán:

$$\vec{\mathbf{R}}^{(2)} = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \vec{\mathbf{M}}_Q^{(2)} = \mathbf{0} \quad (0.125)$$

Por las propiedades de la suma de sistemas de vectores aplicados, ecuaciones 0.78 y 0.79, tendremos que el sistema suma $S^{(3)} = \left\{ \mathbf{P}_i, \vec{\mathbf{F}}_i \right\}$ con $i = 1, \dots, n + m$ verificará que:

$$\vec{\mathbf{R}}^{(3)} = \vec{\mathbf{R}}^{(1)} + \vec{\mathbf{R}}^{(2)} = \vec{\mathbf{R}}^{(1)} \quad (0.126)$$

y:

$$\vec{\mathbf{M}}_Q^{(3)} = \vec{\mathbf{M}}_Q^{(1)} + \vec{\mathbf{M}}_Q^{(2)} = \vec{\mathbf{M}}_Q^{(1)} \quad (0.127)$$

Como consecuencia de esto, tendremos que el sistema de fuerzas $S^{(3)} = S^{(1)} + S^{(2)}$, será equivalente al sistema $S^{(1)}$.

En otras palabras, cuando un determinado sistema de vectores aplicados, $S^{(3)}$, esté formado por dos subsistemas, $S^{(1)}$ y $S^{(2)}$, teniendo uno de ellos, por ejemplo el $S^{(2)}$, resultante y momento nulo, el sistema total $S^{(3)}$ será equivalente a $S^{(1)}$; o sea, aquella parte del sistema de fuerzas cuyas coordenadas no son *necesariamente* idénticamente nulas¹¹. Observar que no todos los vectores del sistema $S^{(2)}$ tienen que ser nulos, ni tiene que ser un sistema nulo elemental, sino que sólo debe cumplir que sus coordenadas respecto a un punto particular sean nulas. Por la fórmula de cambio de momentos, Ecuación 0.73, lo serán respecto a cualquier punto.

Esta propiedad nos permitirá, en muchas oportunidades, eliminar una parte de un determinado sistema de fuerzas, que sabremos de antemano tiene coordenadas nulas, y trabajar solamente con el resto de las fuerzas. Efectivamente, cuando trabajemos

¹¹ - Aunque en algún caso particular sí pueden serlo, y el sistema total tendrá también coordenadas nulas. Es más, cuando estudiemos equilibrio de sistemas, en la segunda parte del curso, veremos que exigiremos, precisamente, que aquella parte de un sistema de fuerzas que no necesariamente tiene coordenadas nulas, las tenga para que el sistema pueda estar en equilibrio.

con sistemas de fuerzas actuando sobre sistemas de partículas, podremos clasificar las mismas en dos subgrupos:

- *Fuerzas Internas*: Son aquellas fuerzas que surgen de la interacción mutua entre las partículas del sistema.
- *Fuerzas Externas*: Son las debidas a la interacción del sistema con otras partículas o sistemas externos al que se considere.

Posteriormente veremos que uno de los principios de la dinámica nos permite demostrar que el sistema de fuerzas internas es de resultante y momento nulos; por lo que el sistema total de fuerzas será equivalente al sistema de fuerzas externas. Esto nos permitirá, en muchos casos, y en particular para sistemas rígidos, determinar completamente el movimiento del sistema estudiando solamente las fuerzas externas, independientemente de cuáles sean las interacciones internas del sistema. Dado que cuando trabajemos con sistemas de muchas partículas tendremos un gran desconocimiento sobre esta distribución de fuerzas internas, esta es una simplificación muy importante de nuestro trabajo.

- 2) Para un sistema cualquiera de fuerzas $S = \left\{ \mathbf{P}_i, \vec{\mathbf{F}}_i \right\}$, con $i = 1, \dots, n$,

consideremos que una cualquiera de las fuerzas del sistema, $\vec{\mathbf{F}}_j$, aplicada en el punto \mathbf{P}_j , se sustituye por una fuerza igual, pero aplicada en el punto \mathbf{P}'_j ubicado sobre su

recta de acción $\mathbf{P}_j \vec{\mathbf{F}}_j$ (es decir, se desplaza dicha fuerza en su línea de acción), dejando el resto de las $n - 1$ fuerzas inalteradas. Tendremos así un sistema equivalente al original. Esto es debido a que el valor de la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_j$ es el mismo

que originalmente, y por lo tanto su contribución a la resultante $\vec{\mathbf{R}}$ no cambia; y por lo demostrado en la sección 0.4.a.v, la contribución al momento total de los vectores

aplicados $\left\{ \mathbf{P}_j, \vec{\mathbf{F}}_j \right\}$ y $\left\{ \mathbf{P}'_j, \vec{\mathbf{F}}_j \right\}$ será la misma, por lo tanto el momento total $\vec{\mathbf{M}}_Q$

tampoco cambiará.

Esto nos permite entonces, dado un sistema de fuerzas, desplazar una cualquiera de las fuerzas del sistema sobre su recta de acción sin alterar las coordenadas del sistema (resultante y momento).

- 3) Consideremos ahora que, dado un sistema de fuerzas $S^{(1)} = \left\{ \mathbf{P}_i, \vec{\mathbf{F}}_i \right\}$, con $i = 1, \dots, n$, sustituimos la fuerza $\vec{\mathbf{F}}_j$, aplicada en el punto \mathbf{P}_j , por dos fuerzas aplicadas en el mismo punto, a las que llamaremos $\vec{\mathbf{F}}'_j$ y $\vec{\mathbf{F}}''_j = \vec{\mathbf{F}}_{n+1}$, tales que:

$$\vec{\mathbf{F}}_j = \vec{\mathbf{F}}'_j + \vec{\mathbf{F}}''_j = \vec{\mathbf{F}}'_j + \vec{\mathbf{F}}_{n+1} \quad (0.128)$$

Es decir, construimos un nuevo sistema $S^{(2)} = \left\{ \mathbf{P}'_k, \vec{\mathbf{F}}'_k \right\}$, con $k = 1, \dots, n+1$,

donde los vectores aplicados de los sistemas $S^{(1)}$ y $S^{(2)}$ son iguales para todo $i = k$, salvo $k = j$ y $k = n + 1$; es decir:

$$\left\{ \mathbf{P}'_k, \vec{\mathbf{F}}'_k \right\} = \begin{cases} \left\{ \mathbf{P}_j, \vec{\mathbf{F}}'_j \right\} & \text{para } k = j \\ \left\{ \mathbf{P}_j, \vec{\mathbf{F}}''_j = \vec{\mathbf{F}}_{n+1} \right\} & \text{para } k = n + 1 \\ \left\{ \mathbf{P}_i, \vec{\mathbf{F}}_i \right\} & \text{para } k = i \neq j \end{cases} \quad (0.129)$$

Es inmediato demostrar que la resultante y el momento respecto a cualquier punto de ambos sistemas son iguales, por lo que, dado un sistema de fuerzas, podemos sustituir cualquiera por dos nuevas fuerzas aplicadas en el mismo punto, siempre y cuando la suma de estas dos últimas den la primera.

Esta propiedad, junto a la anterior, es de gran utilidad en el cálculo de momentos ya que podemos descomponer cualquier fuerza, según dos direcciones perpendiculares, cuyos momentos sean más fáciles de calcular. Obviamente que estas fuerzas podrán a su vez ser trasladadas según su línea de acción.

Ejemplo:

Consideremos ahora, como ejemplo un sistema de partículas $\{P_i\}$ con $i = 1, \dots, n$, de forma que la i -ésima partícula tiene masa m_i . Y consideremos un sistema de fuerzas $\{P_i, \vec{F}_i\}$ con $i = 1, \dots, n$, de forma que la fuerza actuando sobre la i -ésima partícula es proporcional a su masa: $\vec{F}_i = m_i \vec{f}$, donde \vec{f} es un vector constante, al que llamaremos *campo* \vec{f} .

La Resultante del sistemas de fuerzas aplicadas será:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{f} = M \vec{f} \quad (0.130)$$

o sea, la fuerza es igual a la masa total del sistema de partículas por el campo \vec{f} . El momento respecto a un punto cualquiera Q será:

$$\vec{M}_Q = \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \vec{f} = \left[\sum_{i=1}^n m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \right] \times \vec{f} \quad (0.131)$$

utilizando la Ecuación 0.118 y la definición de baricentro, Ecuación 0.120, tenemos que el momento de este sistema de fuerzas en el baricentro es nulo:

$$\vec{M}_G = 0 \quad (0.132)$$

Por lo que, este sistema de fuerzas es equivalente, a una única fuerza $\vec{R} = M \vec{f}$ aplicado en el aricentro del sistema de partículas.

0.4.c.iii) Distribución de Velocidades de un Rígido.

Como veremos más adelante en el curso, el movimiento de un cuerpo rígido o de un sistema de referencia respecto a otro, queda determinado completamente dando la velocidad de un punto cualquiera del rígido, Q, que se mueva con velocidad \vec{v}_Q , y un vector velocidad angular $\vec{\omega}$, tal que la velocidad de cualquier punto del espacio, considerado como solidario al rígido o al sistema de referencia en cuestión es:

$$\vec{\mathbf{v}}_P = \vec{\mathbf{v}}_Q + \vec{\omega} \times (\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_Q) \quad (0.133)$$

Esto es lo que se llama *Distribución de Velocidades del Rígido*, y no se usa solamente para hallar la velocidad de un punto perteneciente a un rígido, sino que también nos dará la velocidad de arrastre de un punto respecto a un sistema de referencia en movimiento.

Esta relación es muy similar en su forma a la fórmula de cambio de momentos. Como vemos, la misma puede considerarse como un campo vectorial, de forma que a cada punto del espacio \mathbf{P} , le asocio una velocidad de acuerdo a esta fórmula. De esta forma tendré definida la velocidad de cualquier punto del espacio como punto del rígido, tenga el rígido una partícula con masa en dicho punto o no. El campo vectorial así generado, verifica la Ecuación 0.98, ya que:

$$\left(\vec{\mathbf{v}}_P - \vec{\mathbf{v}}_Q \right) \cdot \left(\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) = \left(\vec{\omega} \times \left(\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) \right) \cdot \left(\vec{\mathbf{r}}_P - \vec{\mathbf{r}}_Q \right) = 0 \quad (0.134)$$

por lo que la distribución de velocidades del rígido, según el punto 6) de la Sección 0.4.b.viii puede verse como un campo de momentos. O sea, la velocidad angular $\vec{\omega}$, puede considerarse como la resultante de un sistema de vectores aplicados y las velocidades los momentos totales en el punto correspondiente de este sistema de vectores aplicados.

No entraremos en detalle, pero el sistema de vectores aplicados en cuestión son las velocidades angulares de giros elementales en torno a algún punto fijo.

CAPITULO I

CINEMÁTICA DE LA PARTICULA

"La naturaleza es una esfera infinita cuyo centro está en todas partes y su circunferencia en ninguna"

Blas Pascal Pensamientos.

"No definiré tiempo, espacio y movimiento ya que estos conceptos son bien conocidos por todos"

Isaac Newton Principia (1686).

"Tiempo

Más tiempo

¿Solo tiempo?"

Jorge Guillen Homenaje.

CINEMÁTICA DE LA PARTICULA

I-1. Introducción

La Mecánica es la rama de la Física que estudia el movimiento de los cuerpos materiales. Históricamente es la primera de las ciencias exactas de la naturaleza y por lo tanto es un paradigma de toda actividad científica. Más aún, la Tecnología moderna y sus inmensas posibilidades de transformación del mundo resultan de la aplicación sistemática del método científico. Por esta razón, más allá del interés que sin duda tiene el transmitir un conjunto de conocimientos útiles para la actividad profesional del ingeniero, este curso de Física, como todos los restantes, tiene el objetivo fundamental de lograr que los estudiantes adquieran la capacidad de analizar y resolver los problemas que enfrenten en su actividad profesional con esa mezcla de rigor e imaginación propia de la ciencia.

El primer obstáculo que debe superar toda ciencia empírica para su desarrollo es el de poner orden en nuestras sensaciones extraordinariamente ricas y fugaces. Platón fue el primero en observar que nada podríamos decir acerca de las percepciones fluidas de nuestros sentidos si no pudiéramos captar en ellas relaciones permanentes proyectadas por nuestra razón. El pensamiento debe ir eliminando factores accesorios o accidentales y con la ayuda de objetos geométricos y matemáticos debe intentar describir los fenómenos que ante nosotros fluyen sin cesar. Platón se limitó a enunciar el programa de las ciencias empíricas. Había que esperar hasta la llegada de la época moderna, para que hombres como Kepler, Galileo y Newton lo llevaran a cabo.

El primer problema al que se ve enfrentada la Física al buscar una descripción precisa del movimiento es por consiguiente el de eliminar todos aquellos factores que son accesorios y el de encontrar el lenguaje matemático más apropiado. La máxima realización de este programa alcanzada en la antigüedad es la descripción de Ptolomeo del movimiento planetario. Resulta natural que la primera descripción con cierto grado de exactitud de un fenómeno se refiera al movimiento planetario. En efecto, los datos de la observación son sumamente simples (debido a la distancia entre los objetos celestes y la Tierra, es fácil tratar a los primeros como objetos puntuales). Por otra parte, sus movimientos son muy regulares y periódicos. Basándose en las nociones de la geometría de Euclides y en la idea platónica de la perfección de la circunferencia, Ptolomeo llega a una descripción del movimiento planetario en términos de partículas puntuales que ocupan posiciones sucesivas en el espacio a medida que el tiempo transcurre. Los elementos esenciales de la descripción cinemática del movimiento de las partículas materiales ya están presentes en el esquema de Ptolomeo.

Sólo faltaba incorporar la idea de la Relatividad del Espacio que aparecería con Copérnico y sería enunciada en forma explícita por Galileo. En efecto, para Ptolomeo todo

movimiento debe describirse con referencia a la Tierra que se encuentra en reposo en el centro del Universo. Al mostrar la enorme simplificación conceptual que resultaba al referir el movimiento de los planetas en torno al Sol, Copérnico estaba implícitamente mostrando que el sistema de referencia respecto al cual se describe el movimiento depende en definitiva de nuestra conveniencia y que por lo tanto no existe un sistema privilegiado.

En este Capítulo introduciremos los elementos matemáticos básicos para la descripción del movimiento de una partícula.

La parte de una teoría física que introduce el lenguaje necesario para la descripción de los fenómenos que estudia se llama la Cinemática. Todo fenómeno que se encuentra dentro del rango de aplicación de la Teoría debe ser expresable en dicho lenguaje. Así, la Cinemática de las Partículas Materiales debe ser capaz de describir cualquier movimiento posible de una partícula en el espacio tridimensional.

El segundo elemento básico presente en cualquier teoría física es la Dinámica. Ella establece las leyes que obedecen los fenómenos físicos. En particular, la Dinámica de las partículas Materiales nos permitirá determinar, en una situación dada, cuál de todos los movimientos cinemáticamente posibles seguirá la partícula en cuestión.

I-2. Cinemática en una dimensión.

I-2a. Movimiento sobre una recta.

Como hemos observado, los movimientos reales son muy complejos. En general las distintas partes de un objeto tendrán movimientos diferentes, lo que puede dar lugar a rotaciones o vibraciones internas. En muchos casos esos movimientos internos pueden despreciarse cuando sólo interesa determinar el movimiento promedio del cuerpo. En general, cuando las dimensiones del objeto en cuestión son mucho menores que las de su trayectoria, podemos considerar al objeto como un punto matemático. Los objetos de este tipo se denominan partículas. Por ejemplo cuando deseamos describir el movimiento de la Tierra alrededor del Sol podemos despreciar los movimientos internos de la atmósfera y los mares e incluso su movimientos de rotación y tratarlo como un objeto puntual.

¿Cómo podemos describir el movimiento de una partícula que se mueve sobre una recta?



FIG. 1

Una primera descripción es establecer la hora en la cual la partícula pasa por cada uno de los puntos.

| | Tiempo | Posición |
|-------------|-------------------|-----------------|
| Día 29/7/89 | 14 h. 27 m. 30 s. | A |
| " " | 14 h. 27 m. 34 s. | B |
| " " | 14 h. 28 m. 36 s. | C |
| " " | 14 h. 28 m. 38 s. | D |

Tabla 1

En esta primera descripción sólo hemos podido asignar un valor numérico al tiempo, mientras que nos hemos limitado a distinguir las distintas posiciones con una letra. Para asignar

valores numéricos es necesario un origen, ya que solo somos capaces de medir intervalos, no posiciones o tiempos absolutos. Como existe un origen convencional de tiempo hemos podido asignar valores numéricos a dichas variables.

Si deseamos hacer lo mismo con el espacio es necesario definir un origen.

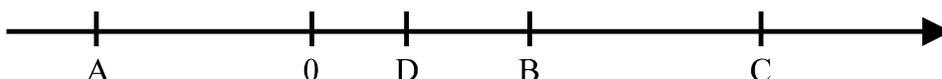


FIG. 2

Construyamos ahora un sistema coordenado orientando la recta. A cualquier punto de la recta le asignaremos un número x que indique su distancia al origen. El valor x es la posición con respecto a O . Será positivo si el punto sigue a O y negativo si lo precede. Podemos entonces describir el movimiento por

| Tiempo | Posición |
|--------|----------|
| 0 s. | -4 m. |
| 4 s. | 8 m. |
| 6 s. | 12 m. |
| 8 s. | 4 m. |

Tabla 2

donde hemos tomado el origen de tiempos en el instante en que la partícula pasaba por A.

Si representamos este movimiento gráficamente poniendo en la abscisa los tiempos y en las ordenadas la posición resulta

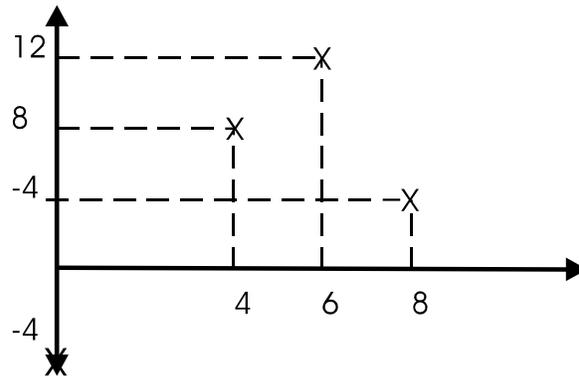


FIG. 3

La descripción que hemos obtenido del movimiento es sin duda incompleta ya que obviamente no nos da información alguna sobre qué posiciones ocupa la partícula para otros valores del tiempo. Nuestra descripción mejora por consiguiente en la medida que disminuyen los intervalos de tiempo para los cuales se determina la posición. Una descripción completa del movimiento en una dimensión consistirá entonces en darse una función $x(t)$ que asigne a cada valor del tiempo la correspondiente posición de la partícula.

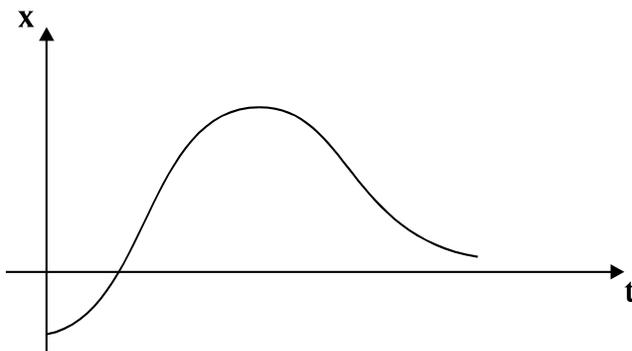


FIG. 4

Toda la información relacionada con el movimiento de la partícula está contenida en la función $x(t)$ llamada ley horaria. Sin embargo aunque la posición en función del tiempo contiene toda la información relevante no la contiene en la forma más útil. La información del velocímetro de un auto es redundante si este

último tiene cuenta kilómetros y reloj, pero pocos discutirían su utilidad. Ello se debe a que las leyes de la dinámica involucran los conceptos de aceleración y velocidad y no a la posición directamente.

Pasemos a definir estos conceptos.

Supongamos que una partícula se encuentra en la posición x_1 en un instante t_1 y en x_2 en el instante t_2 .

La variación de la posición de la partícula se denomina desplazamiento.

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

Se define la velocidad media de la partícula v_m en el intervalo de tiempo $[t_1, t_2]$ por

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Consideremos por ejemplo el movimiento definido por la tabla 2 y graficado en la figura 3. Del mismo resulta la siguiente tabla de velocidades medias

| Intervalos | v_m |
|-------------|--------|
| [0 s.,4 s.] | 3 m/s |
| [4 s.,6 s.] | 2 m/s |
| [6 s.,8 s.] | -4 m/s |

Tabla 3

y el gráfico

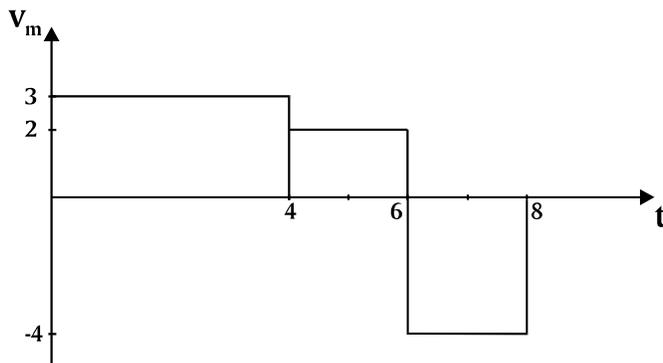


FIG. 5

El desplazamiento y la velocidad pueden ser positivos o negativos, un valor positivo indica un desplazamiento en el sentido del eje de coordenadas y uno negativo en el sentido

opuesto. Obsérvese que la velocidad media se puede leer directamente del gráfico del movimiento (fig. 3) calculando la pendiente de la recta que une dos puntos sucesivos en el movimiento.

Si se tiene una descripción del movimiento más detallada que incluya las posiciones para instantes intermedios de tiempo, se podrá construir una tabla de velocidades donde cada velocidad media correspondería a intervalos más pequeños. En el límite tendremos una descripción completa $x(t)$ y una velocidad asociada al instante t

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

La velocidad instantánea $v(t)$ es, por consiguiente, la derivada de la posición. Gráficamente estará dada por la pendiente de la curva $x(t)$ en el instante t .

Pasemos ahora al cálculo de la aceleración, concepto fundamental que está relacionado directamente con las fuerzas que actúan sobre la partícula, como veremos en capítulos subsiguientes.

Cuando la velocidad instantánea de una partícula esté variando con el tiempo, se dice que la partícula se está acelerando. La aceleración media producida en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$ se define como el cociente

$$a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

donde Δv es la variación de la velocidad instantánea en dicho intervalo. La aceleración instantánea es el límite de la aceleración media cuando el intervalo tiende a cero

$$a(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

Como la velocidad es a su vez la derivada de la posición respecto del tiempo, la aceleración resulta ser la derivada segunda de la posición respecto del tiempo.

Como habíamos señalado al comienzo, una vez determinada la posición en función del tiempo se posee toda la información relevante para la evaluación de cualquier otra magnitud cinemática.

Usualmente el problema más interesante es el problema inverso: dada la aceleración instantánea $a(t)$, determinar la posición de la partícula en función del tiempo $x(t)$. En efecto la aceleración es la magnitud que aparece en la ecuación de Newton y por lo tanto cuando las fuerzas dependen explícitamente del tiempo, se puede determinar directamente. Para calcular la posición

debemos invertir el proceso anterior pasando de la aceleración a la velocidad y de ésta a la posición.

Obviamente dada $a(t)$ la velocidad será una función tal que su derivada es igual a la aceleración: $v(t)$ será por lo tanto una primitiva de $a(t)$.

$$v(t) = A(t) + C, \quad \frac{dA(t)}{dt} = a(t).$$

Por consiguiente dada la aceleración, la función velocidad queda determinada a menos de una constante. En otras palabras, la aceleración no tiene información suficiente para determinar a la velocidad en forma única. Sin embargo veremos que basta conocer la velocidad en cualquier instante de tiempo para eliminar toda ambigüedad en la función $v(t)$. Supongamos que en $t = t_0$ la velocidad es v_0

$$v(t_0) = v_0 = A(t_0) + C$$

entonces

$$C = -A(t_0) + v_0$$

y

$$v(t) = v_0 + A(t) - A(t_0)$$

lo que determina completamente a $v(t)$. Recordando el Teorema Fundamental del Cálculo Integral resulta

$$A(t) - A(t_0) = \int_{t_0}^t a(t) dt$$

y por lo tanto

$$v = v_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt$$

Ejemplo:

Sea $a(t) = 2t \text{ m/s}^2$. Determinar $v(t)$ sabiendo que en $t_0 = 2 \text{ s}$ la velocidad vale $v_0 = -3 \text{ m/s}$.

$$v(t) = t^2 + C$$

$$-3 = 4 + C$$

$$v(t) = (t^2 - 7) \text{ m/s}.$$

Una vez que ha sido determinado $v(t)$, el problema de calcular $x(t)$ se resuelve en forma totalmente análoga

$$x(t) = V(t) + C', \quad \frac{dV}{dt} = v(t)$$

donde la constante C' se determina a partir de la posición de la partícula en algún instante t_0

$$x(t_0) = x_0 = V(t_0) + C'$$

y

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt.$$

Podemos concluir por lo tanto que la aceleración instantánea permite reconstruir la ley horaria $x(t)$ a menos de 2 constantes.

Gráficamente, dada la curva de velocidades, el desplazamiento producido en el intervalo $[t_0, t_1]$

$$\Delta x = x(t_1) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$$

es igual al área encerrada bajo la curva de velocidades.

Análogamente, el área encerrada bajo la curva de aceleraciones $a(t)$ es igual a la variación total de velocidad a lo largo del intervalo de tiempo considerado.

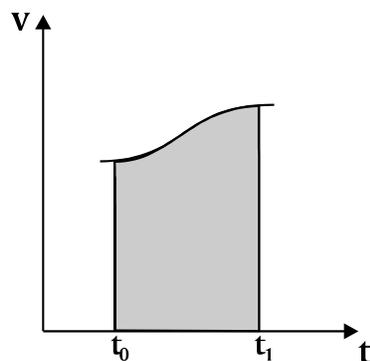


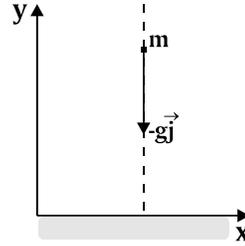
FIG. 6

Concluiremos esta sección considerando el ejemplo del movimiento con aceleración constante, supongamos conocida la velocidad y la posición en $t_0 = 0$.

$$a(t) = a$$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t) dt = v_0 + at$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + at) dt = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$$



Un caso particular importante de este tipo de movimientos es la caída libre de una partícula en presencia del campo gravitacional en las proximidades de la superficie terrestre. Si orientamos el eje de coordenadas según la vertical ascendente y nos limitamos al estudio de la caída vertical de una partícula, se cumple: $a = -g$, donde g representa el valor de la aceleración de la gravedad que es aproximadamente igual a $9,8 \text{ m/s}^2$.

I-3. Cinemática en 3 dimensiones.

I-3a. Movimiento general de una partícula en 3 dimensiones

En el caso unidimensional era necesario para describir el movimiento en forma única fijar un origen y una orientación de la recta. En el caso general, la posición de una partícula en un instante de tiempo t_0 se describirá por un vector $\vec{r}(t_0)$ que va del origen de coordenadas al punto que ocupa la partícula en dicho instante.

Deseamos asignar al vector posición un conjunto de medidas que lo caracterizan únicamente. Una forma sencilla de conseguir este objetivo es definiendo un sistema de ejes cartesianos rectangulares Oxyz.

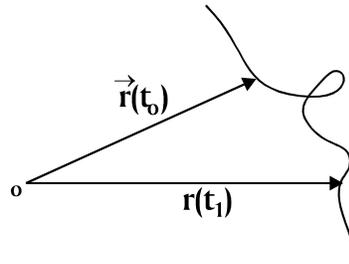


FIG. 8

Sean $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ los vectores de la base *ortonormal directa*¹ asociada a dichos ejes. Es decir que se verifica que:

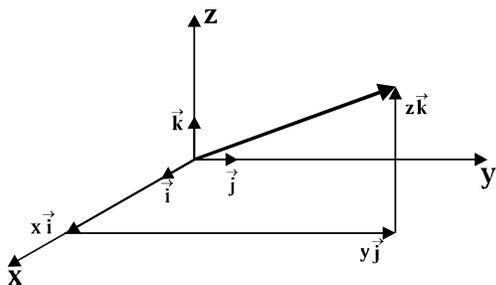
- La base es normal, por lo que está formada por versores: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$.
- Son ortogonales entre sí: $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$.
- Y la base es directa porque: $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$.

El vector posición puede describirse por sus componentes en dicha base, que de acuerdo a la regla de suma vectorial cumplirá:

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

Analizando el problema en forma totalmente análoga al caso unidimensional concluiremos que una descripción completa del movimiento estará dada por su ley horaria

¹ - Por algunos detalles adicionales ver la Sección 0.3.b.ii en el *Capítulo 0 – Introducción y Conceptos Preliminares*.



$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

Los valores específicos de las componentes (x, y, z) de la posición de una partícula dependerán obviamente del sistema de referencia elegido. No existe ningún criterio absoluto para preferir un sistema frente a otro, la elección es materia de gusto o más bien conveniencia. Dice Newton en los *Principia*: "Pero a causa de que las partes del espacio no pueden ser vistas o distinguidas entre sí por

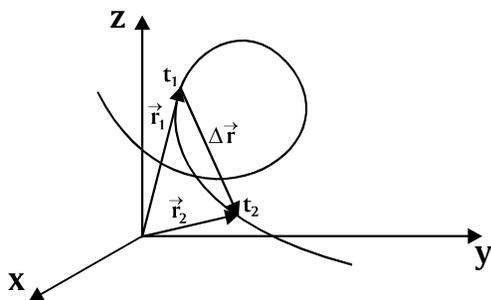
nuestros sentidos, utilizamos en su lugar medidas sensibles de él ... y así en vez de posiciones y movimientos absolutos, los utilizamos relativos".

FIG. 9

I-3b. Desplazamiento, velocidad y aceleración

Estamos ahora en condiciones de introducir los conceptos de desplazamiento, velocidad y aceleración en el caso de un movimiento general de 3 dimensiones.

I-3b.i) Desplazamiento y Velocidad.



El desplazamiento sufrido por la partícula en el intervalo $[t_1, t_2]$ es el vector asociado al segmento orientado que va del punto ocupado por la partícula en t_1 al punto ocupado en t_2

Obviamente

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$$

Se define la velocidad media de la partícula en el intervalo (t_1, t_2) como el cociente del vector desplazamiento $\Delta\vec{r}$ y el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$

FIG. 10

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

La velocidad media no es por lo general una magnitud interesante ya que el módulo del vector desplazamiento no es en general igual a la distancia recorrida sobre la curva. Sin embargo si consideramos intervalos de tiempo cada vez más pequeños, el módulo del desplazamiento se aproxima a la distancia recorrida por la partícula y su dirección tiende a coincidir con la dirección del vector tangente a la curva en el punto P_1 ocupado por la partícula en el tiempo t_1 .

Se define el vector velocidad instantánea como el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo Δt tiende a cero

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt},$$

dicho límite es la derivada del vector P respecto de t.

Para calcular las componentes de la velocidad consideremos

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Si pasamos de t a $t + \Delta t$

$$\vec{r}(t + \Delta t) = x(t + \Delta t)\vec{i} + y(t + \Delta t)\vec{j} + z(t + \Delta t)\vec{k}.$$

El desplazamiento que se produjo en el intervalo $[t, t + \Delta t]$ es

$$\begin{aligned} \Delta \vec{r} &= \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t) = \\ &= [x(t + \Delta t) - x(t)]\vec{i} + [y(t + \Delta t) - y(t)]\vec{j} + [z(t + \Delta t) - z(t)]\vec{k} = \\ &= \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k} \end{aligned}$$

y por consiguiente

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{k} \right] =$$

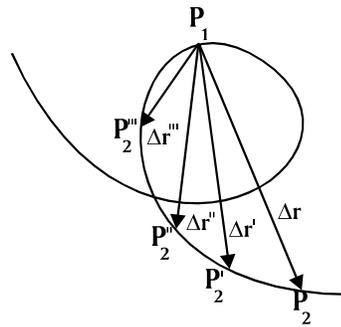


FIG. 11

$$= \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

que nos dice que las componentes de la derivada de un vector son las derivadas de las componentes.

I-3b.ii) Propiedades de la Derivada de un Vector.

La demostración anterior realizada para la derivada del vector posición vale para cualquier otro vector, y por consiguiente dado

$$\vec{A}(t) = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

su derivada es

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t} = \frac{dA_x}{dt} \vec{i} + \frac{dA_y}{dt} \vec{j} + \frac{dA_z}{dt} \vec{k} \quad 2$$

Usando la propiedad que acabamos de establecer, las siguientes expresiones, que nos dan las derivadas de operaciones con vectores, son de fácil demostración:

$$\frac{d}{dt} [\vec{A}(t) + \vec{B}(t)] = \frac{d\vec{A}}{dt}(t) + \frac{d\vec{B}}{dt}(t)$$

$$\frac{d(\vec{A} \cdot \vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d(\vec{A} \times \vec{B})}{dt} = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} [\lambda(t) \vec{A}(t)] = \frac{d\lambda(t)}{dt} \vec{A} + \lambda(t) \frac{d\vec{A}}{dt}$$

donde \vec{A}, \vec{B} son funciones vectoriales de t , y λ es una función escalar ordinaria de t .

² - Como veremos en breve, ésta es en realidad la derivada de un vector *respecto* al sistema de referencia elegido, dado por la base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. En este sistema de referencia esos vectores deben considerarse *fijos*, es decir, los mismos no dependen del tiempo, y sus derivadas son nulas. De lo contrario, habría que derivarlos como si fuesen ellos mismos vectores dependientes del tiempo.

Las propiedades anteriores nos resultarán de gran utilidad y de aplicación muy frecuente en el resto del curso.

I-3b.iii) Aceleración.

Pasemos ahora a la definición de la aceleración instantánea.

El vector aceleración instantánea se define como la derivada del vector velocidad instantánea respecto del tiempo

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

en componentes

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} \\ &= \frac{d^2x}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{k} \end{aligned}$$

I-3b.iv) Notación para la Derivada Temporal.

Como vemos, en la definición de las cantidades Cinemáticas Velocidad y Aceleración, el concepto de derivada respecto al tiempo es de suma importancia. Es por eso, y por lo frecuente del uso que les daremos, que introduciremos ahora una notación que nos simplificará mucho las expresiones que usaremos todo a lo largo de este curso. Utilizaremos *puntos* para indicar la derivación respecto al tiempo, escribiendo el punto encima de la función que debe ser derivada, y el número de puntos indica del número de veces que estamos derivando, o sea, si se trata de una derivada primera, segunda, etc. Así:

$$\frac{dA_x}{dt} = \dot{A}_x$$

$$\dot{\vec{A}} = \frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dA_x}{dt} \vec{i} + \frac{dA_y}{dt} \vec{j} + \frac{dA_z}{dt} \vec{k} = \dot{A}_x \vec{i} + \dot{A}_y \vec{j} + \dot{A}_z \vec{k}.$$

Aplicándolas a las cantidades de nuestro interés tenemos:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}$$

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \dot{v}_x\vec{i} + \dot{v}_y\vec{j} + \dot{v}_z\vec{k} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

Estas expresiones son particularmente útiles para el cálculo directo de la velocidad y la aceleración.

Ejemplo:

Sea

$$\vec{r} = R\cos\omega t\vec{i} + R\sin\omega t\vec{j}$$

donde R y ω son dos constantes, $\vec{r}(t)$ describe el movimiento de una partícula en el plano Oxy .

Como $x^2(t) + y^2(t) = R^2$ la partícula se mueve en una circunferencia. Entonces

$$\vec{v} = -R\omega\sin\omega t\vec{i} + R\omega\cos\omega t\vec{j}$$

y

$$\vec{a} = -\omega^2 R\cos\omega t\vec{i} - \omega^2 R\sin\omega t\vec{j}$$

Obsérvese que $|\vec{v}| = R\omega$ es constante y su dirección es tangente a la circunferencia, mientras que

$$\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$$

tiene la dirección del radio.

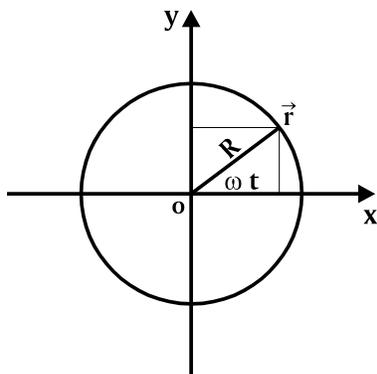


FIG. 12

I-3b.v: Trayectoria. Ley Horaria e Integración de Ecuaciones.

Al lugar geométrico de los puntos ocupados por una partícula en su evolución temporal lo llamamos trayectoria. En el ejemplo precedente la trayectoria de la partícula es una circunferencia de radio R . Siempre es posible determinar a partir de la ley horaria $\vec{r}(t)$ la trayectoria de la partícula. En efecto las componentes del vector posición $(x(t), y(t), z(t))$ son por sí mismos una descripción paramétrica de la curva seguida por la partícula.

Consideremos ahora el problema inverso. Dado el vector aceleración $\vec{a}(t)$ nos proponemos determinar el vector posición $\vec{r}(t)$ en función del tiempo, es decir, lo que hemos llamado *ley horaria*.

Sea

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$$

Las componentes de la velocidad $\vec{v}(t)$ deben ser tales que sus derivadas coincidan con las componentes respectivas de la aceleración. Es decir

$$\vec{v}(t) = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j} + v_z(t)\vec{k}$$

con

$$\frac{dv_x}{dt} = a_x, \quad \frac{dv_y}{dt} = a_y, \quad \frac{dv_z}{dt} = a_z$$

y por lo tanto

$$v_x(t) = A_x(t) + C_x, \quad v_y(t) = A_y(t) + C_y, \quad v_z(t) = A_z(t) + C_z$$

donde A_x, A_y, A_z son respectivamente primitivas de a_x, a_y, a_z ; y C_x, C_y, C_z , son tres constantes. En notación vectorial podemos escribir

$$\vec{v}(t) = \vec{A}(t) + \vec{C}$$

con:

$$\vec{A}(t) = \int \vec{a}(t) dt = \left(\int A_x(t) dt \right) \vec{i} + \left(\int A_y(t) dt \right) \vec{j} + \left(\int A_z(t) dt \right) \vec{k}$$

Si se conoce el valor de la velocidad en algún instante de tiempo t_0 , se puede determinar el vector constante \vec{C} :

$$\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0 = \vec{A}(t_0) + \vec{C}$$

por lo tanto:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{A}(t) - \vec{A}(t_0) = \vec{v}_0 + \int_{t_0}^t \vec{a}(t) dt$$

Por consiguiente, dada la aceleración en función del tiempo y la velocidad *inicial* $\vec{v}(t_0) = \vec{v}_0$, hemos podido determinar la velocidad en función del tiempo; es decir, la velocidad para cualquier instante t .

Un razonamiento análogo nos permite determinar la posición $\vec{r}(t)$, una vez conocida la velocidad $\vec{v}(t)$, y la posición inicial $\vec{r}_0 = \vec{r}(t_0)$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{V}(t) - \vec{V}(t_0) = \vec{r}_0 + \int_{t_0}^t \vec{v}(t) dt$$

donde $\vec{V}(t) = \int \vec{v}(t) dt$ es una primitiva de la velocidad.

Ejemplo: (caso con aceleración constante)

Sea

$$\vec{a} = a\vec{k}$$

con a constante, y donde hemos elegido los ejes de modo que el vector aceleración solo tenga componente según Oz. Se desea determinar la posición sabiendo que en $t = 0$,

$$\vec{v}_0 = v_{ox}\vec{i} + v_{oz}\vec{k}, \text{ y } \vec{r}_0 = z_0\vec{k} + x_0\vec{i}.$$

Una primitiva de la aceleración es

$$\vec{A}(t) = at\vec{k}$$

y por lo tanto

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + at\vec{k} = v_{ox}\vec{i} + (v_{oz} + at)\vec{k}$$

A su vez, una primitiva de la velocidad es

$$\vec{V}(t) = \vec{v}_0 t + \frac{at^2}{2} \vec{k}$$

y por consiguiente

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{at^2}{2} \vec{k}$$

$$\vec{r}(t) = (x_0 + v_{ox} t) \vec{i} + \left(z_0 + v_{oz} t + \frac{at^2}{2} \right) \vec{k}$$

Observamos que la partícula en su movimiento permanece en el plano Oxz.

I-3c. Movimiento de un proyectil

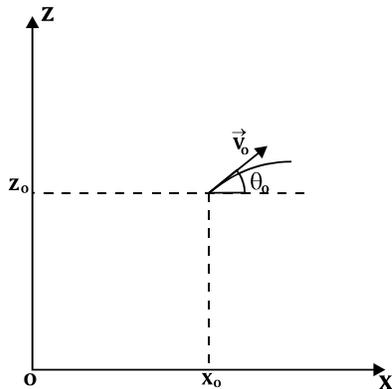


FIG. 14

Un ejemplo de movimiento con aceleración constante es el de un proyectil lanzado cerca de la superficie de la Tierra cuando puede despreciarse el rozamiento del aire. En ese caso, el proyectil posee una aceleración constante dirigida verticalmente hacia abajo. Si escogemos el eje Oz vertical y con su sentido positivo hacia arriba, el eje Ox horizontal en el sentido de la componente horizontal de la velocidad cumplirá:

$$\vec{a} = -g \vec{k}$$

$$\vec{v} = v_0 \cos \theta_0 \vec{i} + (v_0 \sin \theta_0 - gt) \vec{k}$$

$$\vec{r} = (x_0 + v_0 \cos \theta_0 t) \vec{i} + \left(z_0 + v_0 \sin \theta_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \right) \vec{k}$$

La trayectoria del proyectil es una parábola con concavidad negativa. Para probarlo, calculemos z en función de x .

$$t = \frac{x - x_0}{v_{ox}}$$

$$z = z_0 + \frac{v_{oz}}{v_{ox}}(x - x_0) - \frac{g}{2v_{ox}^2}(x - x_0)^2$$

Supongamos que el proyectil se lanza desde un punto de la superficie terrestre que hacemos coincidir con el origen de coordenadas. En ese caso la trayectoria del proyectil estará dada por:

$$z = \frac{v_{oz}}{v_{ox}}x - \frac{g}{2v_{ox}^2}x^2.$$

El alcance D del proyectil estará dado por la intersección de la trayectoria con la superficie terrestre. En otras palabras, será el valor de x para el cual z vuelve a anularse.

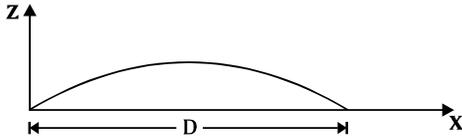


FIG. 14

$$D = \frac{2v_{ox}v_{oz}}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{g}$$

Como el máximo valor de $\sin 2\theta_0$ es 1 para $2\theta_0 = 90^\circ$ o sea $\theta_0 = 45^\circ$, el alcance máximo se obtiene para dicho ángulo y vale $\frac{v_0^2}{g}$.

Conviene recordar que para obtener este resultado, hemos despreciado una serie de fenómenos que intervienen en el movimiento real de proyectiles:

- 1) No hemos tomado en cuenta la resistencia del aire, que ejerce una fuerza opuesta al movimiento, dependiente de la velocidad y de la densidad del aire.
- 2) Hemos ignorado las variaciones de la gravedad con la altura, debidas a la dependencia de la fuerza de gravitación del cuadrado de la distancia al centro de la Tierra.
- 3) Hemos ignorado el movimiento de la Tierra que hace que la trayectoria se desvíe levemente del plano Oxz , debido a las fuerzas de Coriolis que analizaremos más adelante.

Esta situación es típica de toda descripción física de un fenómeno: uno modela el fenómeno teniendo en cuenta únicamente los elementos que parecen ser más relevantes y si desea ganar en precisión se incluyen nuevos factores en el modelo. El orden en que debemos incluir cada uno de los efectos dependerá de la importancia relativa que cada uno tenga, y la introducción sucesiva de los mismos nos irá dando resultados más precisión. Hasta donde conviene complicar el modelo dependerá de con cuanto error queramos estimar el resultado.

Ejercicio:

Discuta, *a priori*³, la importancia relativa de los factores antes mencionados, y en qué orden deberían ser introducidos en un modelo según estemos describiendo el movimiento de los siguientes proyectiles, y en qué casos no tendría sentido introducir alguno de los efectos:

- 1) Un proyectil o cohete lanzado en dirección vertical intentando quedar en órbita.
- 2) Una pelota de papel que es lanzada desde la ventana de un edificio.
- 3) Un misil intercontinental que es lanzado en forma rasante a la superficie terrestre.
- 4) Una piedra lunar que un astronauta lanza a otro mientras exploran la superficie de la Luna

I-3d. Sistemas de coordenadas

Aunque el método más simple para localizar una partícula en el espacio es darse las componentes cartesianas del vector posición, existen muchos problemas en que resulta conveniente trabajar con sistemas de coordenadas no cartesianas. Estudiaremos algunos de los sistemas de coordenadas más usados, evaluando en cada caso las variables cinemáticas, posición, velocidad y aceleración.

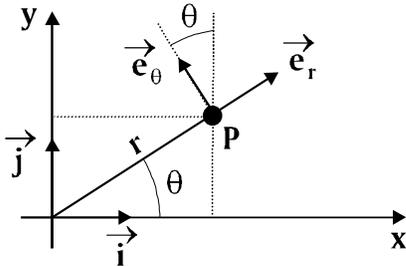
I-3d.i) Coordenadas polares planas.

³ - Es decir, sin intentar modelar matemáticamente los mismos. La resolución en forma exacta de uno u otro problema sería un interesante ejercicio para plantearse en el próximo capítulo.

Consideremos una partícula obligada a moverse en un plano. Sea Oxy dicho plano, las componentes cartesianas de la posición, velocidad y aceleración se obtienen imponiendo la condición $z = 0$.

Por ejemplo:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$$



Las coordenadas polares r , θ están relacionadas con x , y por las siguientes ecuaciones

$$x = r \cos \theta \quad y = r \operatorname{sen} \theta$$

ó

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \theta = \operatorname{Ar} \operatorname{tg} \frac{y}{x}$$

Al vector unitario en la dirección definida al incrementar r dejando θ fijo, le llamaremos

\vec{e}_r y al vector unitario de la dirección definida al incrementar θ dejando r fijo, le llamaremos \vec{e}_θ . Dichos vectores se pueden expresar en la base cartesiana por:

$$\vec{e}_r = \cos \theta \vec{i} + \operatorname{sen} \theta \vec{j}$$

$$\vec{e}_\theta = -\operatorname{sen} \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j}$$

Obsérvese que la dirección de estos vectores cambia con θ , en particular

$$\frac{d\vec{e}_r}{d\theta} = -\operatorname{sen} \theta \vec{i} + \cos \theta \vec{j} = \vec{e}_\theta$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\cos \theta \vec{i} - \operatorname{sen} \theta \vec{j} = -\vec{e}_r$$

En coordenadas polares, el vector posición del punto P está dado por

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

Para describir el movimiento de una partícula en coordenadas polares habrá que dar $r(t)$ y $\theta(t)$ lo que permite determinar

$$\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r(\theta(t))$$

El vector velocidad resulta ser

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta.$$

Por consiguiente la velocidad tendrá en general, componentes según \vec{e}_r y \vec{e}_θ dadas por $v_r = \dot{r}$, $v_\theta = r\dot{\theta}$

El vector aceleración es

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{d\vec{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

y por lo tanto sus componentes según \vec{e}_r y \vec{e}_θ son

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

Ejemplo:

Sin duda la aplicación más simple de estas coordenadas es al estudio del movimiento circular.

En ese caso $r(t) = R$ y por consiguiente $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$. La velocidad está dirigida según la tangente a la circunferencia. Por otra parte:

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$$

El término $R\dot{\theta}^2$ se denomina aceleración centrípeta y $R\ddot{\theta}$ la aceleración tangencial.

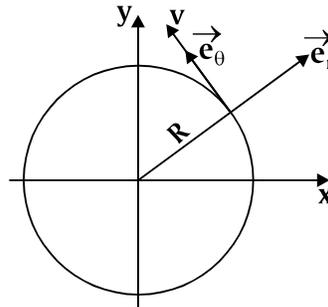


FIG. 16

La cantidad $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ se denomina la velocidad angular, se mide en radianes por segundo (rad/s) o simplemente, s^{-1} .

Cuando la velocidad angular es *constante* $\omega = \omega_0$, se dice que el movimiento es circular *uniforme*:

$$r(t) = R, \quad \dot{\theta} = \omega_0$$

La velocidad $\vec{v} = R\omega\vec{e}_\theta$ tiene módulo constante y la aceleración $\vec{a} = -R\omega_0^2\vec{e}_r$ sólo tiene componente centrípeta ya que $\dot{\omega} = \ddot{\theta} = 0$.

La aceleración centrípeta se debe al cambio de dirección del vector velocidad en el tiempo.

El movimiento circular uniforme es un ejemplo de movimiento periódico, la partícula pasa por cada punto de la circunferencia a intervalos iguales de tiempo.

En efecto $\dot{\theta} = \omega$ o sea $\theta = \omega t + C$.

Si en $t = 0$, $\theta = \theta_0$, resulta que $C = \theta_0$ y $\theta(t) = \omega t + \theta_0$.

El período T es el tiempo requerido para dar una vuelta completa, es decir

$$\theta(t+T) = \theta(t) + 2\pi, \text{ o sea}$$

$$\omega(t+T) = \omega t + 2\pi$$

y

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La frecuencia ν es el número de vueltas que da la partícula en una cantidad de tiempo

$$\nu = \frac{1}{T}$$

Cuando el período se expresa en segundos, la frecuencia debe expresarse en s^{-1} , también llamados Hertz (Hz).

La velocidad angular, el período y la frecuencia están relacionados por $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$.

I-3d.ii) Coordenadas cilíndricas.

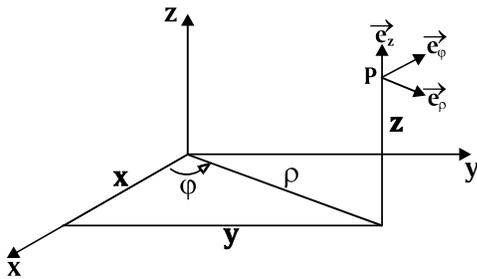


FIG. 17

Las coordenadas cilíndricas (ρ, φ, z) están definidas por las ecuaciones:

$$x = \rho \cos \varphi,$$

$$y = \rho \sin \varphi,$$

$$z = z,$$

o a la inversa

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctg \frac{y}{x}$$

$$z = z,$$

Como en el caso de las coordenadas polares planas definimos \vec{e}_ρ incrementando ρ y dejando z y φ fijos; \vec{e}_φ incrementando φ y dejando ρ y z fijos; \vec{e}_z incrementando z y dejando ρ y φ fijos. Los vectores \vec{e}_ρ , \vec{e}_φ , \vec{e}_z forman una base ortonormal directa. Sus componentes cartesianas son:

$$\vec{e}_\rho = \cos \varphi \vec{i} + \sin \varphi \vec{j}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{i} + \cos \varphi \vec{j}$$

$$\vec{e}_z = \vec{k}$$

El vector posición de un punto P en coordenadas cilíndricas se expresa

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$$

El movimiento queda determinado al darse $\rho(t)$, $\varphi(t)$ y $z(t)$.

En particular la velocidad

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho \frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi}\dot{\varphi} + \dot{z}\vec{e}_z \\ &= \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z\end{aligned}$$

y la aceleración

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho} \frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi}\dot{\varphi} + \dot{\rho}\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \rho\dot{\varphi}^2 \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi} + \ddot{z}\vec{e}_z \\ &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z\end{aligned}$$

Cuando el movimiento está restringido al plano $z = 0$ la presente descripción coincide exactamente con la obtenida en coordenadas polares planas.

Por otra parte, si la partícula se mueve sobre la superficie de un cilindro de radio R .

$$\begin{aligned}\rho(t) &= R \\ \vec{v} &= R\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z \\ \vec{a} &= -R\dot{\varphi}^2\vec{e}_\rho + R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z\end{aligned}$$

I-3d.iii) Coordenadas polares esféricas

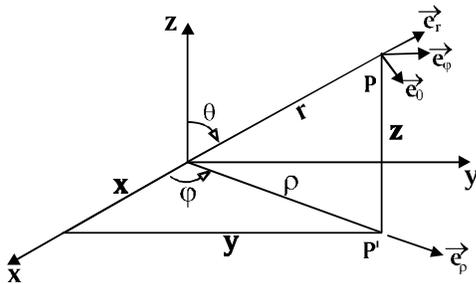


FIG. 18

Las coordenadas polares esféricas (r, θ, φ) están definidas por las siguientes ecuaciones

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\varphi$$

$$y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi$$

$$z = r \cos\theta$$

Las coordenadas x e y se obtienen observando que la proyección de OP sobre el plano Oxy es $OP' = r \operatorname{sen}\theta$.

Los vectores unitarios $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ están definidos, como en los casos anteriores, incrementando respectivamente r , θ y φ . Esa tríada así ordenada forma una base ortonormal directa⁴. Sus expresiones en coordenadas cartesianas serán:

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \text{sen}\theta\text{cos}\varphi\vec{i} + \text{sen}\theta\text{sen}\varphi\vec{j} + \text{cos}\theta\vec{k} \\ \vec{e}_\theta &= \text{cos}\theta\text{cos}\varphi\vec{i} + \text{cos}\theta\text{sen}\varphi\vec{j} - \text{sen}\theta\vec{k} \\ \vec{e}_\varphi &= -\text{sen}\varphi\vec{i} + \text{cos}\varphi\vec{j}\end{aligned}$$

Se pueden obtener estas expresiones proyectando los vectores $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ y \vec{e}_φ sobre los ejes cartesianos a partir de la figura 18; haciendo uso del vector auxiliar \vec{e}_ρ de coordenadas esféricas, observando que:

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \text{sen}\theta\vec{e}_\rho + \text{cos}\theta\vec{k} \\ \vec{e}_\theta &= \text{cos}\theta\vec{e}_\rho - \text{sen}\theta\vec{k}\end{aligned}$$

y usando las expresiones de coordenadas cilíndricas.

Sin embargo existe un método sistemático para obtener esta descomposición en cualquier sistema de coordenadas. Se comienza expresando el vector posición en la base cartesiana.

$$\vec{r} = r\text{sen}\theta\text{cos}\varphi\vec{i} + r\text{sen}\theta\text{sen}\varphi\vec{j} + r\text{cos}\theta\vec{k}.$$

Los vectores unitarios se obtienen derivando \vec{r} respecto a la coordenada que es incrementada y luego normalizando el resultado. Es decir

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = \text{sen}\theta\text{cos}\varphi\vec{i} + \text{sen}\theta\text{sen}\varphi\vec{j} + \text{cos}\theta\vec{k}.$$

Como $\left| \frac{\partial\vec{r}}{\partial r} \right| = 1$, entonces

⁴ - Es importante acotar que para que esto sea así, el ángulo θ debe estar orientado como en la Figura, de manera que barremos todo el espacio cuando θ va de 0 a π , asumiendo que φ va de 0 a 2π . Es usual definir θ de forma que se mida a partir del plano Oxy, y en sentido contrario al de la Figura. En este θ varía de $-\pi/2$ a $\pi/2$ y \vec{e}_θ queda orientado en sentido contrario, por lo que la terna $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ es ortonormal *indirecta*, y debemos intercambiar \vec{e}_θ con $-\vec{e}_\theta$ para que se torne *directa*.

$$\vec{e}_r = \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \bigg/ \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} \right| = \text{sen}\theta \cos\varphi \vec{i} + \text{sen}\theta \text{sen}\varphi \vec{j} + \cos\theta \vec{k}.$$

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = r \cos\theta \cos\varphi \vec{i} + r \cos\theta \text{sen}\varphi \vec{j} - r \text{sen}\theta \vec{k}$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} \right| = r, \text{ entonces}$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta} = \cos\theta \cos\varphi \vec{i} + \cos\theta \text{sen}\varphi \vec{j} - \text{sen}\theta \vec{k}$$

Finalmente

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} = -r \text{sen}\theta \text{sen}\varphi \vec{i} + r \text{sen}\theta \cos\varphi \vec{j}$$

$$\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right| = r \text{sen}\theta, \text{ entonces}$$

$$\vec{e}_\varphi = -\text{sen}\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j}$$

Para calcular la velocidad y la aceleración de una partícula es necesario tomar en cuenta que los vectores unitarios varían con el tiempo y por consiguiente nos resultará útil evaluar.

$$\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \theta} = \vec{e}_\theta \qquad \frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi \text{sen}\theta$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \theta} = -\vec{e}_r \qquad \frac{\partial \vec{e}_\theta}{\partial \varphi} = \vec{e}_\varphi \cos\theta$$

$$\frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \theta} = 0 \qquad \frac{\partial \vec{e}_\varphi}{\partial \varphi} = -\vec{e}_r \text{sen}\theta - \vec{e}_\theta \cos\theta$$

Tomando en cuenta que el vector posición se expresa

$$\vec{r} = r \vec{e}_r(\theta, \varphi)$$

y que r , θ , φ son funciones del tiempo, resulta que

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}\vec{e}_r + r\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}\dot{\theta} + r\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi}\dot{\varphi} \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\text{sen}\theta\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

y que

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}\dot{\theta} + \dot{r}\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi}\dot{\varphi} \\ &+ (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta}\dot{\theta} + r\dot{\theta}\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\varphi}\dot{\varphi} \\ &+ (\dot{r}\dot{\varphi}\text{sen}\theta + r\ddot{\varphi}\text{sen}\theta + r\dot{\varphi}\dot{\theta}\text{cos}\theta)\vec{e}_\varphi + r\dot{\varphi}\text{sen}\theta\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\theta}\dot{\theta} \\ &+ r\dot{\varphi}\text{sen}\theta\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi}\dot{\varphi}\end{aligned}$$

Sustituyendo las derivadas de los vectores unitarios obtenemos

$$\begin{aligned}\vec{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\text{sen}^2\theta)\vec{e}_r + \\ &+ (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\text{sen}\theta\text{cos}\theta)\vec{e}_\theta + \\ &+ (r\ddot{\varphi}\text{sen}\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\text{sen}\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\text{cos}\theta)\vec{e}_\varphi.\end{aligned}$$

Cuando el movimiento está restringido al plano Oxy se cumple

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$$

y se recuperan una vez más las expresiones de la velocidad y la aceleración en coordenadas polares planas.

I-3d.iv: Coordenadas Curvilíneas o Intrínsecas

Otro sistema de coordenadas que nos será de gran utilidad durante el curso, será el sistema de coordenadas intrínsecas. El mismo describe el movimiento de una partícula a través de una única coordenada, llamada *abscisa curvilínea* y que la notaremos con la letra s ; y una base ortonormal directa denominada el triedro de *Frenet*, formada por los versores *tangencial* \vec{t} ,

normal \vec{n} y binormal \vec{b} . Esta descripción es altamente conveniente cuando, por alguna razón, se conoce *a priori*, la trayectoria específica que sigue la partícula en estudio.

Efectivamente, en muchos problemas a estudiar, la partícula estará obligada a moverse sobre una curva predeterminada, sea porque se trata de una argolla andando por un alambre con una forma dada, un carro en una montaña rusa, o un producto manufacturado moviéndose sobre una cinta transportadora. En uno u otro caso existe cierta imposición al movimiento del cuerpo en estudio que es lo que llamaremos *vínculos*.

A continuación pasaremos a definir cada uno de los elementos antes mencionados y decir cómo quedan escritas las cantidades cinemática velocidad y aceleración, en estas coordenadas.

Abscisa Curvilínea.

Como dijimos anteriormente, la *ley horaria* $\vec{r} = \vec{r}(t)$, que en coordenadas cartesianas es equivalente a dar tres ecuaciones escalares $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, nos da la *trayectoria* de la partícula. Efectivamente, estas ecuaciones dan la posición de una partícula en función del tiempo y a medida que varía el tiempo irán describiendo una curva en el espacio. En forma genérica, no es necesario que t sea el tiempo, sino que la curva puede ser descrita en función de un parámetro arbitrario ξ ; es decir, en coordenadas cartesianas una curva viene determinada dando tres funciones escalar $x = x(\xi)$, $y = y(\xi)$, $z = z(\xi)$. Un parámetro usual conveniente es la longitud de la curva medida a partir de algún origen O. Esta es la coordenada intrínseca s . La misma está definida considerando un incremento diferencial en el parámetro ξ que describa la curva, de forma que:

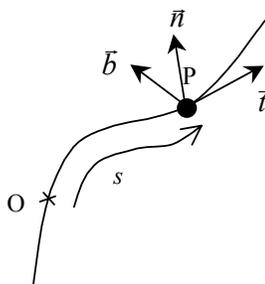


FIG. 19

$$d\vec{r} = (dx)\vec{i} + (dy)\vec{j} + (dz)\vec{k} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \vec{j} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \vec{k} \right) d\xi$$

La distancia recorrida por el punto (diferencial de longitud de arco) es:

$$ds = |d\vec{r}| = \sqrt{(d\vec{r})^2} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2} d\xi \quad 5$$

⁵ - Hay un pequeño detalle de que s puede crecer en el mismo sentido de ξ o en sentido inverso. En el caso que orientemos s en sentido deberíamos agregar un signo de menos (-) antes de la raíz.

por lo que la distancia total, o longitud de arco, recorrida desde el punto O (siendo que este corresponde a la posición en la curva en que el parámetro $\xi = \xi_0$) es:

$$s(\xi) = \int_{\xi_0}^{\xi} d\xi \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2}$$

En el caso particular que tengamos las leyes horarias $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, entonces tendremos que, si la partícula pasa por el punto O en el instante t_0 .

$$s(t) = \int_{t_0}^t dt \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \int_{t_0}^t dt v(t)$$

donde $v(t) = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ es el módulo de la velocidad de la partícula.

De esta manera podemos ubicar la partícula en su movimiento sobre la curva, ya que ella se encontrará a una distancia $s(t)$ del punto O.

Observemos que con la definición anterior $s(t)$, siempre *crece* con el tiempo; o sea, así $s(t)$ es la distancia recorrida por la partícula sobre la curva. Sin embargo, en algunas aplicaciones, puede ser interesante considerar a la coordenada curvilínea s como una distancia con signo, medida sobre la curva que recorre la partícula, desde un punto O de la curva. El signo tendría relevancia para decirnos si la partícula se encuentra a un lado u otro de O. Para tener en cuenta esto, en la definición anterior de s en función del tiempo, alcanzaría que estemos atentos a cuándo la velocidad cambia de signo⁶; y cuando lo haga, cambiemos el signo de la raíz, ya que el movimiento sería en sentido contrario. Es decir, consideraríamos el módulo de la velocidad $v(t)$ con signo: $v(t) = \pm \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$ según la partícula se mueva en un sentido u otro sobre la

⁶ - Para tener en cuenta esto debemos estudiar los cruces por cero de la velocidad, ya que nosotros consideraremos solo funciones continuas de velocidad y posición. No consideraremos casos en que la velocidad o la posición presenten discontinuidades. Cuando la velocidad cambia bruscamente y tiene una discontinuidad se dice que el movimiento es impulsivo, y no lo estudiaremos en este curso. Si la posición cambiase bruscamente de valor y presentase una discontinuidad, estaríamos en presencia de velocidad infinitas, que no son aceptables físicamente. Recordemos que para velocidades cercanas a la velocidad de la luz la Mecánica Newtoniana deja de ser conveniente para el estudio de los fenómenos involucrados en el problema.

curva.⁷ La conveniencia de una u otra definición vendrá dada por el problema particular en estudio.

Vector Tangente y Velocidad.

Ya dijimos en la sección I-3b, que a medida que el incremento de tiempo entre dos instantes se torna infinitesimal, el desplazamiento correspondiente tiende a ser tangente a la curva, como muestra la Figura 11. Así que podemos definir el siguiente vector que es tangente a la curva:

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}$$

Es fácil ver que, por la definición de coordenada curvilínea s , este vector tangente es un versor o vector unitario, ya que:

$$\vec{t}^2 = \left(\frac{d\vec{r}}{ds} \right)^2 = \frac{(d\vec{r})^2}{(ds)^2} = \frac{(ds)^2}{(ds)^2} = 1$$

Es inmediata la demostración de que la velocidad siempre está dirigida según la tangente:

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \vec{t}}$$

Observar que esto es coherente con que $\dot{s} = \frac{ds}{dt} = v(t)$ sea el módulo con signo de la velocidad. El signo dependerá de cómo orientemos el versor tangente \vec{t} .

Normal, Binormal y Aceleración.

Ahora observemos que este versor tangente, si bien siempre mantiene su módulo constante e igual a uno, cambia de dirección con el tiempo, a medida que la partícula va

⁷ - Esta discusión surge debido a que, para una descripción conveniente para una curva en el espacio en la forma $x = x(\xi)$, $y = y(\xi)$, $z = z(\xi)$, el parámetro ξ debe determinar unívocamente un punto sobre la curva. Mientras que en la descripción a través del tiempo t , la partícula puede pasar por el mismo punto para diferentes instantes.

recorriendo la curva (salvo que esta sea una recta, caso particular que no nos interesa estudiar por este método). Por lo tanto podemos intentar derivar respecto al tiempo la siguiente igualdad:

$$\vec{t}^2 = \vec{t} \cdot \vec{t} = 1$$

o sea:

$$(\vec{t}^2)^{\cdot} = \dot{\vec{t}} \cdot \vec{t} + \vec{t} \cdot \dot{\vec{t}} = 2\dot{\vec{t}} \cdot \vec{t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\vec{t}} \cdot \vec{t} = 0$$

Esta es una propiedad general de los versores que varían en el tiempo, su derivada respecto al tiempo es perpendicular al propio vector. En este caso en particular se cumplirá también que:

$$\dot{\vec{t}} = \frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{d\vec{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \dot{s} \frac{d\vec{t}}{ds}$$

por lo que como $\dot{\vec{t}}$ es paralelo a $\frac{d\vec{t}}{ds}$, y este vector es también perpendicular al vector tangente.

Definiremos un *versor* que tenga la dirección de este último, y, como es perpendicular a la tangente le llamaremos *versor normal*:

$$\vec{n} = \rho \frac{d\vec{t}}{ds}$$

siendo $\rho = \left| \frac{d\vec{t}}{ds} \right|^{-1}$ para que \vec{n} sea versor. A ρ se le llama *radio de curvatura* de la trayectoria, y

la dirección de \vec{n} la elegiremos de forma que ρ sea siempre positivo. Esto hará que por convención, \vec{n} esté dirigido hacia el *interior* de la curva, o sea, en la dirección en que ella se dobla. El radio de curvatura será mayor cuanto más chico el módulo de la derivada $\frac{d\vec{t}}{ds}$, es decir cuanto menor el cambio en la tangente respecto a la longitud de la curva, o sea, más *abierto* sea la curva. En el caso extremo de que $\frac{d\vec{t}}{ds} = 0$, el radio de curvatura ρ tenderá a infinito y la normal

no estará definida. Salvo en algún punto singular de poco interés para nosotros, esto solo ocurre en el caso de una recta, en la que obviamente todas las direcciones perpendiculares a la tangente pueden definirse como versores normales sin perder generalidad.

Finalmente, para determinar completamente el triedro de Frenet, definiremos otro versor, también normal a la curva pero al que llamaremos *binormal*, porque a partir de su definición, será perpendicular tanto a la tangente como a la dirección hacia la que se dobla la curva:

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n}$$

Y con este versor binormal, \vec{b} , la tríada $\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$ será una base ortonormal directa.

Finalmente, veremos como queda la aceleración de una partícula en este sistema de coordenadas:

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = (\dot{\vec{s}}\vec{t})^\bullet = \ddot{s}\vec{t} + \dot{s}\dot{\vec{t}} = \ddot{s}\vec{t} + \dot{s}\frac{d\vec{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = \ddot{s}\vec{t} + \dot{s}^2\frac{\vec{n}}{\rho}$$

o sea:

$$\boxed{\vec{a} = \ddot{s}\vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n}}$$

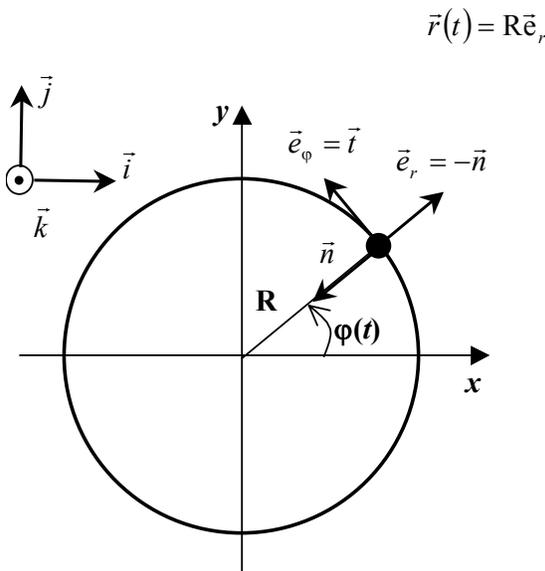
Como vimos antes, la expresión de velocidad de una partícula escrita en coordenadas intrínsecas, nos dice que la misma es tangente a la curva. Ahora vemos que su aceleración tiene una componente tangencial, que depende de la rapidez con que aumenta el módulo de la velocidad $\dot{s} = (\dot{s})^\bullet$, y otra componente según la normal, que es proporcional al módulo de la velocidad al cuadrado y al inverso del radio de curvatura ρ . La aceleración no tiene componente según la binormal.

Ejercicio:

Demostrar que en una curva plana cualquiera $x = x(\xi)$, $y = y(\xi)$, $z = 0$ contenida en el plano Oxy, la tangente y la normal están contenidas en dicho plano mientras que la binormal es perpendicular al mismo ($\vec{b} = \pm \vec{k}$).

Ejemplo:

Consideremos nuevamente el ejemplo del movimiento circular estudiado anteriormente. Como vimos, para el mismo se cumple que:



$$\vec{r}(t) = R\vec{e}_r$$

o sea, en coordenadas cilíndricas:

$$\left\{ \begin{array}{l} r(t) = R \\ \varphi(t) = \varphi(t) \\ z(t) = 0 \end{array} \right\}, \text{ que en cartesianas es:}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x(t) = R \cos(\varphi(t)) \\ y(t) = R \sen(\varphi(t)) \\ z(t) = 0 \end{array} \right\}.$$

Donde la velocidad es:

$$\vec{v} = -R\dot{\varphi}\sen(\varphi(t))\vec{i} + R\dot{\varphi}\cos(\varphi(t))\vec{j}$$

lo que vimos es:

$$\vec{v} = R\dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

FIG. 20

Queremos el triedro de Frenet y la coordenada curvilínea s en función de $\varphi(t)$. Tendremos que, asumiendo que $\varphi(t_0)=0$, y medimos s desde el punto $R\vec{i}$, debemos hacer:

$$s(t) = \int_{t_0}^t dt \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$$

donde \dot{x} e \dot{y} son las coordenadas cartesianas de la velocidad, que nos dan:

$$s(t) = \int_{t_0}^t dt R \sqrt{(\dot{\varphi} \cos(\varphi(t)))^2 + (\dot{\varphi} \operatorname{sen}(\varphi(t)))^2}$$

Si le damos a \dot{s} , que es el integrando de la ecuación anterior, el mismo signo que a $\dot{\varphi}$, de manera que s y φ crezcan en el mismo sentido:

$$s(t) = \int_{t_0}^t dt \dot{\varphi} R \sqrt{(\cos(\varphi(t)))^2 + (\operatorname{sen}(\varphi(t)))^2} = R \int_{t_0}^t dt \dot{\varphi} = R \int_{\varphi(t_0)}^{\varphi} d\varphi = R\varphi$$

resultado que ya es bien conocido de geometría que es que la longitud de arco de la circunferencia es el ángulo del mismo por el radio.

Luego, como ya sabemos:

$$\vec{v} = R\dot{\varphi} \vec{e}_\varphi = \dot{s} \vec{t}$$

por lo que también deducimos que $\vec{t} = \vec{e}_\varphi$.

Usando lo que ya sabemos de las coordenadas cilíndricas el *versor* normal vendrá determinada por:

$$\vec{n} = \rho \frac{d\vec{t}}{ds} = \rho \frac{d\vec{t}}{dt} \frac{dt}{ds} = \rho \dot{t} \frac{1}{\dot{s}} = \frac{\rho}{\dot{s}} \dot{\vec{e}}_\varphi = -\frac{\rho}{\dot{s}} \dot{\varphi} \vec{e}_r = -\frac{\rho}{R\dot{\varphi}} \dot{\varphi} \vec{e}_r = -\frac{\rho}{R} \vec{e}_r$$

de donde deducimos que:

$$\vec{n} = -\vec{e}_r \quad \rho = R.$$

Observar que el versor normal es según $-\vec{e}_r$ y no según \vec{e}_r porque debe ser *entrante* y no *saliente*, por aquello de que se dirige hacia donde la curva se *cierra*, para que el radio de curvatura así definido sea positivo.

Finalmente para tener el triedro de Frenet completo debemos hallar la *binormal*, que viene definida por:

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} = \vec{e}_\varphi \times (-\vec{e}_r) = \vec{e}_r \times \vec{e}_\varphi = \vec{k}$$

por lo que el triedro de Frenet es la base $\vec{e}_\varphi, -\vec{e}_r, \vec{k}$, y la aceleración se escribe como:

$$\vec{a} = \dot{s}\vec{t} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n} = R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{(R\dot{\varphi})^2}{R}(-\vec{e}_r) = R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi - R\dot{\varphi}^2\vec{e}_r,$$

o sea, el mismo resultado que teníamos para coordenadas polares.

I-4. Movimiento Relativo

"Así, supongamos el conjunto de piezas que permanecen sobre los cuadros de un tablero de ajedrez. Decimos que están en el mismo lugar, que no se han movido, aunque quizás el tablero haya sido movido, entretanto, de una habitación a otra."

Jhon Locke
Ensayos sobre el entendimiento humano.

I-4a Introducción.

En el numeral anterior observamos que resulta imposible determinar las posiciones absolutas de los objetos y sólo podemos medir distancias o intervalos entre puntos. Efectivamente, cada vez que nos referimos a la posición de un punto P , la expresamos en una determinado sistema de coordenadas a través de un vector posición: \vec{r}_P . Este vector da la posición *relativa* del punto respecto al origen O del sistema de coordenadas, lo que es claro si hacemos uso de la notación de un vector como diferencia entre dos puntos: $\vec{r}_P = P - O = \vec{r}_{PO}$ ⁸. El vector al que hacemos referencia nos dará la posición del punto P , si medimos el mismo a partir del origen de coordenadas O .

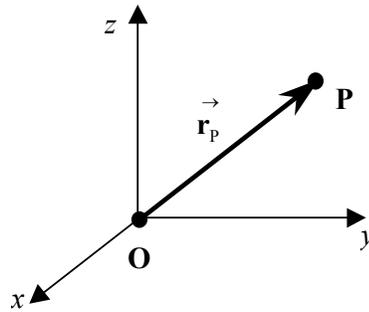


FIG. 21

Como veremos en las secciones siguientes, el movimiento del punto P no sería el mismo, si considerásemos que el punto O está fijo que si está en movimiento respecto a otro punto; o la descripción en coordenadas no sería la misma si la base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ está fija que si se está moviendo. Es más, anteriormente ya vimos diferentes sistemas de coordenadas, en algunos casos los versores que formaban la base de los mismos eran fijos, en otros eran móviles. Uno puede pensar entonces

⁸ - Ver Sección 0.4.a.ii en Capítulo 0.

que pensar en sistemas de coordenadas moviéndose entre sí surge naturalmente de nuestro estudio anterior de los sistemas de coordenadas. Esto lleva a un concepto más amplio que es el de *Sistema de Referencia*.⁹

Por esta razón el movimiento es un concepto *relativo* y depende siempre del *sistema de referencia* escogido. Como es posible escoger diferentes sistemas de referencia, es importante determinar como están relacionadas las descripciones hechas desde diferentes sistemas. Por ejemplo comparemos observaciones del movimiento de la Luna hechas desde dos sistemas, uno situado en el Sol, al que llamaremos sistema S, y otro situado en la Tierra, al que llamaremos T. El observador terrestre que usa el sistema T observará que la Luna sigue una trayectoria aproximadamente circular alrededor de la Tierra, mientras que vista desde el sistema S, la órbita de la Luna aparecerá como una línea ondulada muy próxima a la trayectoria elíptica de la Tierra. Resulta obvio que ambos movimientos están relacionados y que sería posible pasar de uno al otro si tomáramos en cuenta el movimiento de la Tierra en torno al Sol; o sea, el movimiento de T respecto de S. Como ya indicamos anteriormente la elección del sistema de referencia es cuestión de conveniencia. Se escoge el sistema de modo que la descripción del movimiento resulte más sencilla. El movimiento de la Luna por ejemplo se describirá más fácilmente respecto a la Tierra y el del Sol respecto al centro de la Galaxia.

I-4b Sistemas de referencia con movimiento de traslación relativa .

Consideremos dos sistemas de referencia $S = Oxyz$ y $S' = O'x'y'z'$ cuyos ejes tienen la misma orientación pero tales que el origen O' del segundo tiene un movimiento dado respecto de O del primero.

Nos interesa comparar las descripciones del movimiento de cierto objeto A vistas desde ambos sistemas. En el ejemplo anterior, A sería la Luna, S un sistema situado en el Sol y S' un sistema situado en la Tierra.

⁹ - La naturaleza e importancia de los sistemas de referencia quedará clara en el próximo Capítulo de Dinámica de la Partícula. Por ahora aclaremos que un sistema de referencia es algo más que simplemente dar un sistema de coordenadas, como lo haremos a lo largo de este Capítulo. Por ejemplo, en la Figura 22, si el punto O' no se moviese respecto a O , entonces el movimiento de cualquier partícula sería el mismo respecto a los sistemas S y S' . Ambos sistemas S y S' serían equivalentes desde este punto de vista, y pertenecerían al mismo sistema de referencia, aunque aún seguirían siendo diferentes como sistemas de coordenadas. El concepto de sistemas de referencia está asociado también al de movimiento de cuerpo rígido, que estudiaremos en la segunda parte del curso. Si quisiésemos una definición estricta de sistemas de referencia, por ahora podríamos decir que un sistema de referencia es una clase de equivalencia de todos los sistemas de coordenadas que no están en movimiento respecto a los demás sistemas de la clase.

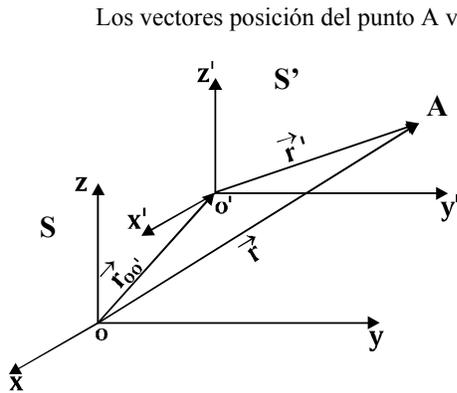


FIG. 22

Los vectores posición del punto A vistos desde O y O' están relacionados por

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_{oo'}(t) + \vec{r}'(t)$$

donde para simplificar la notación le hemos llamado \vec{r} al vector $\vec{r}_{OA} = A - O$ y \vec{r}' al vector $\vec{r}_{O'A} = A - O'$, pero mantenemos explícita la notación para el vector $\vec{r}_{OO'} = O - O'$, que es la posición del origen de coordenadas del sistema S' respecto al S.

Supondremos que el tiempo usado en ambos sistemas para describir el movimiento es el mismo. Este es un postulado básico de la Mecánica Newtoniana que implica, en otras palabras, que las mediciones del tiempo no dependen del movimiento del observador y que dos relojes situados en O y O' una vez sincronizados seguirán marcando lo mismo. Como ya hemos observado esto es cierto sólo si las velocidades involucradas en el problema son mucho menores que la de la luz.

La velocidad \vec{v} de A respecto al sistema S se define

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

y la velocidad de A respecto de S' es

$$\vec{v}' = \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'.$$

Hacemos notar que para ambos sistemas la base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ que determina los ejes de los sistemas, es la misma, y como hicimos anteriormente podemos considerarla fija respecto a los mismos.

Finalmente

$$\vec{v}_{oo'} = \frac{d\vec{r}_{oo'}}{dt} = \frac{dx_{oo'}}{dt}\vec{i} + \frac{dy_{oo'}}{dt}\vec{j} + \frac{dz_{oo'}}{dt}\vec{k}$$

es la velocidad del origen del sistema S' respecto de S.

Derivando respecto de t la relación entre los vectores de posición resulta

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_{oo'}(t) + \vec{v}'(t).$$

La velocidad de una partícula respecto del sistema S es igual a la velocidad respecto del sistema S' más la velocidad con que el sistema S' se mueve respecto de S ; que es precisamente la velocidad de su origen de coordenadas O' respecto del sistema S .

Derivando nuevamente esta expresión obtenemos una relación análoga para las aceleraciones

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}_{oo'}}{dt} + \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}_{oo'}(t) + \vec{a}'(t).$$

Por lo general se le suele llamar al sistema $S = Oxyz$ sistema *fijo*, al $S' = O'x'y'z'$ sistema *móvil*. A la velocidad \vec{v} de la partícula respecto al sistema llamado *fijo* se la denomina *velocidad absoluta*, o simplemente \vec{v}_A ; a la velocidad \vec{v}' respecto al sistema *móvil* se la llama *velocidad relativa*, o \vec{v}_R ; y a la velocidad del sistema *móvil* respecto del *fijo* $\vec{v}_{oo'}$, se la denomina *velocidad de transporte o de arrastre*, y se la suele notar como \vec{v}_T . Los mismos nombres se aplican a las aceleraciones respectivas. Las relaciones anteriores establecen entonces que: la velocidad (aceleración) absoluta es igual a la velocidad (aceleración) relativa más la velocidad (aceleración) de transporte.¹⁰

Un importante caso particular de la última relación obtenida ocurre cuando el sistema *móvil* se desplaza con velocidad constante respecto del *fijo*. En este caso

$$\frac{d\vec{v}_{oo'}}{dt} = 0$$

y

$$\vec{a}(t) = \vec{a}'(t).$$

La aceleración con respecto a sistemas de referencia con movimiento relativo de traslación uniforme es la misma

¹⁰ - Observemos que esta nomenclatura es poco adecuada, ya que *toda velocidad o aceleración es relativa a algún sistema* y no conviene por lo tanto hablar de velocidades o aceleraciones absolutas. Igual la utilizaremos por ser muy común. Hay que tener en cuenta que estos son solo nombres, y siempre debe especificarse bien respecto a qué sistemas las mismas están siendo medidas, o sea, cuál es el sistema *absoluto* y cuál el *relativo*.

Ejemplo.

Cuentan los cronistas que Cristóbal Colón descubrió tierra siguiendo el vuelo de ciertas aves marinas que regresaban a tierra al atardecer.

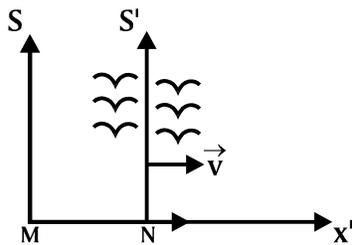


FIG. 23

Si suponemos que la nave se movía hacia el oeste con una velocidad de 15 km/h y que vistas desde las naves las aves se dirigían hacia el sur con una velocidad de 30 km/h. ¿ En qué dirección debió virar para encontrar tierra?.

El problema consiste en determinar la dirección que debe tener la velocidad del barco con relación al sistema M del mar.

Para encontrar tierra esta debe ser colineal con la velocidad de las aves respecto del mar (Sistema M).

La velocidad de las aves respecto de las naves es

$$\vec{v}' = 30\vec{j} \text{ km/h.}$$

La velocidad de la nave es

$$\vec{v}_{NM} = 15\vec{i} \text{ km/h.}$$

y por consiguiente la velocidad de las aves respecto al mar es

$$\vec{v} = 15\vec{i} + 30\vec{j} \text{ km/h.}$$

y por consiguiente la nave debe virar al sur un ángulo

$$\alpha = \text{Ar tg} \frac{30}{15} = \text{Ar tg} 2.$$

Obviamente Colón se las arregló para llegar a tierra sin conocer las reglas del movimiento relativo, y no existía en su época la Mecánica Newtoniana, pero no conviene seguir su ejemplo si se pretende aprobar este curso.

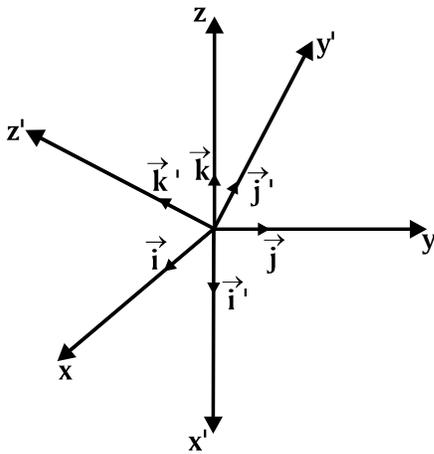
I-4c. Sistemas de referencia con movimiento relativo de rotación.

FIG. 24

Consideremos ahora dos sistemas de referencia $S = Oxyz$ y $S' = O'x'y'z'$, con origen de coordenadas común $O = O'$, cuyos ejes rotan uno respecto del otro. En otras palabras, la orientación de los ejes del sistema S' respecto de los de S va cambiando en el tiempo. Si introducimos los vectores ortonormales de las bases asociadas a cada sistema, y les llamamos $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ a los de S , e $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ a los de S' , el vector posición \vec{r} se puede expresar como:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

o bien

$$\vec{r} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}'.$$

En este caso, ya que O y O' coinciden, el vector posición es el mismo, o sea:

$$\vec{r} = \vec{r}'$$

sólo cambian sus componentes, porque en uno y otro sistemas de coordenadas lo expresamos en una base diferente.¹¹

I-4c.i) Derivada de un Vector Respecto a Sistemas de Referencia en Movimiento.

Obsérvese que expresiones análogas valen para las componentes de un vector cualquiera \vec{A} . En efecto según el sistema de referencia elegido

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{A} = A_x' \vec{i}' + A_y' \vec{j}' + A_z' \vec{k}'$$

Esta situación es típica de los sistemas en rotación relativa. En el caso anterior de sistemas en traslación, si bien cambiaban los vectores posición de una partícula, las componentes de un vector libre eran las mismas en ambos sistemas.

La derivada de cualquier vector estaba definida por

¹¹ - Por los detalles del concepto de un vector y su expresión en coordenadas, y de cómo deben de cambiar estas al cambiar de base, referirse a la Sección 0.3.b del Capítulo 0.

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{A}(t+\Delta t) - \vec{A}(t)}{\Delta t}.$$

Cuando los sistemas de coordenadas rotan uno respecto al otro nos encontramos con una dificultad.

Un vector puede estar fijo respecto a uno de los sistemas y rotar respecto del otro. Es decir que la forma en que cambian sus componentes depende del sistema de coordenadas. Por ejemplo, los sistemas de la base $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ están fijos respecto a S' , porque forman parte de dicho sistema, mientras que por la propia definición rotan en torno a S . Por consiguiente, la derivada de un vector respecto del tiempo depende del *sistema de referencia*, es decir, depende de la base de vectores que se considere como *fija*.

Definimos la derivada d/dt respecto al sistema $S = Oxyz$ por

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \dot{A}_x \vec{i} + \dot{A}_y \vec{j} + \dot{A}_z \vec{k}$$

y la derivada d'/dt respecto al sistema $S' = O'x'y'z'$ es

$$\frac{d'\vec{A}}{dt} = \dot{A}_x' \vec{i}' + \dot{A}_y' \vec{j}' + \dot{A}_z' \vec{k}'$$

Ambas derivadas se pueden relacionar recordando que el cambio de las componentes respecto a $Oxyz$ se debe a dos factores. En primer lugar cambian las componentes del vector respecto a $O'x'y'z'$ y en segundo lugar los vectores $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ se mueven respecto al sistema $Oxyz$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{A}}{dt} &= \frac{d(A_x' \vec{i}')}{dt} + \frac{d(A_y' \vec{j}')}{dt} + \frac{d(A_z' \vec{k}')}{dt} \\ \frac{d\vec{A}}{dt} &= \dot{A}_x' \vec{i}' + \dot{A}_y' \vec{j}' + \dot{A}_z' \vec{k}' + A_x' \frac{d\vec{i}'}{dt} + A_y' \frac{d\vec{j}'}{dt} + A_z' \frac{d\vec{k}'}{dt} \end{aligned}$$

A continuación veremos que siempre es posible calcular explícitamente las derivadas de la base móvil $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ en términos de un vector que caracteriza la rotación del sistema $O'x'y'z'$ respecto del $Oxyz$, llamado *velocidad angular*.

Velocidad Angular

Comencemos expresando las derivadas de los vectores $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ en la misma base móvil.

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = a_{11}\vec{i}' + a_{12}\vec{j}' + a_{13}\vec{k}'$$

$$\frac{d\vec{j}'}{dt} = a_{21}\vec{i}' + a_{22}\vec{j}' + a_{23}\vec{k}'$$

$$\frac{d\vec{k}'}{dt} = a_{31}\vec{i}' + a_{32}\vec{j}' + a_{33}\vec{k}'$$

Los vectores móviles $\vec{i}'(t), \vec{j}'(t), \vec{k}'(t)$ satisfacen en todo instante t las relaciones de ortonormalidad siguientes:

$$\vec{i}' \cdot \vec{i}' = 1 \quad \vec{j}' \cdot \vec{j}' = 1 \quad \vec{k}' \cdot \vec{k}' = 1$$

$$\vec{i}' \cdot \vec{j}' = 0 \quad \vec{j}' \cdot \vec{k}' = 0 \quad \vec{k}' \cdot \vec{i}' = 0$$

por lo tanto derivando la primera de estas ecuaciones tenemos que

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} \cdot \vec{i}' + \vec{i}' \cdot \frac{d\vec{i}'}{dt} = 0$$

$$\text{es decir} \quad \frac{d\vec{i}'}{dt} \cdot \vec{i}' = 0$$

de las relaciones análogas para \vec{j}' y \vec{k}' resulta

$$\frac{d\vec{j}'}{dt} \cdot \vec{j}' = 0 \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} \cdot \vec{k}' = 0$$

o sea que $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$.

Por otra parte derivando la ecuación $\vec{i}' \cdot \vec{j}' = 0$ obtenemos:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} \cdot \vec{j}' = -\vec{i}' \cdot \frac{d\vec{j}'}{dt}$$

procediendo análogamente con las otras dos relaciones de ortogonalidad se obtiene que:

$$\frac{d\vec{j}'}{dt} \cdot \vec{k}' = -\vec{j}' \cdot \frac{d\vec{k}'}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{d\vec{k}'}{dt} \cdot \vec{i}' = -\vec{k}' \cdot \frac{d\vec{i}'}{dt}$$

relaciones que implican $a_{12} = -a_{21}$, $a_{23} = -a_{32}$, $a_{31} = -a_{13}$.

Si introducimos ahora el vector velocidad angular $\vec{\omega}$ siendo

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i}' + \omega_y \vec{j}' + \omega_z \vec{k}'$$

donde $\omega_x = a_{23}$, $\omega_y = a_{31}$, $\omega_z = a_{12}$. Se cumple:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \omega_z \vec{j}' - \omega_y \vec{k}' = \vec{\omega} \times \vec{i}'$$

$$\frac{d\vec{j}'}{dt} = -\omega_z \vec{i}' + \omega_x \vec{k}' = \vec{\omega} \times \vec{j}'$$

$$\frac{d\vec{k}'}{dt} = \omega_y \vec{i}' - \omega_x \vec{j}' = \vec{\omega} \times \vec{k}'$$

Dada la importancia que tiene el concepto de velocidad angular en este curso, no solamente en el estudio de sistemas en movimiento sino en toda la segunda parte del curso, referente a Sistemas Rígidos, se da en el Apéndice de este Capítulo otra deducción levemente diferente y menos directa, pero más elegante de la deducción de estas expresiones; pero que nos dan una fórmula general de la velocidad angular de un sistema en movimiento.

Relación Fundamental entre Derivadas de un Vector.

Volviendo a la forma de la derivada de un vector, podemos escribir:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + A_x' \vec{\omega} \times \vec{i}' + A_y' \vec{\omega} \times \vec{j}' + A_z' \vec{\omega} \times \vec{k}'$$

o sea:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{A}$$

Esta es la relación fundamental entre las derivadas asociadas a distintos sistemas de coordenadas. Obsérvese que si las coordenadas de un vector \vec{B} en el sistema móvil $S' = O'x'y'z'$ no varían, es decir si dicha recta está en reposo en el sistema móvil, se cumple:

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{B}.$$

La derivada $\frac{d}{dt}$ respecto del sistema Oxyz, también es llamada derivada respecto al sistema *fijo* o derivada *absoluta*, porque deja fijos los vectores del sistema S, al que podemos llamar sistema absoluto, en el abuso de la nomenclatura introducida anteriormente y se la suele notar como d_A/dt . La derivada $\frac{d'}{dt}$ es llamada derivada respecto al sistema móvil o derivada *relativa*, notándose la como d_R/dt .

La relación fundamental establece que: *la derivada absoluta de un vector es igual a la derivada relativa más la derivada absoluta que tendría dicho vector si se encontrara en reposo en el sistema móvil.*

En el caso particular que el vector que deseamos derivar es la propia velocidad angular se cumple

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d'\vec{\omega}}{dt}$$

porque el producto vectorial de cualquier vector por sí mismo da cero. Por ser la derivada de la velocidad angular de un sistema respecto al otro, la misma respecto a cualquiera de los dos, podemos usar sin ambigüedades la notación $\dot{\vec{\omega}}$.

Interpretación de la Velocidad Angular.

Analicemos más detalladamente el significado del vector velocidad angular $\vec{\omega}$. Sea \vec{B} un vector fijo en el sistema móvil, es decir que

$$\frac{d\vec{B}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{B}.$$

Entonces se cumple para Δt suficientemente pequeño :

$$\Delta \vec{B}(t) = \vec{B}(t + \Delta t) - \vec{B}(t) = \vec{\omega}(t) \times \vec{B}(t) \Delta t.$$

Usando la definición del producto vectorial resulta que $\Delta \vec{B}(t)$ es tangente a una circunferencia de centro C, proyección de \vec{B} sobre $\vec{\omega}$ y radio $B \text{ sen } \theta$. Su magnitud vale

$$|\Delta \vec{B}| = (B \text{ sen } \theta) (\omega \Delta t)$$

Por ese motivo los vectores en reposo respecto de un sistema móvil se comportan como si en el instante t rotasen alrededor de un eje que pasa por O en la dirección de $\vec{\omega}$. En general la dirección de $\vec{\omega}$ varía a medida que el tiempo transcurre por lo que la dirección del eje también lo hace.

I-4c.ii) Fórmula de Cambio de Velocidad.

Volvamos ahora a la descripción del movimiento de una partícula situada en P vista desde dos sistemas de referencia en rotación relativa. Como los orígenes O y O' coinciden, ya habíamos visto que el vector posición de P es el mismo en ambos sistemas y sólo difieren sus componentes. Estamos ahora en condiciones de relacionar las velocidades respecto de ambos sistemas de coordenadas.

La velocidad respecto del sistema S = Oxyz es:

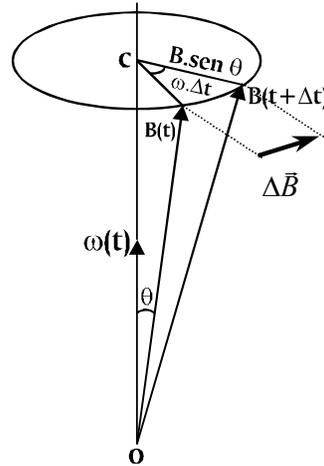


FIG. 25

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

mientras que la velocidad vista por un observador situado en el sistema móvil es:

$$\vec{v}' = \frac{d'\vec{r}}{dt} = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}'$$

Ambas expresan la variación del mismo vector visto en dos sistemas distintos de coordenadas y están relacionadas por:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d'\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\text{o sea} \quad \vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Esta ecuación permite relacionar la velocidad respecto al sistema fijo $S = Oxyz$, también llamado sistema absoluto (\vec{v} es la velocidad “absoluta”, por lo que también se la suele escribir como \vec{v}_A), con la velocidad \vec{v}' respecto al sistema móvil $S' = O'x'y'z'$, también llamado sistema relativo (\vec{v}' es la velocidad “relativa” o \vec{v}_R).

I-4c.iii) Fórmula de Cambio de Aceleración.

Para calcular la relación entre las aceleraciones observemos que la aceleración respecto al sistema fijo $Oxyz$ o aceleración absoluta está dada por:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}$$

y la aceleración respecto al sistema móvil o aceleración relativa por:

$$\vec{a}' = \frac{d'\vec{v}'}{dt} = \frac{d'^2\vec{r}'}{dt'^2} = \ddot{x}'\vec{i}' + \ddot{y}'\vec{j}' + \ddot{z}'\vec{k}'$$

y utilizando una vez más la relación fundamental para la derivación de un vector resulta:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} =$$

$$= \frac{d'\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d'\vec{r}}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

Observando que $\vec{a}' = \frac{d'\vec{v}'}{dt}$ y que $\vec{v}' = \frac{d'\vec{r}}{dt} = \frac{d'\vec{r}'}{dt}$, porque tenemos los orígenes O y O' coincidentes de forma que $\vec{r} = \vec{r}'$; y agrupando en términos, la ecuación anterior toma la siguiente forma:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'.$$

Esta relación entre la aceleración “absoluta” ($\vec{a} = \vec{a}_A$) y la aceleración “relativa” ($\vec{a}' = \vec{a}_R$) es llamada Teorema de Coriolis.¹² Obsérvese que una partícula en reposo en el sistema O'x'y'z', tendría una aceleración

$$\vec{a}_T = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}$$

llamada *aceleración de arrastre* o *transporte* porque corresponde a la aceleración con que una partícula es transportada al moverse junto con el sistema móvil.

El último sumando es

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'.$$

Este sumando se denomina aceleración de Coriolis y es no nulo sólo si la partícula se mueve respecto al sistema móvil. Además esta velocidad no tiene que ser colineal con la velocidad angular.

Así entonces, para este caso particular de la rotación del sistema móvil en torno al sistema absoluto tenemos que:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_C$$

Ejemplo 1:

¹² - La anterior es en realidad una forma simplificada del mismo para cuando se trata de dos sistemas cuyo origen de coordenadas se mantiene coincidente (no hay movimiento de traslación).

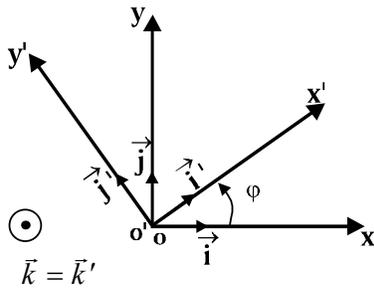


FIG. 26

Se consideran dos sistemas de referencia con movimiento de rotación relativo y origen común Oz coincide con Oz' y una rotación de ángulo φ lleva Ox a O'x'. Determinar la velocidad angular $\vec{\omega}$.

Se cumple:

$$\begin{aligned} \vec{i}' &= \cos\varphi \vec{i} + \text{sen}\varphi \vec{j} \\ \vec{j}' &= -\text{sen}\varphi \vec{i} + \cos\varphi \vec{j} \\ \vec{k} &= \vec{k}' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{i}}' &= -\text{sen}\varphi \dot{\varphi} \vec{i} + \cos\varphi \dot{\varphi} \vec{j} = \dot{\varphi} \vec{j}' \\ \dot{\vec{j}}' &= -\cos\varphi \dot{\varphi} \vec{i} - \text{sen}\varphi \dot{\varphi} \vec{j} = -\dot{\varphi} \vec{i}' \end{aligned}$$

Observar la semejanza que existe entre estas relaciones con las que relacionan las derivadas de los versores de coordenadas cilíndricas.

De estas:

$$\omega_z = a_{12} = \dot{\varphi}$$

$$\omega_x = \omega_y = 0$$

por lo que resulta

$$\boxed{\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k}}$$

Esta relación es de suma importancia en la interpretación conceptual de qué es la velocidad angular, y de la forma en que calcularemos ella en la práctica.

Observemos, antes que nada que se trata de un *movimiento plano*, así llamado porque, aunque sea en torno del instante considerado, todos los puntos se moverán en un plano perpendicular al eje Oz, que se mantiene fijo. O sea, la normal \vec{k} al plano del movimiento de todos los puntos del sistema O'x'y'z' se mantiene constante. En este tipo de movimiento extremadamente particular, la velocidad angular queda orientada precisamente en la dirección de esa normal; o sea:

$$\vec{\omega} = \omega \vec{k} \quad \text{con } \omega = \dot{\varphi}$$

Es inmediato ver que el nombre de “velocidad angular” está relacionado con que esta ecuación nos dice que el módulo (con signo) de ese vector es igual a la derivada del ángulo φ ; o sea, la rapidez con que φ crece:

$$\omega = \dot{\varphi} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t}$$

Haciendo una comparación con el concepto de velocidad como la derivada de la posición, definido anteriormente, surge naturalmente la idea de *velocidad angular*.

Desde un punto de vista práctico, este resultado nos sirve porque cada vez que tengamos un movimiento plano, la velocidad angular podrá escribirse de esta forma. Donde es importante aclarar que φ es aquí simplemente el ángulo entre uno de los ejes del sistema fijo y uno de los ejes del sistema móvil, *medido a partir del primero de ellos hacia el segundo*¹³ y de esta manera, dado que \vec{k} es saliente de la hoja, el ángulo φ crece en sentido antihorario, visto desde el extremo de \vec{k} .

Ejemplo 2:

Una partícula está situada a una distancia d del origen medida sobre el eje Ox' de la Fig. anterior, y permanece en reposo respecto al sistema móvil. Determinar la velocidad y aceleración vista desde el sistema fijo $Oxyz$.

Se cumple que $\vec{v}'=0$ y que $\vec{a}'=0$ ya que las coordenadas de la partícula respecto del sistema móvil no varían. Por lo tanto:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \dot{\varphi} \vec{k} \times d \vec{i}' = d \dot{\varphi} \vec{k} \times \vec{i}' = d \dot{\varphi} \vec{j}'.$$

La magnitud de la velocidad es $d\dot{\varphi}$ y la dirección es perpendicular a la del vector posición. Este resultado era esperable ya que en este caso la partícula se mueve sobre una circunferencia de radio d describiendo un movimiento circular. Recordando las definiciones de los vectores unitarios en coordenadas polares resulta que:

$$\vec{e}_r = \vec{i}' \quad \vec{e}_\varphi = \vec{j}'$$

y por tanto para un movimiento circular se tiene que

$$\vec{v} = d\dot{\varphi} \vec{e}_\varphi = d\dot{\varphi} \vec{j}'$$

en cuanto a la aceleración:

¹³ - La dirección en que medimos φ es importante porque si el sistema gira hacia un lado u otro su derivada tendrá diferente signo.

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \vec{a}_T = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} = \\ &= \dot{\phi} \vec{k} \times (\dot{\phi} \vec{k} \times d\vec{i}') + \ddot{\phi} \vec{k} \times d\vec{i}' = \\ &= \dot{\phi} \vec{k} \times d\dot{\phi} \vec{j}' + d\ddot{\phi} \vec{j}' = -d\dot{\phi}^2 \vec{i}' + d\ddot{\phi} \vec{j}'.\end{aligned}$$

que no es otra cosa que la expresión de la aceleración de un punto con movimiento circular.

Ejemplo 3.

Consideremos ahora que una partícula que se mueve con velocidad constante a lo largo del eje $O'x'$ dada por:

$$\vec{v}' = -v_0 \vec{i}'.$$

En $t = 0$ la partícula se encuentra en la posición $\vec{r}' = d\vec{i}'$.

Determinar la velocidad y la aceleración de la partícula respecto al sistema fijo.

La posición de la partícula en el sistema que rota es

$$\vec{r}' = (d - v_0 t) \vec{i}'$$

y en el sistema fijo el vector posición estará dado por

$$\vec{r} = (d - v_0 t) [\cos\phi \vec{i} + \sin\phi \vec{j}].$$

Es decir que, vista desde el sistema fijo, la partícula no sólo se acerca al centro sino que va rotando y describe una trayectoria espiral.

La velocidad respecto al sistema fijo estará dada por

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

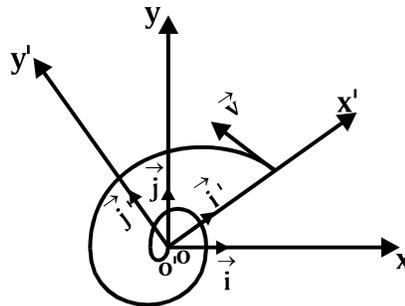


FIG. 27

$$\begin{aligned}
 &= -v_0 \dot{i}' + \dot{\phi} \bar{k}' \times (d - v_0 t) \bar{i}' \\
 &= -v_0 \dot{i}' + (d - v_0 t) \dot{\phi} \bar{j}'
 \end{aligned}$$

Para calcular la aceleración respecto al sistema fijo recordemos que

$$\bar{a} = \bar{a}' + \bar{a}_T + \bar{a}_C$$

y evaluemos cada uno de los sumandos.

La aceleración relativa es

$$\bar{a}' = -\frac{dv_0'}{dt} \bar{i}' = 0.$$

la aceleración de transporte vale

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_T &= \dot{\phi} \bar{k}' \times (\dot{\phi} \bar{k}' \times (d - v_0 t) \bar{i}') + \ddot{\phi} \bar{k}' \times (d - v_0 t) \bar{i}' \\
 &= -(d - v_0 t) \dot{\phi}^2 \bar{i}' + (d - v_0 t) \ddot{\phi} \bar{j}'
 \end{aligned}$$

y la de Coriolis

$$\bar{a}_c = 2\dot{\phi} \bar{k}' \times (-v_0 \dot{i}') = -2v_0 \dot{\phi} \bar{j}'.$$

La aceleración relativa \bar{a}' es nula ya que la partícula se mueve con velocidad relativa constante. La aceleración de transporte corresponde a la que tendría una partícula que en el instante t se encontrara en reposo, respecto al sistema móvil, a una distancia $d - v_0 t$ del origen. En cuanto a la aceleración de Coriolis su significado se puede determinar observando los términos del vector velocidad que han sido derivados para su obtención: por una lado la magnitud de la velocidad tangencial $(d - v_0 t) \dot{\phi} \bar{j}'$ disminuye a medida que nos acercamos al origen y por otro la componente radial de la velocidad $-v_0 \dot{i}'$ cambia de dirección a medida que el eje \bar{i}' rota. También se puede comparar cada uno con su origen en la deducción teórica de la aceleración de Coriolis.

Obsérvese que la velocidad absoluta y la aceleración absoluta podrían haberse obtenido directamente derivando

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

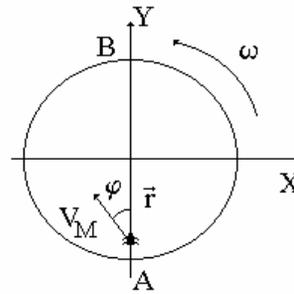
$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}$$

y verifique que el resultado es el mismo que el obtenido usando el Teorema de Coriolis.

Este es un procedimiento común para verificar los resultados del teorema de Coriolis. La conveniencia de usar uno u otro método estará dada por el problema particular en estudio.

Ejemplo 4.

Una hormiga (con conocimientos de física) puede moverse con una velocidad máxima V_M y desea recorrer la distancia $AB=2R$ entre puntos diametralmente opuestos de un disco que rota con velocidad angular ω constante, en línea recta respecto al sistema fijo. Calcular el tiempo mínimo necesario para realizar dicho recorrido. Discutir para que valores de V_M , ω , R no es posible registrar dicha trayectoria.



$$\vec{V} = \vec{V}_R + \vec{V}_T = \vec{V}_R + \omega \times \vec{r}$$

el movimiento debe ser según la dirección y , por lo tanto:

$$V_{AX} = 0.$$

Proyectando según los ejes, y haciendo uso de cual es el movimiento deseado en el sistema absoluto es $X=0$:

$$0 = -V_M \operatorname{sen} \varphi - \omega Y$$

$$V_{AY} = V_M \cos \varphi = \dot{Y}$$

de la primera se deduce que: $Y = -\frac{V_M \operatorname{sen} \varphi}{\omega}$ y derivando:

$$\dot{Y} = \frac{-V_M \cos \varphi \dot{\varphi}}{\omega} \Rightarrow \dot{\varphi} = -\omega$$

El hecho de que en este caso la velocidad angular del disco sea igual y opuesta a la derivada del ángulo φ no es coincidencia, sino sale del hecho de que, para la hormiga solidaria al disco, la recta que ella desea seguir, se mueve con velocidad angular opuesta a la que el disco tiene respecto al sistema fijo. Esto lo veremos en general al final de este Capítulo.

Luego:

$$\varphi = \varphi_0 - \omega t$$

Observemos que φ decrece a medida que la hormiga avanza, así que el ángulo máximo es el inicial en que:

$$V_M \operatorname{sen} \varphi_0 = \omega R \Rightarrow \operatorname{sen} \varphi_0 = \frac{\omega R}{V_M}$$

de aquí se deduce que para que la trayectoria sea posible, se debe cumplir: $\frac{\omega R}{V_M} \leq 1$.

Si esto no fuese así, la velocidad angular del disco sería muy grande y la hormiga no podría ir lo suficientemente rápido como para compensar el movimiento de arrastre del disco y mantenerse sobre la recta deseada.

Para calcular el tiempo que le lleva hacer el viaje:

$$2R = \int_0^T \dot{Y} dt = \int_0^T V_M \cos(-\omega t + \varphi_0) dt = -\frac{V_M}{\omega} \operatorname{sen}(\varphi_0 - \omega t) \Big|_0^T$$

$$-\operatorname{sen}(\varphi_0 - \omega T) + \operatorname{sen} \varphi_0 = \frac{2R\omega}{V_M} \quad \therefore \operatorname{sen}(\omega T - \varphi_0) = \operatorname{sen} \varphi_0$$

Esta ecuación tiene múltiples soluciones, ya que podemos decir que:

$$\omega T - \varphi_0 = \varphi_0 + 2\pi n$$

con n entero.

Es decir, la hormiga llega al punto B en menos de una vuelta del disco, o en vueltas sucesivas. Como queremos hallar el mínimo tiempo posible para ello, esto será así cuando $n = 0$:

$$\omega T = 2\varphi_0 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2}{\omega} \operatorname{Arctg} \left(\frac{\omega R}{V_M} \right)$$

I-4d. Caso general

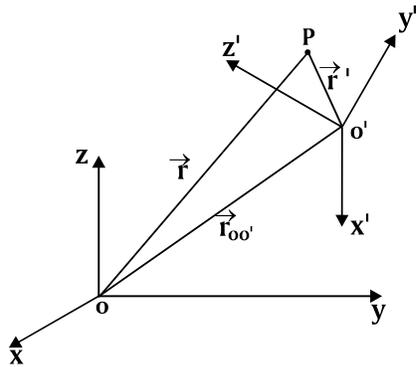


FIG. 28

Nos referiremos ahora al caso general de un sistema $S'=O'x'y'z'$ cuyo origen se mueve y cuyos ejes rotan respecto al sistema fijo $S=Oxyz$. Los vectores posición de P respecto a los sistemas O y O' están relacionados por

$$\vec{r} = \vec{r}_{oo'} + \vec{r}'$$

Observar que ahora, a diferencia del caso anterior, debemos distinguir claramente los vectores \vec{r} y \vec{r}' porque el origen de coordenadas de los sistemas S y S' ya no es el mismo:

$$\vec{r} = \vec{r}_{OP} = P - O$$

$$\vec{r}' = \vec{r}_{O'P} = P - O'$$

$$\vec{r}_{oo'} = O' - O$$

como indicados en la Figura 28.

I-4d.i) Teorema de Roverbal.

La velocidad de P respecto al sistema fijo S será:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_{oo'}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} = \frac{d\vec{r}_{oo'}}{dt} + \frac{d'\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r}' \\ &= \vec{v}_{oo'} + \vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}'. \end{aligned}$$

Si la partícula está en reposo en el sistema $S' = O'x'y'z'$, $\vec{v}' = 0$ y la velocidad absoluta de la partícula coincide con la velocidad con que es transportada por el sistema móvil, así que ahora la velocidad de arrastre o transporte es.

$$\boxed{\vec{v}_T = \vec{v}_{oo'} + \vec{\omega} \times \vec{r}'}$$

Notar que debido a la diferencia entre los vectores \vec{r} y \vec{r}' , ahora en esta ecuación aparece \vec{r}' , y no \vec{r} como antes.

Con esa definición el Teorema de Roverbal queda expresado como:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_T$$

I-4d.ii) Teorema de Coriolis.

En cuanto a la aceleración

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\vec{v}' + \vec{v}_T)}{dt} = \frac{d'\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d(\vec{v}_{oo'} + \vec{\omega} \times \vec{r}')}{dt} = \\ &= \frac{d\vec{v}_{oo'}}{dt} + \frac{d'\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} = \\ &\frac{d\vec{v}_{oo'}}{dt} + \frac{d'\vec{v}'}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}'}{dt} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \end{aligned}$$

que agrupando términos conduce a

$$\vec{a} = \vec{a}_{oo'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') + \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}'.$$

Como siempre la aceleración de transporte se puede reconocer suponiendo que P no se mueve respecto al sistema móvil, en ese caso:

$$\vec{a}_T = \vec{a}_{oo'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

y si consideramos la definición anterior de la aceleración de Coriolis:

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

y con las definiciones anteriores recuperamos el *Teorema de Coriolis*:

$$\boxed{\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_C}$$

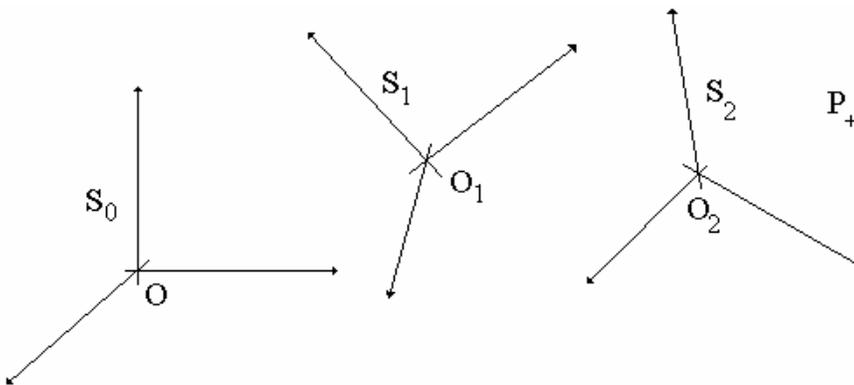
donde, para que sea la forma más general del mismo tenemos que usar la definición correcta de aceleración de transporte anterior, donde resaltamos nuevamente que el vector posición que aparece en ella es $\vec{r}' = P - O'$.

I-4e. Adición de velocidades angulares.

Consideremos ahora que queremos estudiar el movimiento relativo entre varios sistemas de referencia. Dado que hemos estudiado detalladamente el movimiento de una partícula respecto a dos sistemas con movimiento relativo, consideremos una partícula P, moviéndose arbitrariamente en el espacio. Y consideremos tres sistemas de referencia diferentes, a los que llamaremos:

- S_0 : Sistema Absoluto.
- S_1 : Sistema de Arrastre.
- S_2 : Sistema Móvil.

Solidario a cada uno de estos sistemas de referencia consideraremos un sistema de coordenadas solidario a ellos con orígenes de coordenadas O, O_1 y O_2 , respectivamente. A la velocidad angular del sistema S_j respecto al sistema S_i le llamaremos $\vec{\omega}_{ji}$. O sea:



$\bar{\omega}_{10}$ es la velocidad angular del sistema S_1 respecto al S_0 .

$\bar{\omega}_{21}$ la del sistema S_2 respecto al S_1 .

$\bar{\omega}_{20}$ la del sistema S_2 respecto al S_0 .

También utilizaremos un superíndice i para decir que estamos considerando la velocidad de un punto respecto a uno u otro sistema; o sea, $\bar{v}_A^{(i)}$ es la velocidad de un punto A respecto a un sistema S_i .

Considerando, para simplificar, que ahora P es solidario al sistema S_2 , es decir que su velocidad relativa respecto a S_2 es nula:

- 1) La velocidad de P respecto a S_0 es igual a la velocidad de transporte de P respecto a este sistema:

$$\bar{v}_P^{(0)} = \bar{v}_{O_2}^{(0)} + \bar{\omega}_{20} \times (P - O_2)$$

- 2) La velocidad de P respecto a S_1 es ahora la velocidad de transporte respecto a S_2 :

$$\bar{v}_P^{(1)} = \bar{v}_{O_2}^{(1)} + \bar{\omega}_{21} \times (P - O_2)$$

- 3) Y finalmente escribimos la velocidad de P respecto al sistema S_0 , pero haciendo uso de que la anterior es la velocidad relativa de P respecto al sistema de arrastre:

$$\bar{v}_P^{(0)} = \bar{v}_P^{(1)} + \bar{v}_{O_1}^{(0)} + \bar{\omega}_{10} \times (P - O_1)$$

Sustituyendo la penúltima en la anterior y operando se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{v}_P^{(0)} &= \bar{v}_{O_2}^{(1)} + \bar{\omega}_{21} \times (P - O_2) + \bar{v}_{O_1}^{(0)} + \bar{\omega}_{10} \times (P - O_2 + O_2 - O_1) = \\ &= \bar{v}_{O_2}^{(1)} + \bar{\omega}_{21} \times (P - O_2) + \bar{v}_{O_1}^{(0)} + \bar{\omega}_{10} \times (P - O_2) + \bar{\omega}_{10} \times (O_2 - O_1) = \\ &= \bar{v}_{O_2}^{(1)} + \bar{v}_{O_1}^{(0)} + \bar{\omega}_{10} \times (O_2 - O_1) + (\bar{\omega}_{21} + \bar{\omega}_{10}) \times (P - O_2) \end{aligned}$$

Observemos que si P coincide con O_2 tenemos, de la ecuación que daba la velocidad de P respecto a S_0 tendremos:

$$\bar{v}_{O_2}^{(0)} = \bar{v}_{O_2}^{(1)} + \bar{v}_{O_1}^{(0)} + \bar{\omega}_{10} \times (O_2 - O_1)$$

Así:

$$\vec{v}_P^{(0)} = \vec{v}_{O_2}^{(0)} + (\vec{\omega}_{21} + \vec{\omega}_{10}) \times (P - O_2)$$

Comparando esta ecuación con la primera de todas, podemos escribir que:

$$(\vec{\omega}_{21} + \vec{\omega}_{10}) \times (P - O_2) = \vec{\omega}_{20} \times (P - O_2)$$

Como P es un punto arbitrario, y esta igualdad debe valer para todo punto P tendremos que:

$$\boxed{\vec{\omega}_{20} = \vec{\omega}_{21} + \vec{\omega}_{10}}$$

Que es el denominado *Teorema de Adición de Velocidades Angulares*, que nos dice que la velocidad angular de un sistema móvil S_2 respecto a otro S_0 , considerado como absoluto, puede expresarse como la suma de la velocidad angular de ese sistema respecto a otro intermedio o de arrastre S_1 , más la velocidad angular de este respecto al absoluto.

Esta relación es muy útil cuando queremos calcular la velocidad angular de un sistema cualquiera moviéndose en el espacio. Es conocido que un movimiento cualquiera en el espacio se puede descomponer en una traslación y giros elementales. La solución al Ejercicio 1 anterior, nos enseña como calcular la velocidad angular de un movimiento plano; esto es, en definitiva uno de estos movimientos elementales. Considerando sistemas intermedios se puede descomponer cualquier rotación en el espacio en tres giros elementales que tendrán una expresión similar para la velocidad angular (derivada del ángulo de giro correspondiente). Luego, utilizando este teorema en forma consecutiva podremos hallar cuál es la velocidad angular del movimiento compuesto.¹⁴ Entraremos en los detalles de esto en el último capítulo, cuando estudiemos los Ángulos de Euler, pero de aquí hasta allá nos queda un largo camino por recorrer.

Ejemplo:

Consideremos un sistema S_0 , absoluto, y dos sistemas S_1 y S_2 , que giran respecto al anterior, pero que entre ellos solo se trasladan. Por ejemplo, en el Ejemplo 3 anterior S_0 es el sistema fijo $O\vec{i}\vec{j}\vec{k}$, S_1 es el $O\vec{i}'\vec{j}'\vec{k}'$ y S_2 es un sistema $P\vec{i}\vec{j}\vec{k}$, siendo P la partícula que se

¹⁴ - Acotemos, antes de terminar, que a pesar de que la velocidad angular siempre se puede escribir como $\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$ en alguna base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$, esto no implica que cada una de las componentes esté asociada a un giro elemental.

mueve con velocidad constante respecto a S_1 . Como el movimiento de S_2 respecto a S_1 , es sólo de traslación, tendremos que:

$$\vec{\omega}_{21} = 0$$

Y aplicando el teorema de Adición de Velocidades Angulares tenemos que:

$$\vec{\omega}_{20} = \vec{\omega}_{10} = \dot{\varphi} \vec{k}$$

Hagamos ahora un cambio de nombre entre los sistemas, básicamente intercambiando el orden entre S_0 y S_1 :

$$S_0 \rightarrow S'_1$$

$$S_1 \rightarrow S'_0$$

$$S_2 \rightarrow S'_2$$

Y escribiendo las nuevas velocidades angulares con primas, tendremos:

$$\vec{\omega}'_{20} = \vec{\omega}'_{21} + \vec{\omega}'_{10} \quad \text{con} \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}'_{20} = \vec{\omega}_{21} \\ \vec{\omega}'_{21} = \vec{\omega}_{20} \\ \vec{\omega}'_{10} = \vec{\omega}_{01} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{\omega}_{21} = \vec{\omega}_{20} + \vec{\omega}_{01} = 0$$

Por lo que:

$$\vec{\omega}_{01} = -\vec{\omega}_{20} = -\dot{\varphi} \vec{k} = -\vec{\omega}_{10}$$

lo que demuestra por qué la hormiga del ejemplo 4 tiene que mantenerse moviéndose con una velocidad que forme un ángulo cuya derivada sea igual y opuesta a la velocidad angular del disco; y que en forma más general, quiere decir que si un sistema se mueve respecto a otro con velocidad angular $\vec{\omega}$, este último se mueve respecto al primero con velocidad angular $-\vec{\omega}$.

Un razonamiento similar nos permite demostrar a través del Teorema de Roverbal aplicado a la traslación, que si un sistema se traslada respecto a otro con velocidad \vec{v} , este último lo hará respecto al primero con velocidad $-\vec{v}$.

Apéndice: Velocidad Angular

En la Sección I-4c.i vimos que la derivada de los versores de una base móvil $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ respecto a una fija, $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ podían escribirse en dicha base móvil como:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{i}'}{dt} &= a_{11}\vec{i}' + a_{12}\vec{j}' + a_{13}\vec{k}' \\ \frac{d\vec{j}'}{dt} &= a_{21}\vec{i}' + a_{22}\vec{j}' + a_{23}\vec{k}' \\ \frac{d\vec{k}'}{dt} &= a_{31}\vec{i}' + a_{32}\vec{j}' + a_{33}\vec{k}'\end{aligned}$$

Luego, usando las propiedades de que $\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'$ cualquier vector que varía en el tiempo manteniendo su módulo constante es perpendicular a sí mismo esto se reducía a:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{i}'}{dt} &= a_{12}\vec{j}' + a_{13}\vec{k}' \\ \frac{d\vec{j}'}{dt} &= a_{21}\vec{i}' + a_{23}\vec{k}' \\ \frac{d\vec{k}'}{dt} &= a_{31}\vec{i}' + a_{32}\vec{j}'\end{aligned}$$

Y por ser cada uno de los vectores de la base normal a los demás:

$$\begin{aligned}a_{12} &= \frac{d\vec{i}'}{dt} \cdot \vec{j}' = -\vec{i}' \cdot \frac{d\vec{j}'}{dt} = a_{21} \\ a_{23} &= \frac{d\vec{j}'}{dt} \cdot \vec{k}' = -\vec{j}' \cdot \frac{d\vec{k}'}{dt} = a_{32} \\ a_{31} &= \frac{d\vec{k}'}{dt} \cdot \vec{i}' = -\vec{k}' \cdot \frac{d\vec{i}'}{dt} = -a_{13}\end{aligned}$$

Luego podemos escribir, por ejemplo, solo para el primero de los versores de la base:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \left(\frac{d\vec{i}'}{dt} \cdot \vec{j}' \right) \vec{j}' + \left(-\frac{d\vec{k}'}{dt} \cdot \vec{i}' \right) \vec{k}'$$

Usando las propiedades de que la base es ortonormal directa:

$$\vec{j}' = \vec{k}' \times \vec{i}' \quad \text{y} \quad \vec{k}' = \vec{i}' \times \vec{j}' = -\vec{j}' \times \vec{i}'$$

podemos escribir:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \left[\left(\frac{d\vec{i}'}{dt} \cdot \vec{j}' \right) \vec{k}' \right] \times \vec{i}' + \left[\left(\frac{d\vec{k}'}{dt} \cdot \vec{i}' \right) \vec{j}' \right] \times \vec{i}'$$

y agregando el siguiente término, que es cero porque todo vector multiplicado vectorialmente por sí mismo es nulo:

$$\left[\left(\frac{d\vec{j}'}{dt} \cdot \vec{k}' \right) \vec{i}' \right] \times \vec{i}' = 0$$

podemos escribir:

$$\frac{d\vec{i}'}{dt} = \left[\left(\frac{d\vec{i}'}{dt} \cdot \vec{j}' \right) \vec{k}' + \left(\frac{d\vec{k}'}{dt} \cdot \vec{i}' \right) \vec{j}' + \left(\frac{d\vec{j}'}{dt} \cdot \vec{k}' \right) \vec{i}' \right] \times \vec{i}'$$

y llegamos nuevamente a que: $\frac{d\vec{i}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}'$ si hacemos:

$$\boxed{\vec{\omega} = \left(\frac{d\vec{i}'}{dt} \cdot \vec{j}' \right) \vec{k}' + \left(\frac{d\vec{k}'}{dt} \cdot \vec{i}' \right) \vec{j}' + \left(\frac{d\vec{j}'}{dt} \cdot \vec{k}' \right) \vec{i}'}$$

Esta es una expresión que nos determina, en forma *única*, la velocidad angular, y que podemos ver es exactamente la misma que hallada anteriormente. Observar que la misma es completamente simétrica en los vectores de la base, y si hacemos una permutación circular de los mismos se mantiene incambiada. Por lo que a pesar de que la demostración la hicimos solamente

para $\frac{d\vec{i}'}{dt}$ solamente, tendremos un resultado equivalente para exactamente el mismo resultado

para $\frac{d\vec{j}'}{dt}$ y $\frac{d\vec{k}'}{dt}$, es decir:

$$\frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}'$$

$$\frac{d\vec{k}'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}'$$

siendo $\vec{\omega}$ el mismo de antes.

CAPÍTULO II

DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

Antes:

"Lo que es movido necesariamente es movido por algo."

Aristóteles

Metafísica.

Después:

"Si todo impedimento es excluido, el movimiento de un cuerpo sobre un plano horizontal continuará perpetuamente."

Galileo

Discursos.

DINÁMICA DE LA PARTÍCULA

II-1. Introducción.

El movimiento de un cuerpo cambia cuando este interactúa con otros cuerpos. Dichos cambios dependerán por un lado de las propiedades del cuerpo y por otro del medio que lo rodea. El problema central de la dinámica de la partícula es el siguiente: Dada una partícula cuyas características (masa, carga, momento magnético) son conocidas, colocada en determinadas condiciones de movimiento en cierto medio del cual se tiene una descripción completa, determinar cuál será el movimiento subsiguiente de la partícula.

II-2. Principio de inercia.

Comenzaremos analizando un problema mucho más simple. ¿qué se puede decir del movimiento de un objeto cuando éste está libre de interacciones?

La concepción dominante antes de que Galileo analizara detenidamente este problema era que para mantener un cuerpo en movimiento era necesaria la acción de alguna influencia externa. En otros términos se pensaba que si sobre un objeto no actuaban fuerzas éste permanecería en reposo.

Esta concepción parecía por otra parte muy natural, después de todo, la experiencia muestra que los objetos que se mueven sobre la superficie de la Tierra tienden al reposo cuando se les deja libres. Sin embargo, Galileo observó que si tratamos de ir más allá de la experiencia ordinaria eliminando progresivamente las fuerzas de resistencia, los cuerpos demorarían más y más en alcanzar el reposo, y extrapolando podemos sostener que si todas las interacciones pudiesen ser eliminadas el cuerpo continuaría moviéndose indefinidamente con velocidad constante. Galileo concluyó, por consiguiente, que sólo eran necesarias las interacciones para modificar el estado de movimiento de un cuerpo, no para mantener su velocidad.

El análisis de Galileo de este problema sigue siendo hoy día un ejemplo clásico de cómo se producen las Revoluciones Científicas. En efecto, basándose esencialmente en los mismos datos

experimentales, Galileo y sus antecesores sacaban conclusiones diametralmente opuestas. Para unos dichos datos confirmaban que los cuerpos libres de fuerzas tienden al reposo, para el otro las mismas observaciones conducían a pensar que un cuerpo libre continuaría moviéndose indefinidamente con velocidad constante. Sólo es posible comprender este cambio de interpretación si se recuerda cómo habían cambiado los esquemas conceptuales con los que se analizaban los hechos desde la antigüedad hasta la época de Galileo. Para los Griegos, Aristóteles por ejemplo, la Tierra estaba en reposo en el centro del Universo y constituía un sistema de referencia privilegiado, para que los cuerpos se movieran era necesario que se ejerciesen ciertas fuerzas. Para Galileo, la Tierra giraba en torno al Sol y no había un sistema de referencia privilegiado. Si se deseaba describir los fenómenos que ocurrían en la superficie terrestre se podía elegir a la Tierra como sistema de referencia, pero era claro que no podía considerarse que este sistema se encontraba en reposo absoluto. De existir en el Universo un sistema en reposo absoluto y si fuera cierto como sostenía Aristóteles que las partículas libres de fuerzas tenderían al reposo, no podrían explicarse los hechos observados. Por ejemplo si soltáramos una bala de cañón de la parte más alta del mástil de un barco, en vez de caer verticalmente como en realidad observamos, debería salir disparada en alguna dirección, ya que tendería al reposo mientras que la Tierra sigue moviéndose en torno al Sol. El principio de inercia permite explicar naturalmente los hechos observados. La bala cuando es soltada continúa moviéndose con la misma velocidad que la Tierra y su cambio de movimiento posterior sólo se debe a la fuerza de gravedad.

Newton, retomó el principio de inercia y lo estableció como la primera ley del movimiento en sus Principia: "Cada cuerpo permanece en su estado de reposo, o de movimiento rectilíneo uniforme, a menos que actúen fuerzas sobre él que obliguen a cambiar de estado". Aunque este enunciado parece muy claro conviene analizarlo a fondo. Como hemos dicho en repetidas oportunidades, para que cualquier enunciado sobre el movimiento de un cuerpo tenga sentido se debe establecer en qué sistema de referencia se cumple. Al respecto conviene recordar el último ejemplo del Capítulo I, lo que en un sistema se veía como movimiento rectilíneo uniforme en el otro sistema que rotaba con respecto al primero se veía como un movimiento según una trayectoria espiral. Por esta razón en las versiones modernas de la primera ley se hace referencia y se establece:

Primera Ley de Newton.

Existen ciertos sistemas de referencia, con respecto a los cuales el movimiento de un objeto libre de fuerzas externas es rectilíneo con velocidad constante.

Los sistemas de referencia para los cuales vale la Primera Ley de Newton, también llamada principio de inercia, se llaman sistemas inerciales. En los sistemas inerciales las partículas libres tienen aceleración nula.

Como hemos visto en el Capítulo anterior, si un sistema S es inercial y S' se mueve respecto de S con un movimiento de traslación uniforme, $a_{oo'} = 0$:

$$\vec{V}' = \vec{V} - \vec{V}_{oo'}$$

$$\vec{a}' = \vec{a} = 0$$

y una partícula libre también posee un movimiento rectilíneo uniforme visto desde S'. Por lo que podemos concluir que si S es inercial también S' lo es. Sin embargo, como ya hemos observado, si S es inercial y S' rota respecto de S, S' no es un sistema inercial, ya que como vimos en el último ejemplo del Capítulo anterior, una partícula libre seguirá una trayectoria curvilínea en S'.

Para determinar si un sistema de referencia es inercial o no se debe recurrir a la experiencia. Debido a su rotación diaria y a su interacción con el Sol y los otros planetas, la Tierra no es un sistema inercial. Sin embargo, en muchos casos estos efectos son despreciables y los sistemas de referencia unidos a nuestros laboratorios terrestres pueden sin gran error ser considerados inerciales.

Los sistemas inerciales son en definitiva sistemas de referencia ideales, todo sistema real presenta desviaciones respecto al comportamiento ideal. Un sistema muy próximo al ideal sería uno situado en el espacio a gran distancia de cualquier objeto celeste para eliminar los efectos gravitacionales y cuyos ejes están orientados apuntando a tres galaxias muy lejanas para evitar los efectos de rotación.

II-3. Fuerza y masa inercial.

La ley de inercia implica que toda fuerza produce un cambio de movimiento. Esta observación nos permitirá dar una definición cuantitativa del concepto de fuerza. Definiremos fuerza en términos de la aceleración producida sobre un objeto patrón. Se toma habitualmente como patrón un objeto, llamado el kilogramo standard al que se le asigna convencionalmente una masa de 1 kg. Luego veremos como se asignan las normas de otros objetos.

La fuerza se define midiendo la aceleración que produce sobre dicho objeto. Por ejemplo si un resorte produce al actuar sobre el kilogramo standard una aceleración de 1 m/s^2 diremos que el resorte está ejerciendo una fuerza de 1 Newton. En general si observamos que el objeto patrón tiene una aceleración $\underline{a} \text{ m/s}^2$ diremos que sobre él se está ejerciendo una fuerza de F Newtons, donde F es numéricamente igual a \underline{a} .

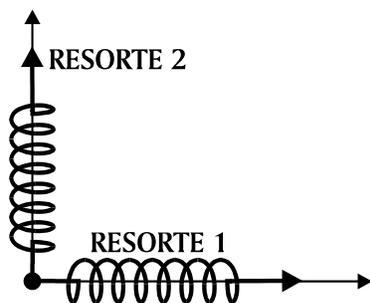


FIG. 1

él solo produciría una aceleración de F_2 m/s² según y .

Obviamente, podemos asignar a la fuerza no sólo una magnitud sino la dirección y sentido de la aceleración y asociar a la fuerza un vector. La utilidad de la noción de fuerza está asociada al siguiente hecho experimental: el vector aceleración está siempre en la dirección de la fuerza resultante. Supongamos, por ejemplo que el objeto patrón está unido a 2 resortes. El resorte 1 ejerce una fuerza de F_1 Newtons, en dirección x , es decir que si actuara solo él solo produciría una aceleración de F_1 m/s² según el eje x . El resorte 2 ejerce una fuerza de F_2 Newtons en la dirección del eje y , de modo que si actuara

Se puede observar experimentalmente que la aceleración producida por la acción simultánea de los dos resortes es vectorialmente igual a $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

Esta observación nos dice que la fuerza producida por la acción simultánea de dos interacciones es igual a la suma de las fuerzas asociadas a cada interacción. En otras palabras, ella nos dice que las fuerzas se pueden superponer linealmente.

Midiendo las aceleraciones producidas sobre el objeto patrón (el kilogramo standard) hemos podido definir cuantitativamente a las fuerzas. Estamos ahora en condiciones de definir la masa inercial de un objeto. Para ello tomemos los objetos marcados 1,2,3... cuyas masas deseamos definir. Sea m_0 la masa patrón, $m_0 = 1$ kg. Supongamos que bajo la acción de cierta fuerza F (por ejemplo un resorte estirado una cierta cantidad Δl) m_0 sufre una aceleración a_0 . Sustituyamos ahora que el objeto patrón por el objeto cuya masa m_1 deseamos definir sin modificar el valor de la fuerza que actúa. El objeto sufrirá una aceleración a_1 , definimos

$$m_1 a_1 = m_0 a_0$$

es decir

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{a_0}{a_1}$$

la relación entre masas es inversamente proporcional al la relación entre aceleraciones.

Se puede probar con experiencias de este tipo que si se unen dos objetos de masa m_1 y m_2 y se determina la masa del objeto resultante, ésta resulta ser igual a $m_1 + m_2$. Es decir que las

masas son magnitudes aditivas. Se puede considerar a la masa inercial como una medida de la cantidad de materia del objeto.

II-4. Segunda Ley de Newton

Estamos ahora en condiciones de enunciar la Segunda Ley de Newton, ella establece que:

En los sistemas de referencia inerciales:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

donde \vec{F} es la suma de todas las fuerzas resultantes, m la masa de la partícula y \vec{a} su aceleración.

Habiendo definido previamente las fuerzas y las masas, la Segunda Ley de Newton es una ley experimental que establece que las masas son independientes del valor de la fuerza que se utiliza para su definición.

Obsérvese que en ausencia de fuerzas externas aplicadas sobre un cuerpo, $\vec{F} = 0$ y por lo tanto $\vec{a} = 0$, por lo que una partícula libre se moverá con movimiento rectilíneo uniforme como era establecido por la Primera Ley.

El enunciado que hemos dado de la Segunda Ley no es el más general posible, en efecto, tal como lo hemos enunciado, la Ley sólo vale cuando la masa de la partícula no varía con el tiempo. Si deseamos describir el movimiento de un cohete, por ejemplo, su masa variará con el tiempo a medida que los gases de propulsión son expulsados por la tobera. Para describir este tipo de fenómenos es necesario generalizar la Segunda Ley introduciendo la noción de momento lineal o cantidad de movimiento.

El momento lineal de una partícula se define como el producto de su masa por su velocidad

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

La versión generalizada de la Segunda Ley establece que:

En los sistemas de referencia inerciales

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

la variación de la cantidad de movimiento es igual a la fuerza que actúa sobre el objeto.

En el caso de un cuerpo libre, $\vec{F} = 0$ y \vec{p} es constante.

$$\vec{p} = \vec{p}_0$$

por lo que la cantidad de movimiento de una partícula libre se conserva en el tiempo.

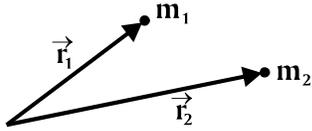
II-5. Las fuerzas de la naturaleza.

A los efectos de describir el movimiento de un cuerpo sometido a la influencia de ciertas interacciones mediante la aplicación de la Ley de Newton se debe sustituir cada una de las interacciones que sufre el objeto por fuerzas. Darse dichas fuerzas será equivalente a darse una función F de las propiedades de la partícula y su entorno. Todas las fuerzas distintas observadas en la naturaleza, pueden clasificarse en cuatro clases:

- 1) Fuerzas gravitatorias
- 2) Fuerzas electromagnéticas
- 3) Fuerzas nucleares fuertes
- 4) Fuerzas nucleares débiles

Las dos últimas sólo intervienen en los procesos y reacciones nucleares y son las responsables de los fenómenos de fisión y fusión nuclear así como de la radioactividad. Su estudio está básicamente fuera del rango de validez de la Mecánica Clásica por lo que no volveremos a hacer referencia a las mismas en este curso.

En cuanto al primer tipo de fuerzas, todas las partículas ejercen entre sí una fuerza de atracción gravitatoria. La ley general de interacción gravitatoria, o ley de gravitación de Newton establece que la fuerza F con la que una partícula atrae a otra es proporcional al producto de las masas de las partículas, inversamente proporcional al cuadrado de la distancia y está dirigida según la línea que separa las dos partículas. Es decir

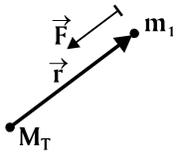


$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{|r_2 - r_1|^2} \frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|}$$

FIG. 2 donde G es una constante de proporcionalidad llamada constante de gravitación universal cuyo valor es

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 / \text{kg}^2.$$

Por ejemplo si M_T es la masa de la Tierra y m la masa de la partícula cuyo movimiento deseamos describir y si colocamos el origen de coordenadas en el centro de la Tierra



$$\vec{F}(\vec{r}) = -G \frac{m M_T}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

FIG. 3

Debido a que la constante de gravitación en el sistema M.K.S es muy pequeña, las fuerzas de gravitación son por lo general importantes sólo si interviene por lo menos un cuerpo de tamaño astronómico.

La mayor parte de las fuerzas que observamos normalmente entre objetos macroscópicos, por ejemplo las fuerzas de contacto, las fuerzas de rozamiento, así como las fuerzas ejercidas por cuerdas o resortes, son el resultado de interacciones entre las moléculas de los distintos cuerpos que intervienen y en definitiva producto principalmente de interacciones electromagnéticas.

Los fenómenos electromagnéticos se describen por medio de dos magnitudes vectoriales cuyas propiedades dependen del punto del espacio: el campo eléctrico $\vec{E}(\vec{r}, t)$ y el campo magnético $\vec{B}(\vec{r}, t)$. La fuerza que actúa sobre una partícula de carga q en presencia de dichos campos está dada por la ley de Lorentz

$$\vec{F}(\vec{r}, \vec{v}, t) = q [\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t)]$$

donde \vec{r} es la posición de la partícula y \vec{v} su velocidad.

En la mayor parte de las aplicaciones que estudiaremos en el resto del curso nos limitaremos a trabajar con fuerzas producidas por objetos macroscópicos, cuerdas, resortes, superficies rugosas, que aunque tengan un origen electromagnético, estarán descritas en cada caso por leyes de fuerza particulares. En todos los casos dichas fuerzas sólo dependerán de las propiedades cinemáticas de la partícula a través de su posición, del tiempo en el que actúa y su velocidad. Es decir que la forma más general de la ecuación de Newton para una partícula de masa m será:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F} \left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t \right)$$

II-6. La Segunda Ley de Newton como Ley determinista.

La ecuación vectorial que se acaba de obtener en la sección anterior es desde el punto de vista matemático un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden. Bajo ciertas hipótesis muy generales sobre la forma de $\vec{F} \left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t \right)$, el sistema permite calcular, a partir de la posición $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$ y la velocidad $\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = \vec{v}_0$ en cierto instante t_0 , la posición de la partícula en todo instante posterior $\vec{r}(t)$ para $t > t_0$. Por consiguiente la Segunda Ley permite calcular a partir del estado de movimiento que tiene la partícula en cierto instante t_0 cuál será su movimiento futuro descrito completamente por su ley horaria $\vec{r}(t)$. Importa remarcar que el sistema de ecuaciones diferenciales determina en forma única la evolución posterior de la partícula. En otras palabras, el movimiento futuro de la partícula está únicamente determinado por la ecuación dinámica de Newton y sus condiciones iniciales. Al permitirnos predecir precisamente el comportamiento del sistema mecánico, las leyes de Newton nos dan un enorme poder sobre la naturaleza y entran en la base de una infinidad de aplicaciones tecnológicas.

En lo que sigue de esta sección y en el resto del curso analizaremos como se resuelven estas ecuaciones para muchos casos particulares de fuerzas. Pero antes vamos a dar un argumento general para mostrar como es posible determinar el movimiento haciendo uso de la ecuación de Newton.

Sea una partícula de masa m sobre la que actúan fuerzas descritas por $\vec{F}\left(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t\right)$.

Supongamos que en $t = t_0$ $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$, $\frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = \vec{v}_0$.

La ecuación de Newton permite determinar la posición y velocidad de la partícula en un instante posterior $t_0 + \Delta t$. En efecto para Δt suficientemente pequeño

$$\begin{aligned}\vec{r}(t_0 + \Delta t) &= \vec{r}(t_0) + \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0)\Delta t \\ &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0\Delta t\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\vec{v}(t_0 + \Delta t) &= \vec{v}(t_0) + \frac{d\vec{v}(t_0)}{dt}\Delta t \\ &= \vec{v}_0 + \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t_0)\Delta t \\ &= \vec{v}_0 + \frac{1}{m}\vec{F}(\vec{r}_0, \vec{v}_0, t_0)\Delta t.\end{aligned}$$

Una vez calculada la posición y velocidad en el instante $t_0 + \Delta t$, se puede repetir el proceso tantas veces como sea necesario hasta llegar al tiempo t_1 en el cual deseamos determinar la posición de la partícula. Por supuesto se trata de un método aproximado de cálculo ya que cada vez que se incrementa el tiempo en Δt se comete un error de orden Δt^2 en la evaluación de la posición y la velocidad, por lo que la evaluación sólo es exacta en el límite $\Delta t \rightarrow 0$.

Pasemos ahora a estudiar algunos casos sencillos en que es posible resolver exactamente la ecuación de Newton.

II-6a. La fuerza aplicada depende del tiempo.

En este caso la ecuación se reduce a:

$$m\vec{a} = \vec{F}(t)$$

es decir

$$\vec{a}(t) = \frac{\vec{F}(t)}{m}$$

lo que determina la aceleración en función del tiempo. En el Capítulo I vimos cómo era posible determinar la ley horaria a partir de la aceleración, de la posición y velocidad en un instante dado.

Ejemplo:

Se considera el movimiento de un electrón de carga (-e) sometido a la acción de un campo eléctrico en la dirección del eje Ox:

$$E_x = E_0 \cos(\omega t + \theta).$$

Se desea determinar el movimiento del electrón, suponiendo que inicialmente está en reposo en $\vec{r}_0 = 0$.

La fuerza que actúa sobre el electrón será:

$$\vec{F} = -eE_0 \cos(\omega t + \theta)\vec{i}$$

y por consiguiente:

$$\vec{a}(t) = \frac{-eE_0}{m} \cos(\omega t + \theta)\vec{i}$$

Recordando lo estudiado en el Cap. I resulta:

$$\vec{v}(t) = \frac{-eE_0}{m\omega} \text{sen}(\omega t + \theta)\vec{i} + \vec{C}$$

y por lo tanto, como la partícula está inicialmente en reposo:

$$\vec{C} = \vec{v}(0) + \frac{eE_0}{m\omega} \text{sen}\theta\vec{i} = \frac{eE_0}{m\omega} \text{sen}\theta\vec{i}$$

es decir:

$$\vec{v}(t) = \left[-\frac{eE_0}{m\omega} \text{sen}(\omega t + \theta) + \frac{eE_0}{m\omega} \text{sen}\theta \right] \vec{i}$$

Integrando nuevamente resulta:

$$\vec{r}(t) = \frac{eE_0}{m\omega^2} \cos(\omega t + \theta) \vec{i} + \frac{eE_0}{m\omega} \operatorname{sen}\theta t \vec{i} + \vec{C}'$$

y como el electrón estaba inicialmente en el origen

$$\vec{C}' = -\frac{eE_0}{m\omega^2} \cos\theta \vec{i}$$

y por lo tanto el electrón se mueve sobre el eje Ox con ley horaria

$$x(t) = -\frac{eE_0 \cos\theta}{m\omega^2} + \frac{eE_0}{m\omega} \operatorname{sen}\theta t + \frac{eE_0}{m\omega^2} \cos(\omega t + \theta).$$

Los electrones de la ionósfera terrestre sometidos a la acción de ondas de radio obedecen esta ley horaria. Las oscilaciones de los electrones modifican la constante dieléctrica del medio y su índice de refracción, lo que hace que las ondas que inciden en la ionósfera con ciertos ángulos son reflejadas nuevamente hacia la Tierra.

Este efecto es inversamente proporcional a la frecuencia al cuadrado de la onda incidente por lo que ondas de muy alta frecuencia atraviesan la ionósfera.

II-6b. La fuerza aplicada depende de la velocidad.

Consideremos ahora el caso de una partícula de masa m que se mueve a lo largo del eje Ox bajo la acción de una fuerza dirigida según Ox que depende de la velocidad. En este caso la única componente trivial de la ecuación de Newton es

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F(v)$$

es decir

$$m \frac{dv}{dt} = F(v)$$

ecuación que se puede escribir en la forma

$$\frac{\dot{v}}{F(v)} = \frac{1}{m}$$

Sea $F(v)$ tal que:

$$\frac{dF(v)}{dv} = \frac{1}{F(v)}$$

es decir que F es una primitiva de la inversa de F .

Entonces

$$\dot{F}(v) = \frac{dF(v)}{dv} \dot{v} = \frac{\dot{v}}{F(v)}$$

y por lo tanto la ecuación de Newton puede escribirse

$$\dot{F}(v) = \frac{1}{m}$$

ecuación que se integra inmediatamente para dar

$$F(v) = \frac{1}{m} t + C$$

Como ya sabemos, C se determina a partir del conocimiento de la velocidad en $t = t_0$

$$v(t_0) = v_0$$

$$F(v_0) = \frac{1}{m} t_0 + C$$

y

$$F(v) - F(v_0) = \frac{1}{m} (t - t_0)$$

o sea

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v)} = \frac{t - t_0}{m}.$$

De esta ecuación podemos (en un problema físico real siempre será posible hacerlo para ciertos valores de $t > t_0$) y despejar v y obtendremos:

$$v = \frac{dx}{dt} = \varphi \left(v_0, \frac{t - t_0}{m} \right)$$

ecuación que nos permitirá calcular la ley horaria

$$x = x_0 + \int_{t_0}^t \varphi \left(v_0 \cdot \frac{t-t_0}{m} \right) dt$$

Por lo general las fuerzas unidimensionales dependientes de la velocidad son de origen viscoso o disipativo.

Por ejemplo, cuando un cuerpo se mueve en el seno de un líquido o un gas, éstos ejercen sobre el cuerpo una fuerza que se opone al movimiento, en otras palabras su sentido es opuesto al de la velocidad.

Ejemplo:

Un paracaidista está cayendo con una velocidad de 10 m/s en el instante en que se abre su paracaídas. Éste ejerce una fuerza proporcional a la velocidad $F = -bv$. Se desea determinar la constante de proporcionalidad b sabiendo que el paracaidista llega a tierra con una velocidad de 3 m/s y que su masa es de 75 kg .

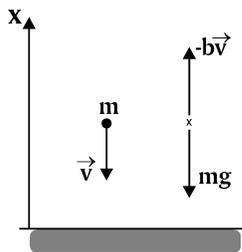


FIG. 4

La ecuación de Newton establece que:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg - bv.$$

Como v es negativa, la fuerza del paracaídas se opone a la gravitación

Integrando:

$$-\int_{v_0}^v \frac{dv}{mg + bv} = \frac{t}{m}$$

es decir

$$-\frac{1}{b} \text{Ln} \left(\frac{bv + gm}{bv_0 + gm} \right) = \frac{t}{m}$$

que se puede invertir

$$v = \left(\frac{(bv_0 + gm)}{b} \exp \left(-\frac{bt}{m} \right) \right) - \frac{gm}{b}$$

Obsérvese que el primer término decrece exponencialmente por lo que al cabo de un cierto tiempo la velocidad se hace constante e igual a:

$$v = -\frac{mg}{b}.$$

Si suponemos que cuando llega a tierra ya alcanzó dicha velocidad

$$b = 250 \frac{Ns}{m} = 250 \text{ kg/s}$$

(hemos tomado $g \cong 10 \text{ m/s}^2$)

Obsérvese que al transcurrir 0,6 segundos desde la apertura del paracaídas, el primer sumando se redujo por un factor e^{-2} .

Sustituyendo los valores numéricos resulta que

$$v = -7 \exp\left(-\frac{250}{75}t\right) - 3 \text{ m/s}$$

que gráficamente se representa por:

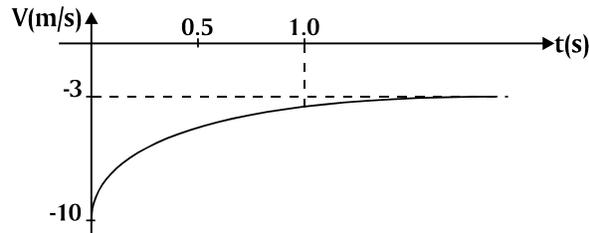


FIG. 5

y al cabo de un segundo el paracaidista prácticamente alcanzó la velocidad límite de -3 m/s.

Si deseamos calcular la distancia recorrida en el primer segundo recordemos que

$$\frac{dx}{dt} = \left(v_0 + \frac{mg}{b} \exp\left(-\frac{bt}{m}\right) - \frac{mg}{b} \right)$$

por lo tanto

$$x = x_0 - \frac{m}{b} \left(v_0 + \frac{mg}{b} \right) \left[\exp\left(-\frac{bt}{m}\right) - 1 \right] - \frac{mg}{b} t$$

$$x(1) - x_0 \cong -\frac{525}{250} - 3 = -5,1m .$$

II-6c. La fuerza aplicada depende de la posición.

En el caso de una fuerza unidimensional dependiente de la posición, la única componente no trivial de la ecuación de Newton será

$$m\ddot{x} = F(x).$$

Sea $F(x)$ una primitiva de $F(x)$, se cumplirá

$$\dot{F}(x(t)) = \frac{dF(x)}{dx} \frac{dx}{dt} = F(x)\dot{x}$$

Por lo tanto, multiplicando la ecuación de Newton por \dot{x} tendremos

$$m\dot{x}\ddot{x} = F(x)\dot{x} = \dot{F}(x)$$

que se reescribir

$$m \frac{d\left(\frac{\dot{x}^2}{2}\right)}{dt} = \dot{F}(x)$$

y por lo tanto

$$m \frac{\dot{x}^2}{2} = F(x) + C .$$

La constante C se determina a partir de las condiciones iniciales:

$$x(t_0) = x_0$$

$$\dot{x}(t_0) = \dot{x}_0$$

y conduce a

$$m \frac{\dot{x}^2}{2} - m \frac{\dot{x}_0^2}{2} = F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x F(x) dx$$

A partir de esta ecuación podemos despejar la velocidad en función de x

$$\dot{x}^2 = \dot{x}_0^2 + \int_{x_0}^x 2 \frac{F(x)}{m} dx$$

o sea

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\dot{x}_0^2 + \int_{x_0}^x \frac{2F(x)}{m} dx}$$

donde se debe comenzar escogiendo el signo correspondiente a la velocidad en el instante inicial

para asegurar que $\left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=0} = \dot{x}_0$.

Dicho signo no cambiará mientras no se anule el radicando. Analizaremos con más detalle este tipo de fuerzas en el próximo capítulo.

Ejemplo:

Uno de los movimientos más importantes observados en la naturaleza es el movimiento oscilatorio. El ejemplo más simple de una partícula con movimiento oscilatorio se obtiene considerando una masa m unida a un resorte de constante k . Si x es el estiramiento del resorte, éste ejerce una fuerza restauradora

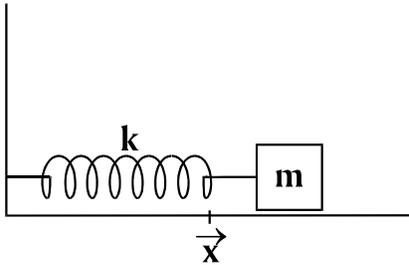


FIG. 6

$F = -kx$ que tiende a llevar la masa a la posición de equilibrio. La relación anterior, llamada Ley de Hooke describe el comportamiento de los sistemas elásticos bajo pequeñas deformaciones. Si las deformaciones son grandes y superan el llamado límite de elasticidad, las fuerzas dejan de ser proporcionales a la deformación.

Para estudiar este movimiento debemos resolver

$$m\ddot{x} = -kx$$

ecuación que conduce como hemos visto a

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\dot{x}_0^2 - \frac{2k}{m} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2} \right)}$$

donde hemos supuesto que $\dot{x}_0 > 0$.

Definamos

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

y

$$\omega^2 A^2 = \dot{x}_0^2 + \omega^2 x_0^2$$

La ecuación puede ahora reescribirse

$$\frac{dx}{dt} = \omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

o sea

$$\frac{\dot{x}}{\omega \sqrt{A^2 - x^2}} = 1$$

Relación que se puede integrar

$$\int_{t_0}^t \frac{\dot{x} dt}{\omega \sqrt{A^2 - x^2}} = t - t_0$$

y haciendo el cambio de variable $x(t) = x$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \omega(t - t_0)$$

La integral se evalúa fácilmente considerando el cambio de variable

$$x = A \operatorname{sen} \theta \quad dx = A \cos \theta \, d\theta$$

y recordando que el signo de la raíz cuadrada debe cambiar cada vez que se anula el radicando

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \omega(t - t_0)$$

es decir

$$\theta = \omega(t - t_0) + \theta_0$$

y definiendo

$$\delta = -\omega t_0 + \theta_0$$

resulta

$$x = A \operatorname{sen}(\omega t + \delta)$$

que es la ley horaria del movimiento armónico simple.

II-7. La tercera Ley de Newton.

Hasta ahora hemos considerado problemas en que las fuerzas que intervienen obedecen leyes de fuerzas conocidas, ya sea porque están asociadas a un campo de fuerzas como es el caso de las fuerzas gravitatorias o de las fuerzas eléctricas y magnéticas, ya sea porque representan a ciertos objetos externos que actúan sobre el sistema como es el caso de un resorte o de un fluido. Sin embargo, en muchos casos interesa estudiar el movimiento de dos o más cuerpos en interacción. La Tercera Ley de Newton permite estudiar la interacción mutua entre dos cuerpos. Ella establece que:

Si un cuerpo A ejerce sobre otro cuerpo B una fuerza \vec{F}_{AB} entonces B ejerce sobre A una fuerza igual y contraria $\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB}$

Esta ley también es conocida como Ley de acción y reacción. Si la fuerza ejercida sobre el cuerpo A se denomina acción de B sobre A, entonces la fuerza que ejerce A sobre B se denomina la reacción de A sobre B.

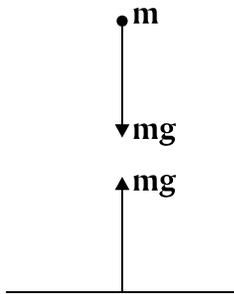


FIG. 7

Obsérvese que las fuerzas de acción y reacción nunca pueden equilibrarse entre sí, ya que actúan sobre objetos diferentes. Por ejemplo, una partícula que cae libremente sufre una fuerza dirigida hacia abajo igual a su peso. Una fuerza igual y opuesta es ejercida por la partícula sobre la Tierra. La aplicación de la Segunda Ley de Newton a la partícula nos dice que ésta tendrá una aceleración dirigida hacia abajo igual a g . La aceleración hacia arriba debida a la fuerza de la partícula sobre la Tierra será despreciable debido al enorme valor de la masa terrestre.

La Tercer Ley de Newton sólo vale en forma exacta para interacciones entre cuerpos en contacto.

Cuando las fuerzas se producen con la mediación de un campo, como en el caso de las fuerzas electromagnéticas, La Tercera Ley en general ya no es válida.

Ejercicio:

Discutir qué ocurre con la Tercera Ley en el ejemplo de la Sección II-6 de los electrones de la ionósfera acelerados por ondas de radio.

II-8. Aplicaciones simples de las leyes de Newton

II-8a- Sistemas ligados.

A partir de los ejemplos estudiados hasta el momento podría concluirse que cualquier problema de mecánica se reduce en el fondo a resolver las ecuaciones de Newton para distintas formas de las fuerzas actuantes. Esta conclusión sería por lo general incorrecta ya que en la mayor parte de los casos, los movimientos de la partícula están restringidos por vínculos y ligaduras.

Un carrito se mueve sobre el riel de una montaña rusa, las moléculas de un gas obligado a moverse en el interior de un recipiente que lo contiene, la masa de un péndulo simple que se mueve sobre una circunferencia, son los ejemplos de movimientos vinculados. Las ligaduras introducen dos tipos de dificultades, en primer lugar las coordenadas del vector \vec{r} dejan de ser todas independientes y pasan a estar relacionadas por las ecuaciones de los vínculos. En segundo lugar, las fuerzas que ejercen las ligaduras (por ejemplo la fuerza del riel sobre el carrito) no se conocen y es necesario incluirlas entre las incógnitas del problema.

Para ilustrar cómo se procede al análisis de un sistema ligado, consideremos el siguiente ejemplo sumamente simple. Sea un bloque apoyado sobre una mesa horizontal sin fricción sobre el cual actúa una fuerza horizontal \vec{F} .

El bloque debe cumplir en su movimiento la ecuación de ligadura

$$z = 0$$

Por consiguiente además la fuerza \vec{F} y el peso $-mg\vec{k}$ debe actuar una fuerza de ligadura \vec{N} que asegure que la partícula permanezca en el plano. Obsérvese que, si bien hemos agregado una nueva incógnita, la fuerza \vec{N} perpendicular al plano, también hemos incluido una nueva ecuación, la ligadura. De modo que las ecuaciones son:

a) Ligadura

$$z = 0$$

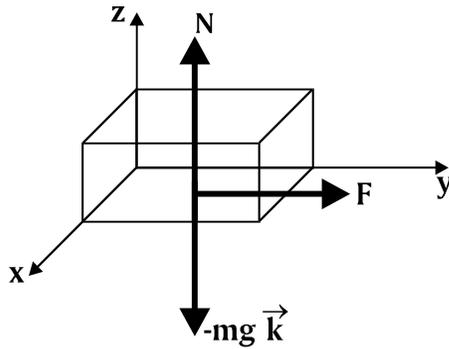


FIG. 8

la forma general de encarar los problemas dinámicos.

b) Componentes horizontales

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

c) Componentes verticales

$$m\ddot{z} = N - mg$$

Pero $\ddot{z} = 0$ y por lo tanto $N = mg$, y las ecuaciones de Newton conjuntamente con las ecuaciones de ligaduras nos permiten determinar el movimiento y las fuerzas vinculares.

Este ejemplo sencillo ilustra cuál es

- 1) Identifíquese el cuerpo cuyo movimiento se desea estudiar.
- 2) Identifíquese los objetos que interactuarán con el mismo y las ligaduras a las que está sometido.
- 3) Elijase un sistema de referencia inercial, fijando el origen y la orientación de los ejes con el objeto de simplificar el problema.
- 4) Hágase un diagrama, llamado diagrama del cuerpo libre, mostrando el sistema de referencia y todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo, incluyendo aquellos que sustituyen a las ligaduras.
- 5) Aplíquese la Ecuación de Newton.

Ejemplo 1:

Considere las masas m_1 y m_2 desiguales conectadas por una cuerda que pasa sobre una polea sin fricción de masa despreciable. Encuentre la tensión de la cuerda y la aceleración de las masas.

Debemos considerar las ecuaciones de movimiento de ambos cuerpos.

Sobre m_1 actúa la aceleración gravitatoria y la cuerda, lo mismo ocurre con m_2 . Las dos masas están obligadas a moverse según la dirección vertical.

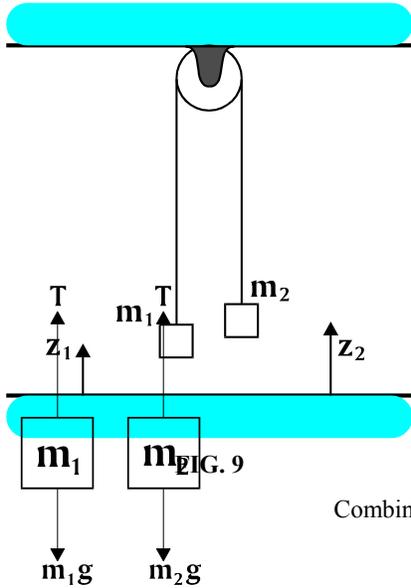


FIG. 10

Obsérvese que cuando $m_1 = m_2, T = mg$ y $\ddot{z}_1 = \ddot{z}_2 = 0$.

Elijamos un eje de coordenadas Oz orientado hacia arriba. Sea z_1 la coordenada de m_1 y z_2 la de m_2 . Como ambas están unidas por la cuerda que pasa por la polea, cumplen con la condición de ligadura

$$z_1 + z_2 = \text{Constante.}$$

Los diagramas del cuerpo libre son los que se muestran en la figura.

La ecuación de movimiento para m_1 es $m_1 \ddot{z}_1 = T - m_1 g$ y para m_2 : $m_2 \ddot{z}_2 = T - m_2 g$, pero debido a la ligadura:

$$\ddot{z}_1 + \ddot{z}_2 = 0 \quad , \quad \ddot{z}_1 = -\ddot{z}_2 .$$

Combinando estas ecuaciones se obtiene:

$$\ddot{z}_1 = \frac{(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} g$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g .$$

Ejemplo 2 :

Movimiento circular.

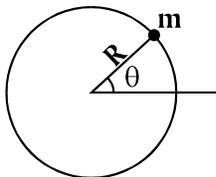


FIG. 11

Consideremos el movimiento de una partícula obligada a moverse a lo largo de una trayectoria circular.

Conviene trabajar en coordenadas polares con origen en el centro de la circunferencia. La ecuación de la ligadura es:

$$r = R$$

y por consiguiente si suponemos que sobre la masa m actúa una fuerza cualquiera

$$\vec{F} = F_c \vec{e}_r + F_T \vec{e}_\theta$$

Las ecuaciones de movimiento toman la forma:

$$-mR\dot{\theta}^2 = F_c = -m \frac{v^2}{R}$$

$$mR\ddot{\theta} = F_T$$

Vemos que F_T llamada fuerza tangencial es la responsable del cambio de la velocidad angular, mientras que F_c está dirigida hacia el centro y es responsable del cambio de dirección de la velocidad.

II-8. Fuerzas de fricción.

Existe un tipo de fuerzas que hemos ignorado hasta el momento que son muy importantes en la vida cotidiana. Cuando hay dos cuerpos en contacto tal como el caso de un libro sobre una mesa, se ejerce una fuerza que se opone al movimiento relativo entre los dos cuerpos. Supongamos por ejemplo que empujamos el libro a lo largo de la mesa, luego de ser soltado el libro disminuye su velocidad hasta detenerse. Su cantidad de movimiento disminuye debido a la acción de una fuerza opuesta al movimiento. Dicha fuerza se denomina fricción cinética y se debe a la interacción entre moléculas de los dos cuerpos en contacto.

Aunque el fenómeno de fricción, visto a nivel microscópico, es muy complicado y resulta del efecto estadístico de un gran número de interacciones, para muchos propósitos prácticos puede describirse con buena aproximación en términos de leyes empíricas muy simples.

La fuerza de fricción cinética, que se ejerce entre dos cuerpos en movimiento relativo, es proporcional a la fuerza normal de contacto entre los dos cuerpos y su dirección y sentido es opuesto al de la velocidad relativa de entre ambos

$$\vec{F}_c = \mu_c N \vec{u}_v \quad \text{con} \quad \vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

La constante de proporcionalidad se denomina coeficiente cinético de fricción y depende de los materiales en contacto.

Supongamos por ejemplo que sobre un cuerpo de masa m actúa una fuerza F que lo desplaza con respecto a la superficie de apoyo como indica la figura.

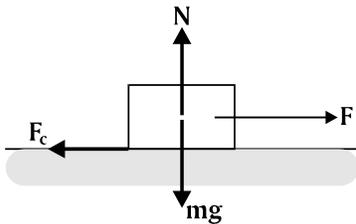


FIG. 12

Si \vec{v} es el vector velocidad del cuerpo y

$$\vec{u}_v = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$$

la ecuación del movimiento del cuerpo se escribe:

$$m\vec{a} = \vec{F} - \mu_c N \vec{u}_v = \vec{F} - \mu_c mg \vec{u}_v$$

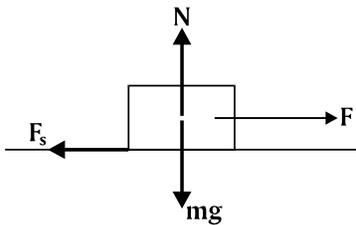


FIG. 13

En el caso en que los dos cuerpos en contacto están en reposo relativo, la fricción se opone a la puesta en movimiento de un cuerpo respecto al otro. Es decir que si se aplica una fuerza F suficientemente pequeña sobre un cuerpo en reposo, aparece en la superficie de contacto una fuerza igual y contraria F_s , llamada fricción estática. Los valores que puede tomar la fuerza de fricción estática están acotados por:

$$F_s \leq \mu_s N$$

donde μ_s es llamado coeficiente de fricción estática. Obsérvese que μ_s y μ_c son adimensionados y por lo general se cumple que $\mu_s > \mu_c$ para dos superficies dadas.

Ejemplo:

Se considera un cuerpo apoyado en un plano inclinado que forma un ángulo α con la horizontal. El coeficiente de fricción estática es μ_s y el cinético μ_c . Se va aumentando lentamente la pendiente del plano inclinado hasta que el bloque comienza a deslizar. a) Determinar el valor de α para el cual el bloque comienza a deslizar. b) Determinar la aceleración del bloque para ese valor de α .

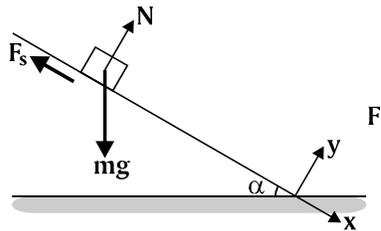


FIG. 14

Las componentes de la ecuación de Newton son:

$$\begin{cases} N - mg \cos \alpha = 0 \\ mg \sin \alpha - F_s = 0 \end{cases}$$

y la condición de no deslizamiento

$$F_s \leq \mu_s N$$

es decir

$$mg \sin \alpha \leq \mu_s mg \cos \alpha$$

o sea

$$\tan \alpha \leq \mu_s.$$

Por lo tanto el cuerpo comenzará a deslizar cuando la pendiente del plano inclinado supere el valor del coeficiente estático de fricción. Una vez que el cuerpo comienza a deslizar se

$$\text{tendrá: } mg \sin \alpha - \mu_c mg \cos \alpha = ma \text{ o}$$

$$\text{sea } a = g \cos \alpha (\tan \alpha - \mu_c) = \frac{g}{\sqrt{1 + \mu_s^2}} (\mu_s - \mu_c)$$

II-9 Sistemas de referencia no inerciales.

Las leyes de Newton se refieren repetidamente a los sistemas de referencia inerciales. En efecto, la primera ley establece que:

Newton I. : Cuando ninguna fuerza actúa sobre un cuerpo, su velocidad con respecto a un sistema de referencia inercial es constante.

Newton II. : En un sistema de referencia inercial, el ritmo de cambio del movimiento de una partícula es igual a la fuerza neta que actúa sobre ella.

La primera ley, que podemos tomar como definición de los sistemas inerciales, nos dice que miremos a los cuerpos sobre los que no actúa ninguna fuerza. En rigor, tales cuerpos no existen pues fuerzas como la de gravitación tienen carácter universal, por lo que en general se termina trabajando en sistemas suficientemente inerciales como para que las leyes valgan. Lo más parecido a un sistema inercial

que se puede concebir se puede lograr alejándose de todo sistema gravitante, la tierra, el sistema solar y hasta las galaxias. En algún punto entre las galaxias y consideremos un conjunto de pequeñas objetos suficientemente alejados entre sí como para que su atracción gravitacional sea despreciable. Coloquemos el origen de nuestro sistema de coordenadas en uno de ellos y orientemos los ejes de modo que los otros se muevan con velocidad uniforme. Hemos conseguido de manera bastante poco práctica un sistema muy parecido a uno inercial.

Si lo lográramos observaríamos que las galaxias lejanas se ven como aproximadamente fijas desde nuestro sistema de referencia.

En la práctica trabajamos con sistemas más o menos inerciales según nuestras necesidades. Si somos ingenieros civiles, por ejemplo, la tierra se comporta como un sistema suficientemente inercial. Si somos meteorólogos, que trabajamos con grandes desplazamientos de las masas de aire, debemos tomar en consideración la rotación de la tierra y trabajar con un sistema con los ejes apuntando a algunas estrellas próximas. Los astrónomos en cambio deben tomar en cuenta la rotación del sol en torno al centro de la galaxia y trabajar con sistemas inerciales apuntando a las galaxias próximas.

Los sistemas inerciales son sistemas de referencia donde las leyes de Newton I y II tomen la forma particularmente sencilla que hemos mostrado. Para describir el movimiento respecto a un sistema cualquiera, vamos a relacionar la posición, velocidad y aceleración de dos sistemas que se mueven arbitrariamente uno respecto al otro.

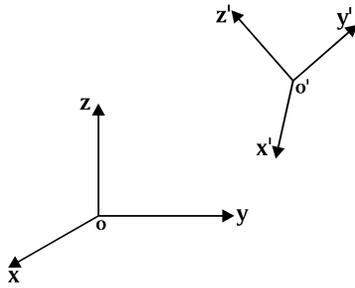


FIG. 15

Sea $Oxyz$ un sistema de referencia inercial y $O'x'y'z'$ un sistema que se traslada y rota respecto de $Oxyz$. Una partícula libre seguirá un movimiento rectilíneo con velocidad uniforme respecto de $Oxyz$, mientras que vista desde $O'x'y'z'$, describirá un movimiento curvilíneo complicado por lo que el sistema $O'x'y'z'$ no es inercial.

Recordemos lo establecido por el teorema de Roverbal, la aceleración \vec{a} respecto de $Oxyz$ y la aceleración \vec{a}' respecto de $O'x'y'z'$ están relacionadas por:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_C$$

donde

$$\vec{a}_T = \vec{a}_{oo'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$$

era la aceleración de transporte de la partícula y

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

la aceleración de Coriolis.

Sea \vec{F} la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula, es decir que dicha fuerza sustituye a todas las interacciones de la partícula con el medio que la rodea.

En el sistema de referencia inercial $Oxyz$ la dinámica de la partícula estará descrita por la segunda Ley de Newton.

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

Respecto al sistema no inercial $O'x'y'z'$ la aceleración es \vec{a}' y por lo tanto si

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_T - m\vec{a}_C$$

la descripción del movimiento dado por esta ecuación coincidirá con la obtenida en el sistema inercial.

Podemos escribir la ecuación en el sistema no inercial en la forma

$$m\vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_{NI}$$

con

$$\vec{F}_{NI} = -m\vec{a}_T - m\vec{a}_C$$

las fuerzas \vec{F}_{NI} son llamadas no inerciales o ficticias ya que no son ejercidas por ningún agente externo y aparecen solamente porque nos encontramos en un sistema no inercial. Sin embargo, un observador situado en un sistema no inercial experimentaría dicha fuerza como real, tal es el caso por ejemplo de los pasajeros de un coche que toma una curva a alta velocidad y experimenta la llamada fuerza centrífuga.

Ejemplo 1:

Para ilustrar cómo es posible describir la misma situación desde diferentes puntos de vista, uno inercial y no inercial el otro, consideremos un péndulo simple suspendido desde el vagón de un tren que sufre una aceleración \vec{a} hacia adelante.

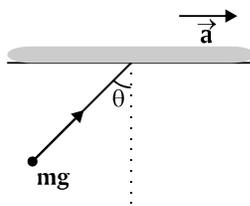


FIG. 16

Vista desde la tierra (que es un sistema aproximadamente inercial) la situación sería la siguiente:

La masa debe acelerarse junto con el vagón. Por lo tanto:

$$\begin{cases} T \cos\theta - mg = 0 \\ T \sin\theta = ma \end{cases}$$

de los cuales resulta $\tan\theta = \frac{a}{g}$

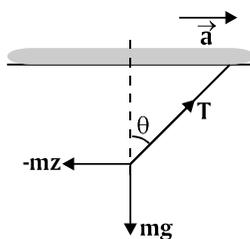


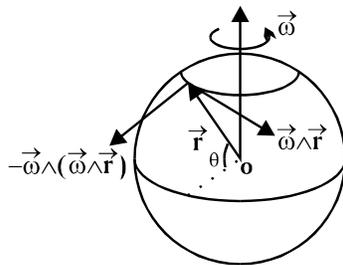
FIG. 17

En el sistema acelerado del vagón, la masa está en reposo, de modo que su aceleración relativa es $a' = 0$, pero las fuerzas se equilibran debido a la aparición de una fuerza ficticia $-ma$.

Por lo tanto las ecuaciones de Newton son idénticas a las planteadas en el sistema inercial y el ángulo de inclinación del péndulo es el mismo.

Ejemplo 2:

Hasta el momento hemos tratado en todos los ejemplos a la Tierra como sistema inercial.

**FIG. 18**

Debido fundamentalmente al movimiento de rotación en torno a su eje polar con frecuencia $\omega = \frac{2\pi}{1 \text{ día}} = 7.3 \times 10^{-5} \frac{1}{s}$ la Tierra no es un sistema inercial.

En efecto, visto desde un sistema inercial (que no gira) situado en O, un cuerpo situado en las proximidades de la superficie de la Tierra con vector posición \vec{r} respecto al centro de la Tierra está sometido únicamente a la acción gravitatoria. Es decir:

$$m\vec{a} = -G \frac{mM_T \vec{r}}{r^2 r}$$

donde m es la masa del cuerpo y M_T la de la Tierra.

La relación entre la aceleración absoluta \vec{a} y la aceleración relativa a la Tierra \vec{a}' estará dada por:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_T + \vec{a}_C$$

con

$$\vec{a}_T = \vec{a}_0 + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

y

$$\vec{a}_C = 2\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

ya que hemos supuesto que el sistema inercial tiene origen en O y la velocidad angular es aproximadamente constante.

Por lo tanto, la ecuación de Newton en el sistema de la Tierra se escribe:

$$m\vec{a}' = -G \frac{mM_T \vec{r}}{r^2} - m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$$

La llamada aceleración de la gravedad \vec{g} se define como

$$\vec{g} = -\frac{GM_T}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} - \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

y debido a la aceleración de arrastre o centrífuga no está dirigida hacia la Tierra.

La dirección de \vec{g} define lo que se llama la vertical y se aparta ligeramente de la dirección radial. Calculemos la aceleración centrífuga a 35° de latitud, $\theta = 35^\circ$.

$$|\vec{\omega} \times \vec{r}| = \omega r \sin(90 - \theta) = \omega r \cos \theta$$

y

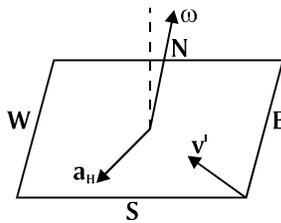
$$|\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})| = \omega^2 r \cos \theta = 3,3 \cdot \cos 35^\circ \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$$

donde r es el radio de la Tierra,

$$r = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$$

Consideremos ahora el término de Coriolis. Deseamos estudiar sus efectos sobre un cuerpo que se mueve en un plano horizontal, en una latitud θ vertical.

La velocidad angular dividida según el eje de la terna forma un ángulo λ con el plano horizontal.



Su componente vertical es nula.

$$\omega_v = \omega \sin \lambda$$

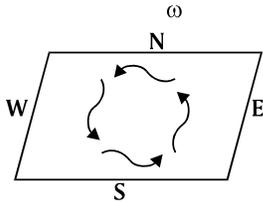
y la horizontal :

$$\omega_h = \omega \cos \lambda$$

FIG. 19

La componente horizontal de ω producirá una aceleración de Coriolis según la vertical cuyo efecto es despreciable en comparación con la aceleración de la gravedad y la componente vertical de ω producirá una desviación de la partícula de valor:

$$\vec{a}_H = 2\vec{\omega}_v \times \vec{v}' \quad , \quad |\vec{a}_H| = 2\omega \sin \lambda v'$$



El efecto de la aceleración de Coriolis puede verse en la formación de remolinos en los huracanes. Si se desarrolla un centro de baja presión en la atmósfera, el aire fluye hacia esa región.

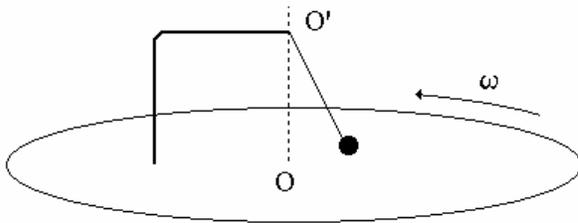
La fuerza no inercial debida a la aceleración de Coriolis desvía las moléculas de aire hacia la derecha en hemisferio norte dando lugar a la formación del vórtice que gira en sentido contrario a las agujas del reloj.

En el hemisferio sur ω_v es negativa y el sentido del vórtice del huracán es por consiguiente según las agujas del reloj.

Ejemplo 3:

Péndulo de Foucault.

Se coloca un péndulo sobre una tabla rotatoria de modo que este suspendido de O' que se encuentra sobre la vertical que pasa por el centro de la tabla. Se hace rotar la mesa con el péndulo en reposo y luego se le imprime una velocidad a la masa m ; el movimiento respecto al sistema inercial será en un plano. Respecto a la mesa rotatoria aparecerá un término de Coriolis



$-2\vec{\omega} \times \vec{v}$ que impartirá a la masa una aceleración tangencial. El observador parado en la mesa verá que el péndulo describe un movimiento como el mostrado en la figura.

Como la tierra no es un sistema inercial y rota una vuelta cada 24hs. en torno al eje polar, un observador situado en la superficie terrestre observará en un péndulo un efecto similar al de la

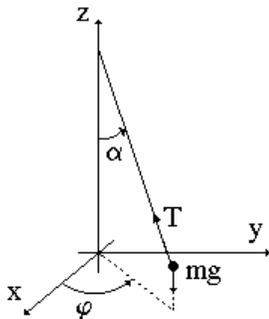
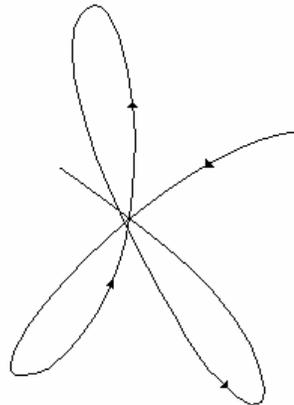


figura.

$$z = l - l \cos \alpha \quad \alpha \ll 1$$

$$\text{oscilaciones } x = l \sin \alpha \cos \varphi$$

lo

$$\sin \alpha \approx \alpha \quad y = l \sin \alpha \sin \varphi$$

pequeñas
 $\cos \alpha \approx 1$ por
 tanto

$$z \approx 0, \quad \frac{x}{l} \ll 1, \quad \frac{y}{l} \ll 1 \quad T_x = -T \operatorname{sen} \alpha \cos \varphi = -\frac{Tx}{l} \quad T_y = -T \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \varphi = -\frac{T y}{l}$$

$T_z = T \cos \alpha \approx T$ La ecuacion de Newton en el sistema terrestre establece que:

$$\vec{T} + m\vec{g}\vec{k} - 2\vec{\omega} \times \vec{V}_R = m\vec{a}_R$$

Si tomamos \vec{k} según la normal saliente y \vec{i} en la direccion tangente al meridiano por el punto.

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_z \vec{k}$$

$$\omega_x \approx -\omega \cos \alpha_L = -\omega \cos 35^\circ$$

$$\omega_z = -\omega \operatorname{sen} \alpha_L = -\omega \operatorname{sen} 35^\circ$$

$$\text{con } \omega = \frac{2\pi}{86400\text{s}} \approx 7,3 \times 10^{-5} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{V}_R = (\omega_x \vec{i} + \omega_z \vec{k}) \times (\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}) = -\omega_z \dot{y}\vec{i} + \omega_z \dot{x}\vec{j} + \omega_x \dot{y}\vec{k}$$

$$m\ddot{x} = T_x + 2m\omega_z \dot{y}, \quad m\ddot{y} = T_y + 2m\omega_z \dot{x}, \quad 0 = T - mg - 2m\omega_x \dot{y} \quad \text{Por lo tanto:}$$

$$T_x = -\frac{Tx}{l} = -\frac{mgx}{l} - \frac{2m\omega_x \dot{y}x}{l} \approx -\frac{mgx}{l} \quad \text{ya que el segundo sumando es de orden } \alpha^2.$$

analogamente $T_y = -\frac{mgy}{l}$. Y sustituyendo en la ecuacion de Newton

$$\text{resulta: } \ddot{x} = -\frac{gx}{l} + 2\omega_z \dot{y}, \quad \ddot{y} = -\frac{gy}{l} - 2\omega_z \dot{x}$$

$\frac{g}{l} = \omega_o^2$ caracteriza la frecuencia de las oscilaciones del

$$\text{pendulo. } \ddot{x} + \omega_o^2 x = 2\omega_z \dot{y} \quad \ddot{y} + \omega_o^2 y = -2\omega_z \dot{x}$$

Si $\omega_z = 0$ (en el ecuador por ejemplo) se recuperan las pequeñas oscilaciones usuales del péndulo.

Para resolver el sistema de ecuaciones diferenciales se introduce la variable compleja: $q = x + iy$. Entonces, multiplicando la segunda ecuación por i y sumando se obtiene: $\ddot{q} + \omega_0^2 q = -2\omega_z i \dot{q}$ que admite soluciones de la forma: $q = Ae^{\beta t}$ A, β constantes. Donde se debe cumplir que: $\beta^2 + \omega_0^2 + 2i\omega_z \beta = 0$.

$$\beta = -i\omega_z \pm \sqrt{-\omega_z^2 - \omega_0^2}, \text{ como } \omega_z \ll \omega_0, \beta \approx -i\omega_z \pm i\omega_0. \text{ Por lo tanto: } q(t) = (\cos \omega_z t - i \operatorname{sen} \omega_z t) [(A+B) \cos \omega_0 t + i(A-B) \operatorname{sen} \omega_0 t]$$

Para el análisis del movimiento, tomamos condiciones iniciales tales que $A-B=0$, de este modo el desplazamiento de la masa en $t=0$ es según el eje Ox .

$$\begin{aligned} x(t) &= 2A \cos \omega_0 t \cos \omega_z t \\ y(t) &= -2A \cos \omega_0 t \operatorname{sen} \omega_z t \end{aligned}$$

El período de rotación en el plano horizontal es $T = \frac{2\pi}{\omega_z}$.

CAPÍTULO III

TRABAJO Y ENERGÍA

"De todos los conceptos físicos, el de energía es probablemente el de más vasto alcance. Todos, con formación técnica o no, tienen una percepción de la energía y lo que esta palabra significa. Energía es lo que debemos pagar para que las cosas se hagan.... La energía es la moneda universal que existe en incontables variedades; cada proceso físico representa una conversión de esta moneda de una variedad a otra. "

A.P French
Newtonian mechanics(1971)

TRABAJO Y ENERGÍA

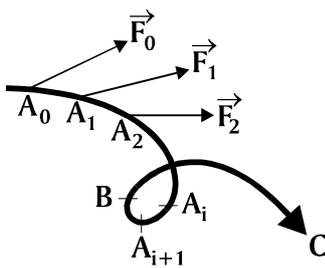
III-1. Introducción

Cuando las fuerzas que actúan sobre una partícula se pueden expresar como función de la posición, es decir $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(x, y, z)$, los métodos de integración de las ecuaciones de Newton descritas en el capítulo anterior no son en general suficientes. En efecto, sólo podemos resolver el caso de fuerzas unidimensionales $\vec{F} = F(x)\vec{i}$.

Veremos en este capítulo que los conceptos de trabajo y energía nos resultarán útiles para la descripción de movimientos sometidos a este tipo de fuerzas.

En este capítulo hace su primera aparición un concepto que tiene fundamental importancia en todas las ramas de la física: el concepto de energía. La clave del inmenso valor del concepto de energía radica en su conservación. En este capítulo veremos algunos ejemplos en que la energía mecánica se conserva y que, en los casos en que hay pérdida de energía mecánica, siempre es posible reconocer otras formas de energía que aseguran su conservación.

III-2 Trabajo.



Consideramos una partícula A que se mueve a lo largo de la curva C bajo la acción de una fuerza \vec{F} que puede variar a lo largo de C. Si se consideran desplazamientos suficientemente pequeños $\Delta_1 \vec{r} = \vec{A_0 A_1}$ la fuerza \vec{F} se podrá considerar aproximadamente constante en este intervalo e igual a \vec{F}_0 . El trabajo efectuado por la fuerza \vec{F} en dicho desplazamiento se define por el producto escalar

$$\Delta_1 W = \vec{F}_0 \cdot \Delta_1 \vec{r}$$

El trabajo total ejercido sobre la partícula cuando ésta se mueve de A a B a lo largo de la curva C es la suma de los trabajos efectuados producidos en los sucesivos desplazamientos infinitesimales

$$W_{AB} = \lim_{\Delta_i \vec{r} \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N \vec{F}_i \cdot \Delta_i \vec{r} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Dicho límite es conocido como la integral a lo largo de la curva C entre los puntos A y B. A pesar de que el concepto de integral sobre una curva es nuevo, en muchos casos es posible evaluar directamente la sumatoria. Para poder calcular el trabajo debemos conocer \vec{F} en función de x, y, z y la ecuación de la trayectoria seguida por la partícula.

Si la curva C está dada en forma paramétrica

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{r}(\lambda) \\ \text{tal que} \quad \vec{r}(\lambda_A) &= \vec{r}_A \text{ y } \vec{r}(\lambda_B) = \vec{r}_B \end{aligned}$$

entonces consideramos una partición de la curva en pequeños intervalos es la misma que divide el intervalo AB

$$\Delta_i \vec{r} = \vec{r}(\lambda_{i+1}) - \vec{r}(\lambda_i)$$

y se puede calcular el trabajo mediante una integral ordinaria, en efecto

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \lim_{\Delta_i \lambda \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N \vec{F}(\vec{r}(\lambda_i)) \cdot (\vec{r}(\lambda_{i+1}) - \vec{r}(\lambda_i)) \\ &= \lim_{\Delta \lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \vec{F}(\vec{r}(\lambda_i)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\lambda} \Delta_i \lambda \\ &= \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \vec{F}(\vec{r}(\lambda)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\lambda} d\lambda \end{aligned}$$

$$\int_{\lambda_A}^{\lambda_B} [F_x(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))x'(\lambda) + F_y(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))y'(\lambda) + F_z(x(\lambda), y(\lambda), z(\lambda))z'(\lambda)] d\lambda$$

Calculemos ahora el trabajo en algunos casos simples.

Ejemplo 1

Trabajo ejercido por una fuerza constante $\vec{F} = \vec{F}_0$ para desplazar una partícula de A a B a lo largo de la curva C

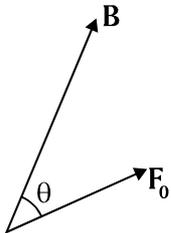
$$W_{AB} = \lim_{\Delta_i r \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N \vec{F}_0 \cdot \Delta_i \vec{r}$$

como \vec{F}_0 es constante podemos usar la distributiva del producto escalar y escribir:

$$\begin{aligned} W_{AB} &= \vec{F}_0 \cdot \lim_{\Delta_i r \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N \Delta_i \vec{r} \\ &= \vec{F}_0 \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) \end{aligned}$$

ya que la suma de los desplazamientos $\Delta_i \vec{r}$ es el desplazamiento total de A hasta B.

Vemos que en este caso el trabajo realizado por la fuerza constante no depende de la curva C elegida para ir de A hasta B. Mas adelante veremos que las fuerzas que realizan un trabajo independiente del recorrido se llaman conservativas. Las fuerzas constantes son por lo tanto un ejemplo de fuerzas conservativas.

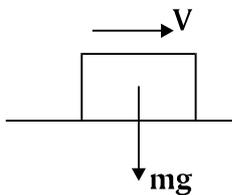


El trabajo de una fuerza constante para llevar una partícula de A a B es como hemos visto

$$W_{AB} = \vec{F}_0 \cdot \vec{r}_{AB} = |F_0| d_{AB} \cos \theta$$

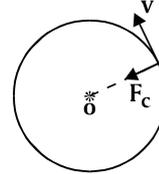
Por lo tanto, una fuerza constante que es perpendicular al vector desplazamiento realiza un trabajo nulo.

Por ejemplo, el trabajo ejercido por la fuerza de gravedad sobre un cuerpo que se mueve sobre un plano horizontal es nulo.



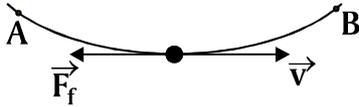
Otro ejemplo de fuerza que ejerce un trabajo nulo es la fuerza centrípeta \vec{F}_c en un movimiento circular. En efecto

$$W = \lim_{\Delta_i r \rightarrow 0} \sum_i \vec{F}_c^i \cdot \Delta_i \vec{r} = 0$$



ya que cada sumando es nulo por ser F_c^i perpendicular al desplazamiento $\Delta_i r$ dirigido según la tangente.

Ejemplo 2 Trabajo ejercido por la fuerza de fricción sobre un cuerpo apoyado sobre un plano horizontal. Deseamos calcular el trabajo ejercido por la fuerza



$$F_f = -\mu_c mg \vec{u}_v$$

sobre un cuerpo que se desplaza de A a B a lo largo de la curva C

$$W_{AB} = \lim_{\Delta_i r \rightarrow 0} \sum_i F_f^i \cdot \Delta_i \vec{r}$$

En el límite cuando los desplazamientos tienden a cero, su dirección coincide con la de la tangente, de modo que

$$\Delta_i \vec{r} = |\Delta_i \vec{r}| \vec{u}_v^i = \Delta_i l \vec{u}_v^i$$

donde $\Delta_i l$ es la longitud del arco recorrido para ir de r_i a $r_i + \Delta_i r$

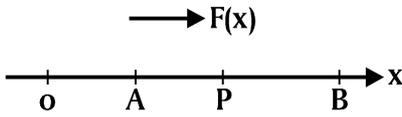
Por lo tanto

$$W_{AB} = \lim_{\Delta_i l \rightarrow 0} \sum_i -\mu_c mg \Delta_i l = -\mu_c mg l_{AB}^c$$

donde l_{AB}^c es la longitud de la curva C entre A y B.

El trabajo es siempre negativo y proporcional a la longitud de la curva recorrida para ir de A a B. En este ejemplo, el trabajo depende de la trayectoria elegida para ir de A a B a través de su longitud y por lo tanto las fuerzas de fricción son un ejemplo de fuerzas no conservativas.

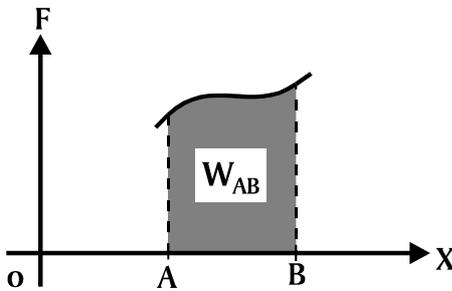
Ejemplo 3 Caso general unidimensional



Consideremos en este ejemplo el caso de una partícula que se mueve a lo largo del eje OX sometido a una fuerza general que depende de la posición $F(x)\vec{i}$.

El trabajo realizado por $F(x)$ en el desplazamiento de A a B estará dado por

$$W_{AB} = \lim_{\Delta_i x \rightarrow 0} \sum_i F(x_i) \Delta_i x = \int_{x_A}^{x_B} F(x) dx$$



Si $F(x)$ es una primitiva de $F(x)$:

$$W_{AB} = F(x_B) - F(x_A)$$

y por lo tanto en este caso el trabajo se puede expresar en términos de la posición inicial y final, por lo que las fuerzas unidimensionales que no dependen únicamente de la posición siempre son conservativas.

Si $F(x)$ es la fuerza producida por un resorte

$$F(x) = -kx$$

$$W_{AB} = -\int_{x_A}^{x_B} kx dx = -\frac{k x_B^2}{2} + \frac{k x_A^2}{2} = \frac{-k}{2}(x_B^2 - x_A^2)$$

En el caso en que actúan varias fuerzas $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots$ sobre una partícula, los trabajos realizados por cada una de ellas en un pequeño desplazamiento $\Delta\vec{r}$ serán:

$$\Delta W_1 = \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r}, \Delta W_2 = \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{r}, \Delta W_3 = \vec{F}_3 \cdot \Delta\vec{r}$$

El trabajo total se define como la suma

$$\begin{aligned} \Delta W &= \vec{F}_1 \cdot \Delta\vec{r} + \vec{F}_2 \cdot \Delta\vec{r} + \vec{F}_3 \cdot \Delta\vec{r} \\ &= (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3) \Delta\vec{r} \end{aligned}$$

$$= \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}$$

que es el trabajo realizado por la resultante de las fuerzas aplicadas.

En el sistema MKS, cuyas unidades básicas son el metro, el kilogramo y el segundo, las fuerzas se miden en Newtons y por lo tanto el trabajo que se expresa en términos de productos de fuerzas por distancias se expresa en Newton metro, llamado Joule, y que se abrevia J .

$$1J = 1N m = 1kg m/s^2 m = 1kg m^2/s^2$$

En el sistema CGS de unidades, las unidades básicas son el centímetro, el gramo y el segundo, y las fuerzas se miden en dinas.

$$1 \text{ dina} = 1 \text{ gr cm}/s^2$$

y el trabajo se expresa en ergios

$$\begin{aligned} 1 \text{ erg} &= 1 \text{ dina} \times \text{cm} = 1 \text{ g cm}^2/s^2 \\ &= 10^{-7} J \end{aligned}$$

III-3 Potencia.

Consideremos una partícula con velocidad instantánea \vec{v} . En un pequeño intervalo de tiempo la partícula sufre un desplazamiento

$$\Delta \vec{r} = \vec{v} \Delta t$$

El trabajo realizado por una fuerza \vec{F} que actúa sobre la partícula en dicho intervalo es

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \vec{r} = \vec{F} \cdot \vec{v} \Delta t$$

Se define la potencia instantánea por

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

y la potencia resulta ser el producto de la fuerza por la velocidad. El trabajo total realizado por \vec{F} para ir de A a B a lo largo de la curva C seguida por la partícula se puede expresar en función de la potencia por

$$W_{AB} = \lim_{\Delta_i \vec{r} \rightarrow 0} \sum_i \vec{F}_i \Delta_i \vec{r} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_i \vec{F}_i \vec{v}_i \Delta t = \int_{t_A}^{t_B} P(t) dt$$

expresión que coincide con la obtenida en términos de una curva dada en forma paramétrica. Aquí el parámetro es el tiempo y la curva C la trayectoria real seguida por la partícula.

La potencia es un concepto de gran importancia práctica en ingeniería, ya que el tiempo requerido para realizar un trabajo es por lo general de gran interés.

En el sistema de unidades MKS la unidad de potencia es el Watt (vatio).

Una unidad de uso frecuente es el caballo de vapor HP, definido como la potencia necesaria para elevar 75 kg a una altura de 1 metro en un segundo

$$1HP = 75 \times 9,8 \frac{Nm}{s} = 735 J/s = 735 W$$

III-4. El Teorema de la Energía.

Existe una importante relación entre el trabajo realizado por la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula y la variación de velocidad de la misma. Esta ley se obtiene de la segunda ley de Newton que relaciona la fuerza resultante \vec{F} con la aceleración

$$\vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

La relación antes mencionada puede deducirse de la siguiente propiedad de la derivada de un producto escalar

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{2d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}$$

Entonces, multiplicando la ecuación de Newton escalarmente por \vec{v} resulta

$$\vec{F} \cdot \vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} m \frac{dv^2}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} mv^2 \right]$$

La magnitud $\frac{1}{2}mv^2$ recibe el nombre de energía cinética de la partícula. Se trata de un escalar que depende de la masa y velocidad de la partícula:

$$T = \frac{1}{2}mv^2$$

La relación que acabamos de establecer entre la potencia y la energía cinética puede escribirse

$$P = \frac{dT}{dt}$$

Si integramos dicha ecuación en el tiempo resulta

$$W_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} P dt = \int_{t_A}^{t_B} dt \frac{dT}{dt} = T_b - T_a$$

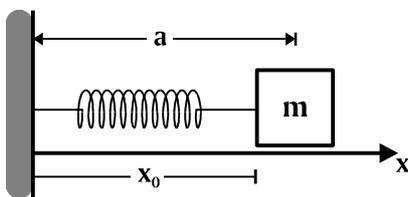
o sea

$$W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

donde la integral debe tomarse a lo largo del camino seguido por la partícula. El trabajo total realizado por la fuerza resultante es igual a la variación de la energía cinética de la partícula.

Ejemplo 1.

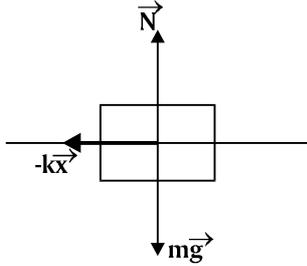
Un resorte de constante k actúa sobre una masa m apoyada sobre un plano horizontal sin fricción.



Inicialmente, el resorte se estira una distancia a y se suelta.

Calcular la velocidad cuando ésta pasa por un punto situado a una distancia b de la posición de equilibrio.

Sobre la masa m actúan el peso, la reacción normal y la fuerza del resorte. El trabajo realizado por el peso y la normal es nulo.



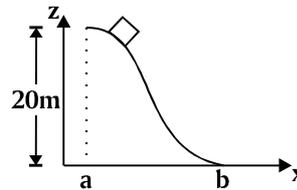
La única fuerza que realiza trabajo es la del resorte.

$$W_{AB} = \int_a^b -k x dx = \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2$$

pero $v_a=0$, es decir

$$-\frac{1}{2} k x_b^2 + \frac{1}{2} k x_a^2 = \frac{1}{2} m v_b^2$$

$$v_b = \sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)(x_a^2 - x_b^2)}$$



Ejemplo 2.

Un cuerpo de masa m desliza sin fricción sobre una superficie lisa como se indica en la fig.11 Si parte del reposo cuando se encuentra a una altura h , determinar la velocidad cuando llega al punto b .

Sobre el cuerpo actúan el peso y la reacción normal de la superficie. La reacción normal no realiza trabajo ya que en todo momento el desplazamiento es perpendicular a la fuerza.

El peso es una fuerza constante

$$F_0 = -mg\vec{k}$$

Por consiguiente, hemos visto que

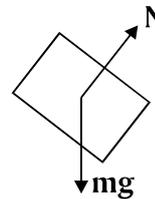
$$\begin{aligned} W_{ab} &= \vec{F}_0 \cdot (\vec{r}_b - \vec{r}_a) = -mg\vec{k} \cdot (\vec{r}_b - \vec{r}_a) \\ &= -mg(z_b - z_a) = mg z_a \end{aligned}$$

ya que $z_b=0$ y, por lo tanto,

$$W_{ab} = mg z_a = \frac{1}{2} m v_b^2 - \frac{1}{2} m v_a^2 = \frac{1}{2} m v_b^2$$

o sea

$$v_b = \sqrt{2 g z_a}$$

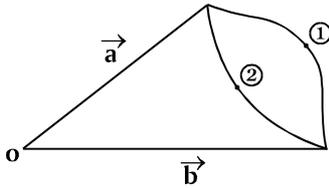


III-5. Energía potencial

En muchos de los ejemplos que hemos considerado, el trabajo realizado por las fuerzas no dependía del camino seguido para ir del punto inicial y final. Tal era por ejemplo el caso del trabajo realizado por las fuerzas constantes.

Llamaremos conservativas a las fuerzas cuyo trabajo no depende del camino recorrido. Más precisamente, una fuerza es conservativa si es función de la posición $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ y si además el trabajo realizado por \vec{F} para llevar la partícula de \vec{a} a \vec{b} es independiente del camino recorrido, o sea

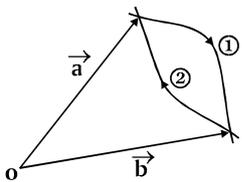
$$W_{ab,1} = W_{ab,2}$$



Como el trabajo por una fuerza para ir de \vec{a} a \vec{b} a lo largo de la curva (1) puede expresarse

$$W_{ab,1} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_b^a \vec{F} \cdot d\vec{r} = -W_{ba,1}$$

resulta que el trabajo necesario para llevar la partícula de \vec{b} a \vec{a} a lo largo de la misma curva es el opuesto.



Por lo tanto, podemos escribir en el caso de que \vec{F} sea conservativa

$$W_{ab,1} = W_{ab,2} = -W_{ba,2}$$

o sea,

$$W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0$$

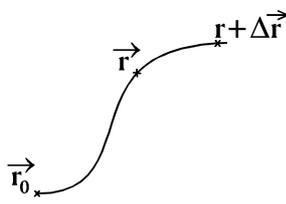
En otras palabras, si la fuerza es conservativa el trabajo hecho por la fuerza sobre la partícula en un circuito cerrado es nulo. Este resultado no puede sorprendernos, ya que si la fuerza es conservativa el trabajo realizado para ir de \vec{a} al mismo punto \vec{a} no depende del camino recorrido y por lo tanto debe ser igual al trabajo realizado según el camino nulo, que obviamente es cero.

Llamaremos no conservativas a aquellas fuerzas cuyo trabajo sobre una partícula depende de la trayectoria seguida para unir el punto inicial y final. Un ejemplo de este tipo de fuerzas es la

fricción. En efecto, vimos que el trabajo realizado por las fuerzas de fricción era proporcional a la longitud de la curva recorrida y por lo tanto dependía de la trayectoria.

Estamos ahora en condiciones de definir la energía potencial asociada a una fuerza conservativa. Sea \vec{r}_0 un punto fijo que se elige como referencia. Entonces, podemos definir

$$U(\vec{r}) = -W_{\vec{r}_0, \vec{r}} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(r) \cdot d\vec{r}$$



ya que dicho trabajo será únicamente una función de \vec{r} por ser la fuerza \vec{F} conservativa. Obsérvese que la definición de $U(r)$ depende de la elección del punto de referencia \vec{r}_0 , un cambio de puntos de referencia cambia el valor de $U(\vec{r})$ por una constante.

Calculemos ahora el cambio de U cuando la partícula sobre un pequeño desplazamiento de \vec{r} a $\vec{r} + \Delta\vec{r}$:

$$U(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - U(\vec{r}) = -W_{\vec{r}_0, \vec{r} + \Delta\vec{r}} + W_{\vec{r}_0, \vec{r}} = -\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

Esta ecuación se puede escribir en la forma

$$\begin{aligned} U(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) - U(x, y, z) &= \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial U}{\partial z} \Delta z = \\ &= -F_x \Delta x - F_y \Delta y - F_z \Delta z \end{aligned}$$

Como la relación vale para todo desplazamiento infinitesimal $\Delta\vec{r}$, debe cumplirse:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

En forma vectorial estas ecuaciones se pueden escribir en términos del gradiente de U , definido por:

$$\vec{\nabla} U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k}$$

y por lo tanto

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} U(\vec{r})$$

En conclusión, hemos probado que si una fuerza es conservativa ella puede expresarse como el opuesto del gradiente de la energía potencial.

Es posible probar el recíproco, es decir que si una fuerza se puede expresar como el gradiente de una función $U(\vec{r})$ entonces \vec{F} es conservativa y $U(\vec{r})$ es la energía potencial.

Nuevamente, el valor de $U(\vec{r})$ resulta determinado a menos de una constante. En efecto, si

$$U'(\vec{r}) = U(\vec{r}) + C$$

entonces

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U(\vec{r}) = -\vec{\nabla}U'(\vec{r})$$

Por otra parte, si la fuerza \vec{F} se puede expresar como un gradiente, sus componentes debe satisfacer ciertas condiciones.

En efecto

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_x}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \\ \frac{\partial F_z}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z} = -\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \end{aligned}$$

Por consiguiente, si una fuerza es conservativa sus componentes deben satisfacer

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z} = 0$$

También es posible probar el recíproco, de modo que cumple que las relaciones que acabamos de establecer son condición necesaria y suficiente para que una fuerza sea conservativa.

Ejemplo Se consideran las siguientes fuerzas

$$\vec{F}_1 = axy \vec{i} - az \vec{j} - ax \vec{k}$$

$$\vec{F}_2 = 2ax \vec{i} - bz \vec{j} - by \vec{k}$$

- a) Determinar si son conservativas.
- b) En el caso de que lo sean, determinar la energía potencial asociada.
- a) Si F_1 es conservativa debe cumplir para todo valor de x, y, z :

$$0 = \frac{\partial F_{1x}}{\partial y} - \frac{\partial F_{1y}}{\partial x} = ax$$

$$0 = \frac{\partial F_{1y}}{\partial z} - \frac{\partial F_{1z}}{\partial y} = -a$$

$$0 = \frac{\partial F_{1z}}{\partial x} - \frac{\partial F_{1x}}{\partial z} = -a$$

y por consiguiente F_1 no es conservativa. Análogamente veamos qué ocurre para F_2

$$0 = \frac{\partial F_{2x}}{\partial y} - \frac{\partial F_{2y}}{\partial x} = 0$$

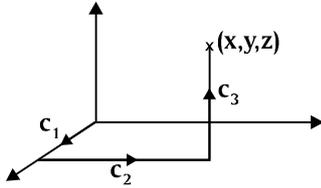
$$0 = \frac{\partial F_{2y}}{\partial z} - \frac{\partial F_{2z}}{\partial y} = b - b$$

$$0 = \frac{\partial F_{2z}}{\partial x} - \frac{\partial F_{2x}}{\partial z} = 0$$

y por lo tanto F_2 es conservativa.

- b) Calculemos ahora la energía potencial U_2 asociada a \vec{F}_2 .

Tomemos como punto de referencia para definir U_2 el origen de coordenadas. Como \vec{F}_2 es conservativa podemos elegir el camino como mejor nos convenga para ir de \vec{r}_0 a \vec{r}_1 . Lo más simple es seguir rectas paralelas a los ejes coordenados.



$$\begin{aligned}
 U_2(x_1, y_1, z_1) &= -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} \\
 &= -\int_{C_1} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} - \int_{C_3} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}
 \end{aligned}$$

A lo largo de C_1 : $y = z = 0$, $d\vec{r} = dx \vec{i}$

$$\int_{C_1} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \int_0^{x_1} \vec{F}_{2x} dx = \int_0^{x_1} 2ax \cdot dx = ax_1^2$$

A lo largo de C_2 : $x = x_1$, $z = 0$, $d\vec{r} = dy \vec{j}$

$$\int_{C_2} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \int_0^{y_1} \vec{F}_{2y} dy = 0$$

Finalmente a lo largo de C_3 : $x = x_1$, $y = y_1$, $d\vec{r} = dz \vec{k}$

$$\int_{C_3} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \int_0^{z_1} \vec{F}_{2z} dz = \int_0^{z_1} by_1 dz = by_1 z_1$$

Por lo tanto,

$$U_2(x_1, y_1, z_1) = -ax_1^2 - by_1 z_1$$

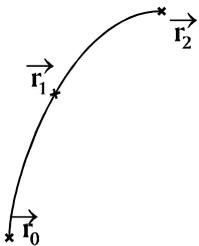
y se puede verificar fácilmente que \vec{F}_2 es el opuesto del gradiente de U_2 .

III-6. Conservación de la Energía.

Cuando una fuerza es conservativa, el trabajo hecho por una fuerza cuando la partícula va de \vec{r}_1 a \vec{r}_2 se puede expresar en términos de la diferencia de energía potencial en dichos puntos.

En efecto

$$\begin{aligned}
 \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \\
 &= U(\vec{r}_1) - U(\vec{r}_2)
 \end{aligned}$$



y por lo tanto cuando la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es conservativa resulta del Teorema de la Energía

$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = U(r_A) - U(r_B) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

es decir,

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + U(\vec{r}_A) = \frac{1}{2}mv_B^2 + U(\vec{r}_B)$$

A la suma de la energía cinética más potencial en un instante dado se le llama energía mecánica total de la partícula y se le designa por E . Hemos establecido por consiguiente que cuando las fuerzas que actúan sobre una partícula son conservativas la energía mecánica total E de la partícula permanece constante y se cumple

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(\vec{r}) = E = \text{constante}$$

III-6a. Caso unidimensional

En el caso de movimiento a lo largo de una recta, la fuerza tiene la forma $F(x)$ y el trabajo

$$W_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} F(x)dx = F(x_B) - F(x_A)$$

y la energía potencial

$$U(x) = -\int_{x_0}^x F(x)dx = -F(x) + F(x_0)$$

Como $F(x)$ es una primitiva de $F(x)$ se cumple que

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

y la ecuación de conservación de la energía establece que

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$$

Obsérvese que si se cambia el punto de referencia \vec{r}_0 la energía potencial cambia por una constante y por consiguiente la energía mecánica también lo hace. Sin embargo, la información contenida en la ecuación no cambia; ella sigue estableciendo que la suma de la energía cinética y potencial se conserva.

La ecuación de conservación se puede escribir

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + U(x)$$

Esta ecuación se obtuvo del Teorema de la Energía, que se demostró haciendo uso de la ley de Newton. Sólo contiene derivadas primeras de la posición, al contrario de lo que ocurre con la ecuación de Newton, que contiene derivadas segundas. Por esa razón, de la ecuación de conservación se dice que es una integral primera de la energía. Ella permite calcular $x(t)$. En efecto,

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$$

o sea,

$$\int_{t_0}^t \frac{x dt}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} = \int_{t_0}^t dt$$

y haciendo el cambio de variable $x = x(t)$, $dx = \dot{x}dt$

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}} = \int_{t_0}^t dt = t - t_0$$

ecuación que permite obtener una relación entre x y t y resuelve el problema del movimiento rectilíneo de la partícula.

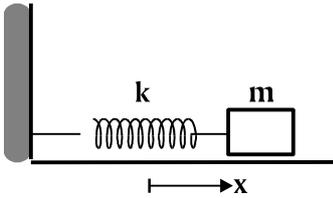
Ejemplo Se desea determinar la velocidad de una masa m ligada a un resorte de constante k cuando ésta se encuentra a una distancia x_1 del punto de equilibrio. Se sabe que su velocidad cuando pasa por dicho punto es v_0 .

$$F(x) = -kx$$

$$U(x) = +\frac{1}{2}kx^2 - \frac{1}{2}kx_0^2$$

Si se toma la posición de equilibrio $x_0 = 0$ como punto de referencia

$$U(x) = \frac{1}{2}kx^2$$



y la ecuación de conservación de la energía establece que

$$E = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

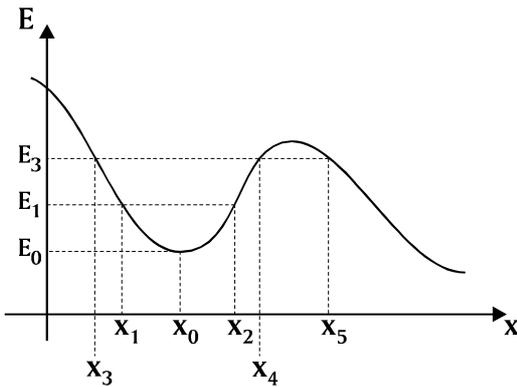
En la posición de equilibrio la energía del sistema es puramente cinética. Para $x = x_m$ (el máximo valor que puede alcanzar x) v debe ser nula y por lo tanto la energía del sistema será únicamente potencial

$$\frac{1}{2}kx_m^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$$

y el valor máximo del estiramiento del resorte vale :

$$x_m = \sqrt{\frac{m}{k}} v_0$$

Es posible obtener una gran cantidad de información a partir de conservaciones cualitativas que hacen uso de la curva de energía potencial y de la conservación de la energía



Sea $U(x)$ una función energía potencial representada por la curva de la figura 19

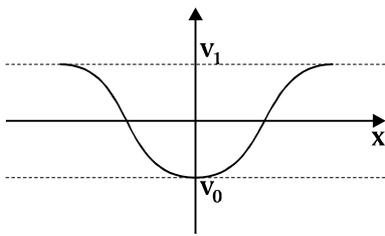
Dado un valor de la energía E , el movimiento estará confinado a aquellas regiones del eje x para los cuales $U(x) \leq E$. La diferencia entre E y $U(x)$ es igual a la energía cinética, que siempre es positiva. La mínima energía posible es E_0 , con dicha energía la partícula permanece en reposo en el punto x_0 .

Cuando la partícula tiene un energía un poco mayor, E_1 , puede moverse entre los puntos x_1 y x_2 . Al alcanzar dichos puntos la partícula se detiene y cambia el sentido del movimiento. Recordamos que en un punto de coordenadas x la

fuerza que actúa sobre la partícula es $F(x) = -U'(x)$, por lo tanto en x_2 la fuerza está orientada negativamente y en x_1 positivamente. Con una energía E_3 la partícula podrá oscilar entre x_3 y x_4 y si inicialmente tiene una posición mayor que x_5 terminará moviéndose indefinidamente hacia las x crecientes.

Un punto donde $U(x)$ tiene un mínimo es llamado punto de equilibrio estable. En dichos puntos, la fuerza que actúa sobre la partícula es nula y si ésta se encuentra inicialmente en reposo permanecerá en reposo. Si la partícula es desplazada una pequeña distancia de dicha posición experimentará una fuerza restauradora que tenderá a llevarla nuevamente a la posición de equilibrio. Un punto en que $U(x)$ es máximo se llama de equilibrio inestable. Una partícula en reposo en dicho punto permanecerá en reposo, pero un pequeño desplazamiento provocará la acción de una fuerza que tenderá a alejarla de la posición de equilibrio.

Ejercicios



1) Una partícula alfa en un núcleo está sometido a la acción de un potencial como el de la figura.

- a) Describir los movimientos posibles
- b) ¿Cuál es la menor energía que debería tener una partícula que obedece las ecuaciones de la dinámica clásica para escapar del núcleo?

2) La energía potencial asociada a la fuerza de interacción entre los dos átomos de una molécula diatómica tiene la forma aproximada

$$U(x) = \frac{a}{x^6} + \frac{b}{x^{12}}$$

donde a y b son dos constantes positivas y x la distancia interatómica.

- a) Calcular la fuerza.
- b) Suponiendo que un átomo es muy pesado y está en reposo y el otro se mueve en una dimensión, estudiar los movimientos posibles.
- c) Calcular la posición de equilibrio y la frecuencia de las pequeñas oscilaciones del átomo más ligero suponiendo que tiene masa m .

III-6b. Caso tridimensional

Mientras que en el caso del movimiento en una dimensión la ecuación de conservación de la energía permite, como hemos visto, determinar la ley horaria $x(t)$, en el caso tridimensional la ecuación de conservación sólo permite determinar el módulo del vector velocidad.

Discutiremos en esta sección dos casos importantes por sus numerosas aplicaciones. El primero es el caso de la partícula sometida a una fuerza constante y el segundo el del movimiento central.

La energía potencial asociada a una fuerza constante \vec{F}_0 es

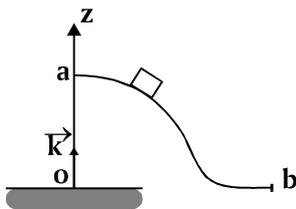
$$U(r) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}_0 \cdot d\vec{r} = -\vec{F}_0 \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)$$

Si se toma como punto de referencia el origen de coordenadas,

$$U(r) = -\vec{F}_0 \cdot \vec{r}$$

y la ecuación de conservación establece que

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \vec{F}_0 \cdot \vec{r}$$

Ejemplo 1

Calcular la energía potencial debido al peso y resolver el ejemplo 2 de la sección IV-3) usando conservación de la energía.

$$\vec{F}_0 = -mg\vec{k}$$

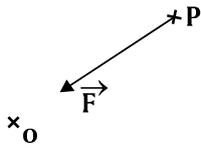
$$U(z) = +mg\vec{k} \cdot \vec{r} = mgz$$

Sobre el cuerpo del Ejemplo 2 actúan dos fuerzas: el peso y la reacción normal. De esta última vimos que no realiza trabajo, de modo que podemos escribir:

$$\frac{1}{2}mv_a^2 + mgz_a = \frac{1}{2}mv_b^2 + mgz_b = \frac{1}{2}mv_b^2$$

o sea,

$$v_b = \sqrt{2gz_a}$$

Ejemplo 2

Demostrar que las fuerzas centrales, cuya forma es

$$\vec{F}(\vec{r}) = F(r)\vec{e}_r$$

son conservativas, calcular la energía potencial asociada y escribir la ecuación de conservación de la energía.

Para probar que $\vec{F}(\vec{r})$ es conservativa verifiquemos que satisface las condiciones necesarias y suficientes

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \qquad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

Tomando en cuenta que $\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r}$, las componentes cartesianas de la fuerza son

$$F_x = \frac{x}{r} F(r)$$

$$F_y = \frac{y}{r} F(r)$$

$$F_z = \frac{z}{r} F(r)$$

donde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = x \frac{d}{dr} \left(\frac{F(r)}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{xy}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{F(r)}{r} \right)$$

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = y \frac{d}{dr} \left(\frac{F(r)}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{xy}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{F(r)}{r} \right)$$

lo que demuestra la primera igualdad, del mismo modo que se puede verificar las otras dos, lo que prueba que \vec{F} es conservativa.

Para calcular la energía potencial, elegimos un punto de referencia cuyas coordenadas esféricas son $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ e integramos yendo desde el punto de referencia hasta el punto final (r, θ, φ) . Podemos elegir el camino de integración de la forma que más nos convenga. Seguimos primero la dirección radial C_1 desde $(r_0, \theta_0, \varphi_0)$ hasta (r, θ_0, φ_0) y luego nos movemos a lo largo de la circunferencia C_2 de radio r que va desde (r, θ_0, φ_0) a (r, θ, φ) .

A lo largo de C_1

$$d\vec{r} = dr \vec{e}_r$$

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_0}^r F(r) dr$$

A lo largo de C_2 la fuerza es en cada instante perpendicular al desplazamiento de modo que

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

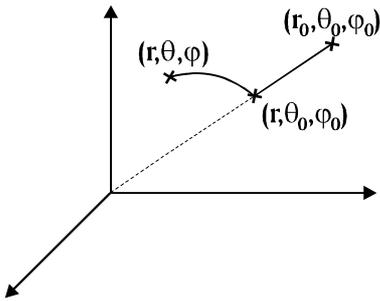
y por lo tanto

$$U(\vec{r}) = - \int_{C_1 C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{C_0} F(r) dr = U(r)$$

y la energía potencial sólo depende en este caso de la distancia al centro \vec{r} .

Para el caso de la fuerza de atracción gravitacional, que es un ejemplo de fuerza central,

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \frac{GMm}{r^2} \vec{e}_r$$



$$U(r) = + \int_{r_0}^r \frac{GMm}{r^2} dr = -\frac{GMm}{r} + \frac{GMm}{r_0}$$

Usualmente se toma el punto de referencia en el infinito, con lo cual $U(r)$ toma la forma

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

La ecuación de conservación se puede escribir

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(r) = E$$

Se define velocidad de escape de un planeta como la mínima velocidad que debe tener un cuerpo cerca de su superficie para poder llegar al infinito.

Se debe cumplir

$$\frac{1}{2}mv_E^2 - \frac{GM_T m}{R_T} = -\frac{GM_T m}{\infty} + \frac{1}{2}mv_\infty^2 = \frac{1}{2}mv_\infty^2 \geq 0$$

y por lo tanto

$$V_E \geq \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2gR_T} = 11.300m/s$$

III-7. Fuerzas no conservativas

Hemos visto varios ejemplos de fuerzas no conservativas para las cuales el trabajo depende de la trayectoria. La fricción y las fuerzas de resistencia de un fluido son ejemplos de tales fuerzas.

Una partícula puede estar sometida simultáneamente a la acción de fuerzas conservativas y no conservativas. Por ejemplo, un paracaidista está sometido a la fuerza de gravitación conservativa y la resistencia al aire no conservativa.

Se cumplirá que el trabajo total de dichas fuerzas W_T se puede escribir

$$W_T = W_C + W_{NC}$$

donde W_C es el trabajo de las fuerzas conservativas y W_{NC} el de las no conservativas. En términos de la energía potencial

$$W_T = U_1 - U_2 + W_{NC}$$

Usando el teorema de la Energía resulta

$$W_T = T_2 - T_1$$

es decir

$$W_{NC} = W' = (T_2 + U_2) - (T_1 + U_1) = E_2 - E_1$$

Donde E_2 es energía mecánica final y E_1 la inicial. En este caso la energía mecánica no se conserva: disminuirá o aumentará según que W' sea negativo o positivo. En el caso de la fricción, por ejemplo, W' siempre es negativo y la energía mecánica disminuye. Es posible ampliar el concepto de energía de modo que la energía mecánica perdida reaparezca en otra forma de energía; en el caso de la fricción se transforma en energía interna del sistema. La energía interna es una medida de las vibraciones moleculares del cuerpo y un aumento de la misma se manifestará en una elevación de la temperatura.

La conservación de la Energía se ha transformado en un principio básico que está presente en todas las ramas de la física. Él establece que la energía total es constante. En muchas ocasiones, a lo largo de la historia de la física, el principio pareció fallar, pero en todos los casos se encontraron nuevos fenómenos que lo confirman finalmente.

Ejemplo

Suponiendo que el paracaidista del Ejemplo de la sección II-6b) se lanza desde una altura de 1000 m, con una velocidad de 100 m/s, determinar la energía mecánica perdida durante la caída. Al llegar a tierra el paracaidista habrá adquirido la velocidad límite de $-3m/s$

Por lo tanto

$$W' = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 - mgh_1 \cong -1,125 \times 10^6 J$$

CAPITULO VI

FUERZAS CENTRALES

"¿Qué es lo que hace que los planetas giren en torno al Sol?"

En los tiempos de Kepler algunas personas contestaban esta pregunta diciendo que había ángeles detrás de ellos, agitando sus alas y empujando a los planetas por sus órbitas. Como verán, la respuesta no está muy lejos de la verdad. La única diferencia es que los ángeles miran en otra dirección y sus alas empujan radialmente hacia adentro."

Richard P. Feynman

The Character of a Physical Law (1965)

FUERZAS CENTRALES

VI-1. Generalidades.

Una *fuerza central* es aquella que deriva de una función potencial con simetría esférica $U = U(r)$. Como veremos más adelante, el sistema formado por dos partículas que interactúan entre sí a través de una fuerza cuya recta de acción pasa por la ubicación de las mismas (y cuyo módulo depende únicamente de la distancia entre ellas) se puede reducir al problema de una partícula "efectiva" sometida a una fuerza central. El problema de fuerzas centrales adquiere así una gran relevancia, ya que en muchos casos la interacción entre dos cuerpos es del tipo mencionado. Por ejemplo, la interacción gravitatoria que rige el comportamiento de los cuerpos celestes o la interacción Coulombiana entre un par de cargas puntuales se ajustan a este esquema.

VI-1.a. Cantidad de Movimiento Angular.

Una partícula que se mueve con velocidad \mathbf{v} y cuyo vector posición es \mathbf{r} (respecto de un origen de coordenadas O) tiene una cierta cantidad de movimiento angular \mathbf{L} (respecto de ese origen) definida por

$$\boxed{\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}} \quad (6-1)$$

Para una partícula que está sometida a una fuerza central, este vector es *constante* en el tiempo. En efecto si

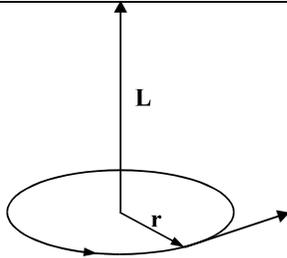
$$\vec{F} = -\nabla U(r) = -\frac{\partial U}{\partial r} \vec{e}_r$$

entonces la derivada temporal de \mathbf{L} es nula

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} = \mathbf{0}$$

debido a que la fuerza central es radial. Tenemos por lo tanto la *Conservación de la Cantidad de Movimiento Angular*:

En un sistema en el cual sólo actúan fuerzas centrales, la cantidad de movimiento angular \mathbf{L} es una constante del movimiento.

FIG. 1: Vector \vec{L} .

Esta constante es vectorial. Esto implica que el movimiento permanece en el plano determinado por los vectores \vec{r} y \vec{v} iniciales. (Un cambio en el plano del movimiento implicaría un cambio en la *dirección* de \vec{L} , lo cual como hemos visto no es posible).

VI-1.b. Ecuaciones de Movimiento.

Para describir este movimiento usaremos coordenadas polares que son las más apropiadas, ya que:

$$F_r = f(r) = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

$$F_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$$

Las ecuaciones del movimiento para una partícula de masa m bajo la acción de una fuerza central son por lo tanto,

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = f(r) \quad (6-2)$$

$$m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0 \quad (6-3)$$

Multiplicando la última ecuación por r la podemos transformar en

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0.$$

Lo cual no es más que la expresión escalar de la constancia de la cantidad de movimiento angular en este tipo de movimiento.

En efecto, el módulo de \vec{L} es

$$l = mr v_\perp = mr^2 \dot{\theta} \quad (6-4)$$

donde hemos llamado v_{\perp} a la componente de la velocidad perpendicular a \vec{e}_r , es decir $v_{\perp} = r\dot{\theta}$. La ley de conservación (6-4) es esencial en todo problema de fuerzas centrales.

Ejercicio VI-1:

*Segunda Ley de Kepler*¹.

Mostrar que el área barrida por el vector posición \vec{r} en un intervalo diferencial $d\vec{r}$ es $dA = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}dt$. Use entonces la ley de conservación de l para mostrar que la *velocidad areolar* $\frac{dA}{dt}$ es constante.

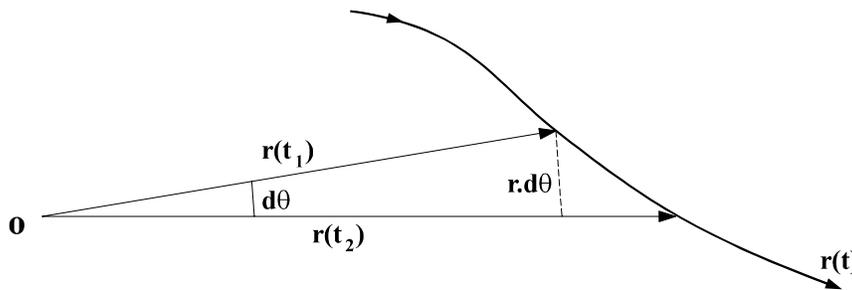


FIG. 2: Área barrida por el radio vector en dt .

Volviendo a las ecuaciones del movimiento y usando la expresión de l para eliminar $\dot{\theta}$ de la primera ecuación obtenemos la *ecuación radial*:

$$m\ddot{r} - \frac{l^2}{mr^3} = f(r) \quad (6-5)$$

1

Johannes Kepler formuló esta ley en 1619, basándose en observaciones detalladas del movimiento de los planetas unos 80 años antes de que Newton formulase sus leyes del movimiento.

Es interesante observar que el término en l^2 es la fuerza centrífuga que experimenta un observador (no inercial) solidario con el móvil. La integración de ésta ecuación se puede llevar a cabo si se conoce la forma del potencial $U(r)$. Plantearemos el problema en general en el apartado VI-2 y lo resolveremos para el caso particular de la atracción gravitatoria en el apartado VI-4.

VI-1.c. Conservación de la Energía.

La expresión de la energía cinética en coordenadas polares es

$$T = \frac{1}{2} m(v_r^2 + v_\perp^2) = \frac{1}{2} (m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2)$$

Luego, la ecuación que expresa la constancia² de la energía del sistema es,

$$E = \frac{1}{2} (m\dot{r}^2 + mr^2\dot{\theta}^2) + U(r) = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} + U(r) \quad (6-6)$$

Se puede interpretar esta última ecuación como si la partícula se moviera en un *potencial efectivo* $U_{\text{eff}} = U(r) + \frac{l^2}{2mr^2}$. El término en l^2 se denomina *potencial centrífugo* debido a que al ser derivado respecto de r da origen a la fuerza centrífuga mencionada anteriormente.

La ecuación de la energía nos permite obtener la ley horaria de un movimiento central de energía E y cantidad de movimiento angular l . En efecto, despejando la velocidad radial de la ley de conservación obtenemos

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} = \pm \left(\frac{2}{m} (E - U_{\text{eff}}(r)) \right)^{1/2} \quad (6-7)$$

reordenando e integrando,

2

La fuerza central es conservativa. Este hecho está implícito en la definición que hemos tomado de la misma, pues deriva de un potencial.

$$\pm \int_{r_0}^{r(t)} \left(\frac{2}{m} (E - U_{\text{eff}}(r)) \right)^{-1/2} dr' = \int_{t_0}^t dt' = t - t_0 \quad (6-8)$$

obtenemos una expresión que permite hallar la ley horaria $r(t)$ para cualquier potencial central. Sólo para algunos potenciales el integral admite una expresión en términos de funciones elementales. El signo a elegir dependerá de las condiciones iniciales que deseamos ajustar. (Según la velocidad radial sea inicialmente entrante o saliente).

Frecuentemente en los movimientos centrales es de interés hallar la *trayectoria* del móvil más que su ley horaria. Un camino posible es eliminar el tiempo en términos del ángulo θ usando para ello la conservación de l .

Ejercicio VI-2:

La expresión para la velocidad radial (6-7) puede descomponerse en

$$dr = \pm \left(\frac{2}{m} (E - U_{\text{eff}}(r)) \right)^{1/2} dt .$$

a) Use la conservación de $l = mr^2\dot{\theta}$ para eliminar el tiempo de la última ecuación en términos de la variable angular θ .

b) Integrando ambos lados de la ecuación obtenida, muestre que la trayectoria puede obtenerse de

$$\theta(r) = \theta_0 \pm l \int_{r_0}^r \frac{dr / r^2}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U_{\text{eff}}(r))}}$$

VI-2. Fórmulas de Binet.

Existe una forma alternativa de obtener la trayectoria del móvil y para algunos campos centrales es mucho más efectiva que la descrita en el apartado anterior. Consideramos la variable auxiliar $\frac{1}{r} = u$. Usando la conservación de la cantidad de movimiento angular (6-4), podemos obtener expresiones para la velocidad y aceleración radiales en términos de u y sus derivadas angulares. En efecto, éstas derivadas son

$$u' = \frac{du}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{\dot{r}}{\dot{\theta}} = -\frac{m}{l} \dot{r}$$

$$u'' = \frac{d^2 u}{d\theta^2} = \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{m}{l} \dot{r} \right) = -\frac{m}{l} \frac{dt}{d\theta} \frac{d}{dt} \dot{r} = -\frac{m}{l} \frac{1}{\dot{\theta}} \ddot{r} = -\frac{m^2 r^2}{l^2} \ddot{r}$$

De estas expresiones obtenemos fácilmente,

$$m\ddot{r} = -\frac{l^2}{m} u^2 u''$$

y la ecuación radial (6-5) se transforma en

$$\boxed{u'' + u + \frac{m}{l^2} \frac{F(u)}{u^2} = 0} \quad (6-9)$$

donde la función F esta definida por $F(u) = f[r(u)] = f(1/u)$. Esta ecuación es especialmente fácil de resolver para el movimiento Kepleriano (a ser discutido más adelante).

Ejercicio VI-3:

Mostrar que el módulo de la velocidad (al cuadrado) y la aceleración de cualquier movimiento central están dados en términos de la función $u(\theta)$ por

$$\boxed{v = \frac{l}{m} [u^2 + u'^2]^{1/2}} \quad (6-10)$$

$$\boxed{a = -\frac{l^2 u^2}{m^2} [u + u'']} \quad (6-11)$$

Estos resultados se conocen como "Fórmulas de Binet" y son útiles cuando se desea calcular la velocidad o aceleración en cualquier punto de una trayectoria conocida.

VI-3. El problema de dos cuerpos.

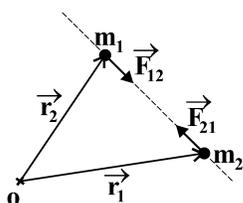


FIG. 3: El problema de dos cuerpos.

El problema de dos partículas puntuales que interactúan entre sí a través de un potencial que es función únicamente de la distancia que las separa $r = |r_1 - r_2|$ se denomina *problema de dos cuerpos*. Como veremos a continuación, éste problema se reduce a estudiar el movimiento de una partícula efectiva en un campo de fuerza central.

En la figura 3 se describen las posiciones de dos partículas de masas m_1 y m_2 ubicadas por vectores posición \vec{r}_1 y \vec{r}_2 respectivamente (respecto de cierto origen 0). La interacción entre ellas se ha supuesto atractiva para fijar ideas.

Ejercicio VI-4:

Demostrar que si la fuerza de interacción deriva de un potencial que sólo depende de la distancia relativa entonces:

- Su recta de acción es la que una las partículas.
- Su módulo sólo depende de la distancia relativa.
- Verifica el Principio de Acción y Reacción.

Por generalidad, hemos colocado ambas partículas en un campo de *fuerza externa*, sobre el cual haremos hipótesis restrictivas a medida que sea necesario. Este campo ejerce una fuerza $F_{ext}^{(1)}$ sobre la partícula (1) y $F_{ext}^{(2)}$ sobre la partícula (2).

El sistema tiene seis *grados de libertad* representados (por ejemplo) por los vectores posición \vec{r}_1 y \vec{r}_2 . En términos de éstos vectores podemos escribir las ecuaciones de movimiento,

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}_{21} + F_{ext}^{(1)} = \vec{f}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \hat{r} + \vec{F}_{ext}^{(1)}$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \vec{F}_{12} + F_{ext}^{(2)} = -\vec{f}(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) \hat{r} + \vec{F}_{ext}^{(2)}$$

donde el versor $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$ es la dirección del vector *separación relativa* $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ que une las posiciones de ambas partículas. Estas ecuaciones están *acopladas*. Es decir ambas ecuaciones dependen de \vec{r}_1 y \vec{r}_2 a través de la fuerza de interacción.

Si $\vec{p}_1 = m_1 \dot{\vec{r}}_1$ y $\vec{p}_2 = m_2 \dot{\vec{r}}_2$ son las cantidades de movimiento lineal de las partículas, la cantidad de movimiento angular del sistema es

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2$$

y la energía del mismo se puede escribir como

$$E = \frac{\vec{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^2}{2m_2} + U(|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|) + U_{ext}$$

Hasta aquí no hemos hecho más que describir las ecuaciones que regulan la dinámica de un sistema de dos partículas que interactúan entre sí en términos de sus vectores posición. Esta descripción puede hacerse sin embargo en término de variables más adecuadas. Estas son la posición del *centro de masas* y la *separación relativa* (que ya fue definida). El centro de masa tiene un vector posición \vec{R} dado por (cif. Cap. IV),

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + m_1 \vec{r}_2 - m_1 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Es fácil expresar los vectores posición de las partículas en términos de las nuevas variables \vec{R} y $\vec{r}(\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1)$:

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{r}$$

Las relaciones anteriores son lineales por lo que se extienden a velocidades y aceleraciones. Podemos expresar toda la dinámica del sistema en términos de las nuevas variables \vec{R} y \vec{r} .

Las ecuaciones de movimiento resultan

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{R}} - \mu \ddot{\vec{r}} &= f(r) \hat{r} + \vec{F}_{ext}^{(1)} \\ m_2 \ddot{\vec{R}} + \mu \ddot{\vec{r}} &= -f(r) \hat{r} + \vec{F}_{ext}^{(2)} \end{aligned}$$

donde hemos introducido la masa reducida del sistema μ :

$$\boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} \quad (6-12)$$

Las ecuaciones continúan acopladas. Sin embargo, en las nuevas variables es fácil desacoplarlas.

Sumando ambas ecuaciones obtenemos:

$$(m_1 + m_2) \ddot{\vec{R}} = \vec{F}_{ext}^{(1)} + \vec{F}_{ext}^{(2)}$$

Esta ecuación describe el movimiento del centro de masas bajo la acción de fuerzas externas y es análoga a la que se obtuvo (por un procedimiento similar) en el Cap. IV. Como se demostró allí, el movimiento del centro de masas no depende de la interacción sino solamente del campo externo.

Multiplicando la primera ecuación por m_2 , la segunda por m_1 y restándolas se obtiene:

$$\mu \ddot{\vec{r}} = -f(r) \hat{r} - \frac{\mu}{m_1} \vec{F}_{ext}^{(1)} + \frac{\mu}{m_2} \vec{F}_{ext}^{(2)}$$

Esta ecuación determina la dinámica de la separación relativa \vec{r} . Esta es determinada por la interacción y además por el campo externo. En ausencia de campo externo el movimiento del centro de masas es trivial y podemos tomar el origen de coordenadas (O) en dicho punto. Es decir $\vec{R} = \dot{\vec{R}} = \ddot{\vec{R}} = 0$ sin pérdida de generalidad. En este caso, el problema se reduce a resolver

$$\boxed{\mu \ddot{\vec{r}} = -f(r) \hat{r}} \quad (6-13)$$

Esta ecuación de movimiento en la separación relativa es la de un partícula de masa μ sometida a un campo de *fuerza central* (atractivo si $f(r)$ es positiva). Por supuesto, la tal partícula es sólo una construcción matemática útil para resolver el problema.

Las verdaderas partículas del problema son m_1 y m_2 . Una vez resuelto el problema de fuerzas centrales y determinada $\vec{r}(t)$ podemos volver atrás en la transformación lineal y obtener $\vec{r}_1(t)$ y $\vec{r}_2(t)$. En muchos casos esto no es necesario pues toda la información relevante está en la variable \vec{r} .

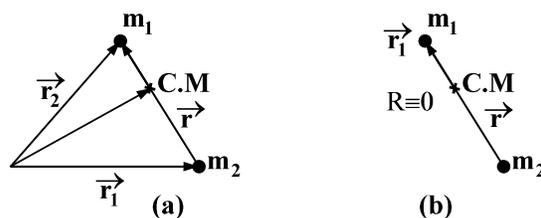


FIG. 4: El problema de dos cuerpos visto desde (a) un origen arbitrario y (b) el centro de masas.

Ejercicio VI-5:

- a) Muestre que la cantidad de movimiento angular del sistema (respecto de O) se puede escribir

$$\vec{L} = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}} + \vec{R} \times (m_1 + m_2) \dot{\vec{R}} \quad (6-14)$$

Observe que es la suma de un término correspondiente a la cantidad de movimiento angular del centro de masa y otro correspondiente a la partícula "efectiva" de masa μ .

- b) Muestre que la energía total del sistema se puede escribir (en ausencia de campo externo).

$$E = \frac{1}{2}(m_1 + m_2) \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{r}^2 + U(r) \quad (6-15)$$

Observe que es la suma de las energías asociadas al centro de masas y a la separación relativa.

Ejercicio VI-6:

- a) Muestre que la masa reducida de un sistema es aproximadamente igual a *la menor* de las masas, si estas son muy desiguales.
- b) Muestre que la masa reducida es la *cuarta parte* de la masa total del sistema si ambas masas son iguales.

Ejemplo VI-7:

En el modelo atómico de Bohr para el Hidrógeno, se supone que el electrón y el protón giran en torno al centro de masa común en órbitas circulares que satisfacen la relación $l = n\eta$ ($\eta = h / 2\pi$) donde h es la constante de Planck) siendo n un entero positivo y l el módulo de la cantidad de movimiento angular del sistema electrón-protón. ¿Cuáles serán los valores de energía compatibles con esta condición?

Teniendo en cuenta que la masa ($m \cong 0.511$ MeV) del electrón es mucho menor que la masa ($M \cong 936$ MeV) del protón, la masa reducida del sistema será $\mu \cong m$. El centro de masas se encuentra ubicado esencialmente donde está el protón. Podemos tomar el origen de coordenadas en la ubicación del protón y suponer que éste permanece estacionario.

La interacción Coulombiana entre el protón y el electrón es $U(r) = -e^2 / r$, siendo r la distancia electrón-protón y e la carga del electrón (y del protón) en unidades Gaussianas.³ La velocidad y el radio de la órbita están relacionadas por la condición de que la fuerza centrípeta sea la interacción de Coulomb:

$$-\frac{\mu v^2}{r} = -\frac{e^2}{r^2} \Rightarrow v^2 r = e^2 / \mu$$

que, junto a la condición de Bohr $l = \mu v r = n \eta$ permite hallar los radios posibles (se dejan los detalles a cargo del lector).

$$r_n = \frac{n^2 \eta^2}{m e^2}$$

³ $e = 1.6 \times 10^{-19}$ Coulomb = 4.8×10^{-10} statcoulomb es la unidad de carga fundamental en unidades MKSA y Gaussianas respectivamente.

La energía del sistema es (sin tener en cuenta la pequeña cantidad de energía cinética del protón)

$$E_n = \frac{1}{2} \mu v_n^2 - \frac{e^2}{r_n} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{r_n} - \frac{e^2}{r_n} = -\frac{1}{2} \frac{e^2}{r_n} = -\frac{E_0}{n^2}$$

donde se ha usado la relación anterior para eliminar la energía cinética del electrón. La constante $E_0 = \mu e^4 / 2 \hbar^2 \cong 13.6 \text{ eV}$ es la energía de ionización⁴ correcta del átomo de Hidrógeno. Los números enteros $n=1,2,3,\dots$ determinan los niveles de energía posibles para el sistema. La energía es negativa porque hemos referido el cero de la energía potencial (como es usual) a la situación en la cual hay interacción nula ($r \rightarrow +\infty$) por estar las partículas infinitamente alejadas. Este resultado para los posibles niveles de energía de un átomo de Hidrógeno coincide con el que se obtiene a partir de la Mecánica Cuántica, que es la teoría adecuada para un sistema tan pequeño como un Átomo.

VI-4. Aplicación al Movimiento Planetario (o Kepleriano).

Supongamos una partícula de masa m sometida a una fuerza central de atracción $f(r) = -GmM/r^2$. Esta fuerza deriva del potencial central

$$U(r) = -G \frac{mM}{r}$$

Si además $M \gg m$ podemos despreciar el movimiento de M y considerarla fija en el centro de masas. De lo contrario debemos tener presente que r es una *separación relativa* y además reemplazar la masa m por la masa reducida en todas las ecuaciones subsiguientes (salvo en la ley de Gravitación propiamente dicha). En lo que sigue, para fijar ideas, trabajaremos en la hipótesis de que M representa la masa solar y m la de cualquier cuerpo que se desplaza en nuestro sistema solar ($m \ll M$) bajo la atracción de la gravedad solar *exclusivamente*. Sin embargo, el tratamiento es extensible a cualquier potencial central del tipo $1/r$.

VI-4.a. Trayectorias.

Utilizando el cambio de variable $u = 1/r$, la ecuación radial queda (definiendo la constante $\gamma = GmM$).

⁴La energía que el átomo debe absorber para liberarse de su electrón.

$$u'' + u - \frac{m}{l^2} \gamma = 0$$

Definimos la constante p (a la cual le asignaremos un significado geométrico más adelante)

$$p = \frac{l^2}{m\gamma} = \frac{l^2}{m^2 MG} \quad (6-16)$$

en términos de la cual la ecuación anterior queda

$$u'' + u = \frac{1}{p}$$

Esta ecuación es la de un oscilador forzado por una fuerza constante, la cual fue resuelta en el Cap. V. Su solución es del tipo

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + A \cos \theta$$

Donde A es una constante de integración y se ha hecho una elección apropiada de ejes para hacer la otra constante de integración igual a cero. Esta ecuación representa una sección cónicas en coordenadas polares. La forma canónica de la misma es

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \theta}} \quad (6-17)$$

donde la constante ε es la *excentricidad* y p el *parámetro* de la cónica. Hemos demostrado por lo tanto la

Primera Ley de Kepler:

La trayectoria de un cuerpo en el sistema solar es una sección cónica con el sol en un foco.

La excentricidad es una constante no negativa que determina el tipo de cónica de que se trate ($\varepsilon > 1, \varepsilon = 1, 0 < \varepsilon < 1, \varepsilon = 0$ corresponden a hipérbola, parábola, elipse y circunferencia respectivamente). Para el caso de una elipse ($\varepsilon < 1$) los semiejes mayor y menor (a y b respectivamente) están dados por

$$\alpha = \frac{p}{1 - \varepsilon^2} \qquad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \qquad (6-18)$$

De estas ecuaciones se desprende además que

$$p = b^2 / a \qquad \varepsilon^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2}$$

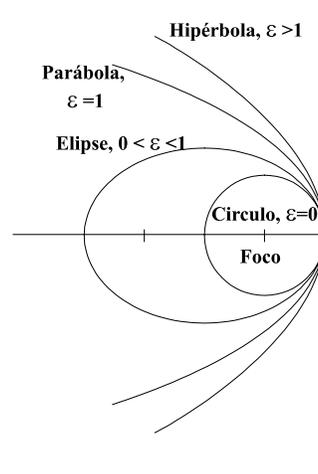


FIG. 5: Secciones cónicas con un foco común.

Ejemplo VI-6: Tercera ley de Kepler.

Demostraremos que en el caso de una órbita elíptica, *el período al cuadrado es proporcional al semieje mayor al cubo. La constante de proporcionalidad es la misma para cualquier móvil, pues sólo depende del campo de fuerza.*

El área de una elipse es πab . El tiempo que emplea el radio vector en barrer toda esta área es el período T . Dado que (de acuerdo a la segunda ley de Kepler) el radio vector barre áreas a la velocidad constante de $l/2m$ el período es

$$T = \frac{\pi a \sqrt{ap}}{l/(2m)}$$

donde hemos eliminado el semieje menor $b = \sqrt{a p}$. Usando la definición de p (6-16) y elevando al cuadrado tenemos

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3 \quad (6-19)$$

VI-4.b. El rol de la Energía.

Las constantes del movimiento E y l determinan completamente la órbita del movimiento. Es útil hallar expresiones para los parámetros *geométricos* del movimiento (ε y p) en términos de los parámetros *dinámicos* (E y l) del mismo.

Ejercicio VI-7:

La energía total es $E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r}$. Use la fórmula de Binet para eliminar la velocidad en términos de la trayectoria y muestre que ésta energía está dada, en el caso de órbitas elípticas, por:

$$E = \frac{\gamma}{2p} (\varepsilon^2 - 1) = -\frac{\gamma}{2a} \quad (6-20)$$

Por otra parte, la ecuación (6-16) da l en términos de p según:

$$l = (\gamma m p)^{1/2} \quad (6-16)$$

Es interesante observar que la constante l queda determinada *únicamente* por el parámetro p . Es decir que podemos tener órbitas de diferentes excentricidades para diferentes valores de la energía, todas con la misma cantidad de movimiento angular. De hecho, podemos discutir la naturaleza de la órbita según el *signo* de la energía:

- i) $\varepsilon > 1$, la energía es positiva ($E > 0$) y esto corresponde a una órbita hiperbólica (abierta).
- ii) $\varepsilon = 1$, la energía es nula ($E = 0$) y esto corresponde a una órbita parabólica (abierta).
- iii) $0 < \varepsilon < 1$, la energía es negativa ($-\gamma/2p < E < 0$) y esto corresponde a una órbita elíptica (cerrada).

iv) $\varepsilon = 0$, la energía es mínima ($E = -\gamma / 2p$) y la situación corresponde a la órbita circular.

La discusión que antecede es consecuencia directa de lo que ya se discutió en relación al papel de la excentricidad.

Como se discutió en el apartado VI-1c, la partícula experimenta un *potencial efectivo* dado por:

$$U_{\text{eff}}(r) = U(r) + \frac{l^2}{2mr^2} = -G\frac{mM}{r} + \frac{l^2}{2mr^2}$$

y la energía total se puede escribir como

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{l^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r}$$

Consideraremos los cuatro casos anteriores desde el punto de vista de la ecuación de la energía.

i) Caso $E_1 > 0$ (trayectoria hiperbólica).

La energía cinética en cualquier punto de la trayectoria es numéricamente mayor que la energía potencial en ese punto, es decir, $T > |U|$. En este caso vemos que el cuerpo de masa m posee suficiente energía cinética para llevarla hasta donde U es cero, (o sea r es infinito).

El cuerpo escapará del campo de atracción de la masa M .

ii) Caso $E_2 = 0$ (trayectoria parabólica).

En este caso, en cualquier punto de la órbita la energía cinética es igual a la potencial, o sea $T = |U|$.

El cuerpo de masa m posee exactamente la energía necesaria para escapar del campo de atracción (quedando en reposo al final).

iii) Caso $E_3 < 0$ (trayectoria elíptica).

El cuerpo posee menos energía cinética que potencial, o sea $T < |U|$. Las órbitas circulares están incluidas en esta categoría, aunque las consideraremos aparte por ser un caso extremo.

El cuerpo de masa m no posee suficiente energía cinética para poder escapar del campo de atracción.

En este caso existen puntos de la órbita en los cuales la distancia al centro de fuerza es máxima o mínima (se denominan *perihelio* y *afelio* si la órbita es solar).

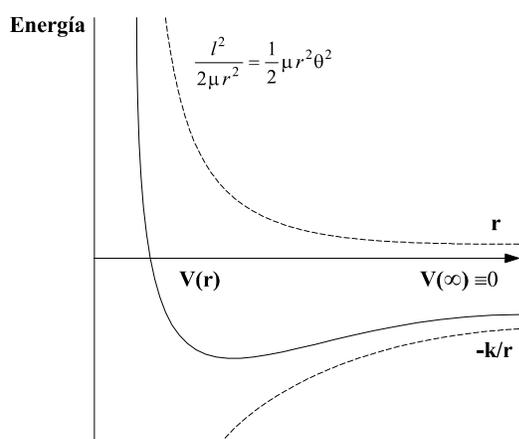


FIG. 6: Potencial efectivo.

- Las constantes dinámicas del movimiento (E y l).
- Las constantes geométricas del mismo (ε y p).

VI-4.c. Ejemplos.

i) Velocidad de Escape.

Un cuerpo lanzado con velocidad de módulo v desde cierta distancia R al centro de fuerza tendrá una energía:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{R}$$

iv) Caso $E_4 = E_{\min} < 0$ (trayectoria circular).

La velocidad radial es nula, lo que hace que la energía cinética sea la menor posible (para un dado l).

En la figura 6 graficamos (cualitativamente) el potencial efectivo (y la contribución Kepleriana y centrífuga al mismo) y ubicamos en ese diagrama las cuatro energías típicas ya discutidas.

Ejercicio VI-8:

Hallar la máxima (R_{\max}) y mínima (R_{\min}) distancia al centro de fuerza en términos de:

si esperamos que el cuerpo *escape* al campo de atracción, como vimos, esta energía debe ser no negativa. La *menor* velocidad necesaria para escapar a la atracción se denomina *velocidad de escape*. Para ésta velocidad el cuerpo seguirá una trayectoria parabólica al infinito. Podemos obtener la expresión para esta velocidad anulando la energía ($E = 0$) y despejando v :

$$v_{esc} = \sqrt{2GM / R}$$

En particular, si el cuerpo es lanzado desde la superficie terrestre, como la aceleración de la gravedad terrestre es:

$$g = GM / R^2 = 9.8 m / s^2$$

tenemos (usando $R = 6371 \text{ km}$)

$$v_{esc} = \sqrt{2gR} \cong 11.2 \text{ km} / s .$$

Según este tratamiento idealizado, ¡cualquier objeto lanzado desde la superficie terrestre con una velocidad mayor que ésta no volverá a ser visto por los alrededores!

ii) Movimiento Satelital (órbitas circulares)

El movimiento de los satélites artificiales en el campo central terrestre es un buen ejemplo de los conceptos que hemos desarrollado.

Supongamos que un satélite se encuentra en órbita circular a una distancia $r = R + h$ del centro de la Tierra. R es el radio medio terrestre y h la altura del satélite sobre la superficie terrestre. Para órbitas circulares, la velocidad v y período T del satélite quedan determinadas una vez conocida la altura h . En efecto, a partir de la ecuación de Newton para un movimiento

circular uniforme, $\frac{mV^2}{r} = \frac{GmM}{r^2}$, podemos despejar la velocidad:

$$V^2 = \frac{GM}{r} = \frac{gR^2}{R+h} = gR \left(1 + \frac{h}{R}\right)^{-1}$$

donde hemos usado la aceleración de la gravedad en la superficie terrestre ($g = GM / R^2 = 9.8 m / s^2$). Podemos expresar este resultado en términos de la velocidad de escape terrestre ($v_{esc} \cong 11.2 \text{ km} / s$) hallada en el ejemplo anterior (es una unidad natural para el problema):

$$v = v_{esc} (2(1 + h/R))^{-1/2}$$

mientras que el período orbital es simplemente,

$$T = \frac{2\pi r}{V} = \frac{2\pi(R+h)}{V_{esc}} [2(1+h/R)]^{1/2} = \frac{2\pi R(1+h/R)}{V_{esc}} [2(1+h/R)]^{1/2} = \frac{\pi R}{V_{esc}} [2(1+h/R)]^{3/2}$$

Es interesante observar que el período y la velocidad orbital de un satélite *es el mismo* para una nave espacial de miles de toneladas y para un pequeño tornillo desprendido de la misma. Es decir, estas cantidades son independientes de la masa del móvil. Esto es debido a que la atracción gravitacional es proporcional a la masa del mismo y objetos más masivos son atraídos más fuertemente.

Órbitas de baja altitud.

Si la altura es pequeña en comparación con el radio terrestre ($R \cong 6371\text{km}$) estas fórmulas se simplifican a

$$v = \frac{v_{esc}}{\sqrt{2}} \quad \text{y} \quad T = \frac{2\sqrt{2}\pi R}{v_{esc}}$$

La menor altura practicable (antes de que los efectos de la fricción atmosférica comiencen a hacerse sentir) es del orden de 200 km. En esta órbita el período será de unos 90 minutos.

Órbita Geoestacionaria.

La órbita circular en la cual el satélite tiene el mismo período de rotación que la Tierra se denomina *geoestacionaria*. un observador ubicado en la intersección del radiovector del satélite con la superficie terrestre lo verá estacionario.

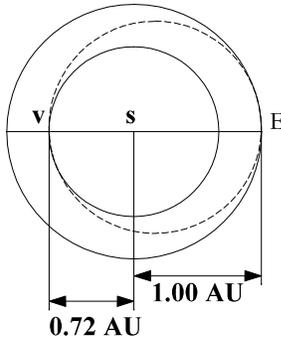
Este tipo de órbitas están en el plano ecuatorial (¿por qué?) y su altura está bien determinada ya que $T=24$ horas, despejando h la fórmula del período se obtiene

$$h_g = R \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{T v_{esc}}{\pi R} \right)^{2/3} - 1 \right\} \cong 35800\text{km}$$

Los satélites geoestacionarios de comunicaciones se suelen colocar en grupos de a tres, ubicados en los vértices de un triángulo equilátero en el plano ecuatorial terrestre. De esta forma, constituyen una red de transmisión *sin puntos ciegos* (es decir, alcanzan cualquier punto del globo).

iii) Órbitas de Transferencia.

Este solía ser un problema académico hasta la década del 60, cuando el proyecto Apolo logra el primer alunizaje. ¿Qué órbita debe seguir una nave que parte de la tierra para alcanzar otro cuerpo celeste? Lo más eficiente en términos de combustible resulta dejar que la nave adopte una órbita elíptica *intermedia* (entre la de partida y la de llegada) en el campo central solar y que esta órbita se una *suavemente* a las de los cuerpos de partida y de llegada. Esta situación se ilustra en la figura 7.



Para fijar ideas, consideramos el envío de una nave desde la Tierra hacia Venus. Consideraremos que las órbitas de los dos planetas son circulares (con el Sol en su centro). Esto es una buena aproximación ya que la excentricidad de ambas órbitas es muy baja.⁵

Los radios de las órbitas son las respectivas distancias Tierra-Sol y Venus-Sol. Es conveniente adoptar la *Unidad Astronómica* (AU)⁶ como medida de distancia en éste problema: los radios orbitales son $R_T = 1.00$ AU Y $R_V = 0.72$ AU respectivamente.

FIG. 7

Una masa m en una órbita circular de radio r en torno al Sol (masa M_\odot) tendrá una velocidad dada por

$$G \frac{M_\odot m}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \left(G \frac{M_\odot}{r} \right)^{1/2}$$

La velocidad en la órbita circular de partida v_T se puede calcular (sin conocer G y M_\odot) a partir del período orbital terrestre de 1 año y la distancia a tierra Sol (R_T):

$$v_T = \frac{2\pi R_T}{T} = \frac{2\pi \times 1.49 \times 10^8 \text{ km}}{3.16 \times 10^7 \text{ s}} \cong 29.6 \text{ km/s}$$

⁵

$\varepsilon = 0.017$ para la Tierra y $\varepsilon = 0.007$ para Venus. Estos números son muy pequeños en relación a 1.00.

⁶

AU = 1.496×10^{11} m (distancia media Tierra-Sol).

La órbita de transferencia será una elipse tangente a ambas órbitas circulares . Es decir, de eje mayor $2a = R_T + R_v = 1.72 \text{ AU}$.

La energía de esta órbita elíptica esta dada por la ecuación (6-20) como $E = -\gamma 2a = -GM / 2a$. Por lo tanto, hay que dar un impulso a la nave $m(v' - v_T) = m\Delta v$ donde v' será su velocidad en la órbita de transferencia de energía E :

$$E = \frac{1}{2}mv'^2 - G\frac{mM}{R_T} = -G\frac{mM}{2a} = -G\frac{mM}{R_T + R_v}$$

de donde despejamos la velocidad $v' \cong 0.92 v_T \cong 27.2 \text{ km/s}$. El impulso (por unidad de masa) es pequeño: $\Delta v \cong -2.4 \text{ km/s}$ (Fue necesario *frenar* la nave para que adopte la órbita de transferencia).

La nave permanecerá en la órbita elíptica de transferencia durante *medio período* hasta alcanzar la órbita de Venus Podemos hallar la duración del viaje interplanetario usando la 3ra Ley de Kepler para hallar éste período (T_{tr}):

$$\left(T_{tr} / T_T\right)^2 = \left(\frac{a_{tr}}{R_t}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\left(1 + \frac{R_v}{R_T}\right)\right)^3 = (0.5 \times 1.72)^3$$

de donde surge $T_{tr} \cong 0.80 T_T \cong 292$ días. El tiempo de viaje es, como se mencionó, la mitad de éste período: $t_{viaje} \cong 146$ días (unos 5 meses con los motores apagados simplemente "cayendo" hacia el Sol!)

Al cabo de éstos cinco meses, se deben encender los motores de la nave nuevamente para abandonar la órbita de transferencia y adoptar la órbita circular de Venus en torno al Sol. La velocidad de la nave aumentó (a expensas del campo central del Sol) hasta éste momento. Podemos hallar la velocidad v'' de la nave cuando se halla a una distancia R_v del Sol usando nuevamente la conservación de la energía:

$$E = \frac{1}{2}mv''^2 - G\frac{mM}{R_v} = -G\frac{mM}{2a} = -G\frac{mM}{R_T + R_v}$$

lo cual da el valor $v'' \cong 1.27 v_T \cong 37.7 \text{ km/s}$. Para entrar en la órbita de Venus necesitamos conocer la velocidad orbital. No conocemos el período venusino, de forma que recurrimos nuevamente a la 3ra. Ley de Kepler para hallar v_V :

$$v_V = \frac{2\pi R_V}{T_V} = \frac{2\pi R_T R_V T_T}{T_T R_T T_V} = v_T \frac{R_V}{R_T} \left(\frac{R_V}{R_T} \right)^{3/2} = v_T \left(\frac{R_V}{R_T} \right)^{1/2} \cong 1.18 v_T$$

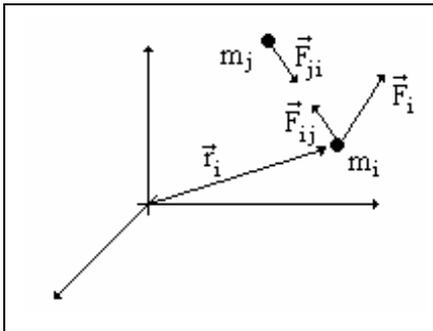
lo cual da una velocidad $v_V \cong 34.9 \text{ km/s}$. Es decir que se requiere un impulso (por unidad de masa) $\Delta v \cong -2.8 \text{ km/s}$. De nuevo, es necesario *frenar* la nave para ingresar a la nueva órbita circular y completar la operación de transferencia.

CAPÍTULO V

SISTEMAS DE PARTÍCULAS

SISTEMAS DE PARTICULAS

La mayor parte de los objetos físicos no pueden por lo general tratarse como partículas. En mecánica clásica, un objeto extendido se considera como un sistema compuesto por un gran numero de partículas puntuales. El estudio que sigue sirve tanto para un agregado de partículas libres como pueden ser los fragmentos de una granada, como para un sólido rígido en cuyo caso las partículas se mueven manteniendo distancias fijas entre si.



Sea un sistema de partículas de masa m_i . Sobre cada partícula actúan dos tipos de fuerzas. Las fuerzas llamadas internas provienen de las otras partículas del sistema. \vec{F}_{ij} representa la fuerza que actúa sobre la partícula i debida a la presencia de la partícula j . De acuerdo a la tercera ley.

$$1) \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$$

Para este estudio nos limitaremos al caso de fuerzas centrales; \vec{F}_{ij} esta dirigida a lo largo de la línea que une la partícula i con la j . Ello implica descartar el caso particular de fuerzas internas que dependen de la velocidad relativa de las partículas.

El segundo tipo de fuerzas provienen del exterior del sistema. Llamaremos \vec{F}_i a la resultante de las fuerzas externas que actúan sobre la partícula i .

Las ecuaciones de Newton para la partícula i establecen que

$$2) m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \sum_{j \neq i}^N \vec{F}_{ij}$$

Sumando para toda i

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \vec{F}_{ij}$$

y observando que $\sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N \vec{F}_{ij} = 0$, ya que las fuerzas internas se cancelan de a pares, resulta que

$$3) \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{R}_{ext}$$

donde \vec{R}_{ext} es la resultante de las fuerzas externas.

Recordando que la masa total es $M = \sum_{i=1}^N m_i$ y definiendo el vector posición del centro de masas o baricentro

$$4) \vec{r}_G = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i$$

resulta

$$5) M\ddot{\vec{r}}_G = \vec{R}_{ext}$$

El centro de masas se mueve como lo hace una partícula con la masa del sistema completo sobre la cual actúa una fuerza igual a la resultante de las fuerzas externas.

Conocida la posición y velocidad iniciales de las partículas del sistema, la ecuación 4) y su derivada permiten calcular la posición y velocidad del centro de masas en el instante inicial. La ecuación 5) determina su evolución en el tiempo, un vez conocida \vec{R}_{ext} . Por ejemplo, si la única fuerza externa es el peso $\vec{R}_{ext} = -Mg\vec{k}$, el centro de masas seguirá una trayectoria parabólica, no importa cuán complicada sea la distribución de partículas.

El sistema de ecuaciones 2) contiene mucha más información que la ecuación 5). Si las fuerzas externas dependen de la posición y/o velocidad de las partículas del sistema $\vec{F}_i(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t)$, no se puede determinar el movimiento del centro de masa sin analizar el movimiento de cada partícula del sistema.

La ecuación 5) es la primera ecuación fundamental de un sistema de partículas. Relaciona la

derivada del momentum lineal total $\vec{P} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i = M \cdot \vec{v}_G$ con la resultante de las fuerzas

externas.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{R}_{ext}$$

La segunda ecuación fundamental relaciona la derivada del momentum angular total con el momento total o torque total del sistema de fuerzas.

Sea Q un punto arbitrario, entonces el momentum angular total es

$$\vec{L}_Q = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times m_i \vec{v}_i$$

Su derivada respecto al tiempo

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_Q}{dt} &= \sum_{i=1}^N (\vec{v}_i - \vec{v}_Q) \times m_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times m_i \vec{a}_i = \\ &= -\vec{v}_Q \times M\vec{v}_G + \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \left(\vec{F}_i + \sum_{i \neq j}^N \vec{F}_{ij} \right) \end{aligned}$$

donde hemos usado la ecuación 2), la definición del centro de masas y el hecho de que $\vec{v}_i \times \vec{v}_i = 0$.

Las fuerzas internas una vez más no contribuyen ya que

$$(\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_{ij} + (\vec{r}_j - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_{ji} = (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij} = 0$$

ya que por hipótesis las fuerzas internas son centrales.

Por consiguiente

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = -\vec{v}_Q \times M\vec{v}_G + \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_i$$

El último sumando es el momento total respecto de Q de las fuerzas externas.

$$\vec{M}_Q = \sum_{i=1}^N (\vec{r}_i - \vec{r}_Q) \times \vec{F}_i$$

o sea

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = -\vec{v}_Q \times M\vec{v}_G + \vec{M}_Q^{ext}$$

que es la segunda ecuación fundamental de un sistema de partículas.

La ecuación se simplifica en tres casos particulares.

- a) $\vec{v}_Q = 0$. Se toman momentos respecto a un punto fijo.
- b) \vec{v}_Q es colineal con \vec{v}_G .

c) $Q \equiv G$. Se toman momentos respecto del centro de masas.

En los tres casos

$$\frac{d\vec{L}_Q}{dt} = \vec{M}_Q^{ext}$$

en particular $\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{ext}$

Para un sistema de partículas cualquiera las dos ecuaciones fundamentales no bastan para determinar la evolución del sistema. Son solo seis ecuaciones y el sistema tiene $3N$ coordenadas independientes. Sin embargo veremos que en un sólido rígido solamente seis coordenadas bastan para determinar su posición y en este caso las dos ecuaciones fundamentales son suficientes.

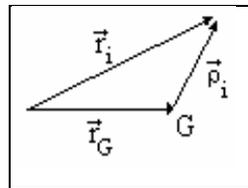
La simplificación fundamental que proporcionan estas ecuaciones se debe a la posibilidad de eliminar las fuerzas internas. Para que ello sea posible se debe cumplir que: “Si dos partículas ejercen fuerzas mutuas, estas son iguales en intensidad, su línea de acción es la línea que une dichas partículas y sus sentidos son opuestos”. Este enunciado se toma muchas veces como la tercera ley de Newton. (Véase por ej. Synge y Griffith. La misma vale esencialmente cuando el sistema no involucra partículas cargadas en movimiento).

Cuando se anulan \vec{R}_{ext} y \vec{M}_Q se conserva el momentum lineal total \vec{P} y el momentum angular total \vec{L}_Q . En particular ambas cantidades se conservan para un sistema libre de fuerzas externas.

Concluiremos este estudio haciendo algunas consideraciones sobre la energía de un sistema de partículas.

La energía cinética de un sistema de partículas puede expresarse como la suma de la energía cinética del baricentro más la energía cinética respecto de él.

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2$$



definimos $\vec{\rho}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_G$ entonces

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i (\dot{\vec{r}}_G^2 + 2\dot{\vec{r}}_G \dot{\vec{\rho}}_i + \dot{\vec{\rho}}_i^2)$$

observando que $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_G \Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \vec{\rho}_i = 0$ y por lo tanto $\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{\rho}}_i = 0$

resulta

$$T = \frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}_G^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{\rho}}_i^2$$

Si las fuerzas externas derivan de un potencial

$$\vec{F}_i = -\nabla_i U_i(\vec{r}_i)$$

se puede introducir $U(\vec{r}_1 \dots \vec{r}_N) = \sum_{i=1}^N U_i(\vec{r}_i)$ y $\vec{F}_i = -\nabla_i U$. U es la energía potencial total del sistema.

Independientemente del tipo de fuerzas en juego se puede relacionar la potencia de las fuerzas con la variación de la energía cinética.

$$P_T = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i + \sum_{i=1}^N \sum_{i \neq j} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{v}_i = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \cdot \vec{v}_i = \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right] = \frac{dT}{dt}$$

Veremos más adelante que en el caso particular de un cuerpo rígido es posible una vez más eliminar las fuerzas internas que tienen potencia nula. De modo que para un cuerpo rígido se cumple que

$$P_T^{ext} = \frac{dT}{dt}$$

la potencia total de las fuerzas externas es igual al ritmo de variación de la energía cinética.

Ejercicio: Probar que si se cumple la primera ecuación fundamental de un sistema de partículas y la segunda respecto a un punto Q, se cumple la segunda respecto a un punto cualquiera L.

CAPÍTULO VI

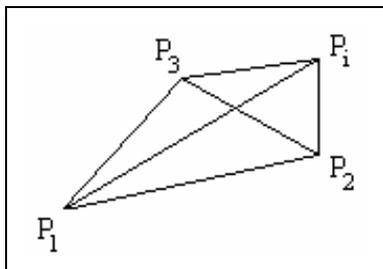
CINÉTICA DEL RÍGIDO

CINEMÁTICA

Un cuerpo rígido puede considerarse como un sistema de masas puntuales cuyas distancias se mantienen constantes durante el movimiento. Comencemos determinando el número de coordenadas independientes necesarias para especificar su configuración en cualquier instante de tiempo. Dado un par cualquiera de partículas del rígido de las que sabemos que su distancia permanece constante. Es decir,

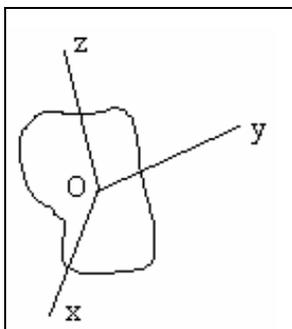
$$d_{ij} = c_{ij} \quad (1)$$

donde las c son constantes. Supongamos que hemos fijado la posición de 3 puntos no colineales \vec{r}_1 , \vec{r}_2 y \vec{r}_3 . Si deseamos fijar ahora la posición de un punto i cualquiera del rígido, basta con conocer su distancia a los 3 puntos no colineales.



$$\begin{aligned} d_{i1} &= |\vec{r}_i - \vec{r}_1| = c_{i1} \\ d_{i2} &= |\vec{r}_i - \vec{r}_2| = c_{i2} \\ d_{i3} &= |\vec{r}_i - \vec{r}_3| = c_{i3} \end{aligned} \quad (2)$$

Por consiguiente, conocida la posición de los tres puntos \vec{r}_1 , \vec{r}_2 y \vec{r}_3 , la posición de cualquier otro punto \vec{r}_i que dista c_{i1} , c_{i2} y c_{i3} de los tres puntos queda determinada por la intersección de las tres esferas de radios c_{i1} , c_{i2} y c_{i3} centradas respectivamente en \vec{r}_1 , \vec{r}_2 y \vec{r}_3 . El número de grados de libertad que hay que fijar para determinar la configuración del rígido no supera nueve, tres grados de libertad par cada punto. Pero ellos no son independientes ya que están vinculados por las ecuaciones (2), lo que permite reducir a seis los grados de libertad requeridos. En efecto, se necesitan tres para fijar el punto P_1 ; una vez fijado éste, bastan dos coordenadas para fijar P_2 sobre la esfera de radio c_{i2} y centro P_1 y finalmente hace falta un ángulo para fijar la posición de P_3 en la circunferencia que resulta de intersectar la esfera de radio c_{i3} y centro P_1 con la esfera de radio c_{i3} y centro P_2 .



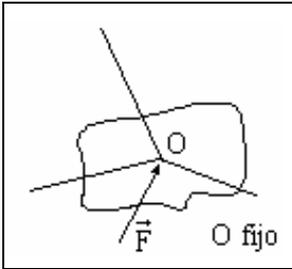
Por consiguiente, un cuerpo rígido queda ubicado en el espacio una vez conocido el valor de seis coordenadas generalizadas.

Otra forma de mostrar esta propiedad es a partir de un sistema de coordenadas solidarias con el rígido. La posición de un punto del rígido con respecto a este sistema permanece constante, sus coordenadas no varían. Por lo tanto basta con ubicar el sistema de coordenadas en el espacio para conocer la posición de cualquier punto del rígido. Para ello se requieren tres coordenadas para

fijar el origen del sistema O y tres ángulos que permiten fijar la orientación de los ejes coordenados respecto a un sistema fijo.

Por lo tanto, es necesaria la evolución de seis variables para conocer el movimiento de un punto cualquiera del rígido. Veremos que las seis ecuaciones fundamentales de un sistema de partículas son suficientes para determinar el movimiento de un sólido rígido.

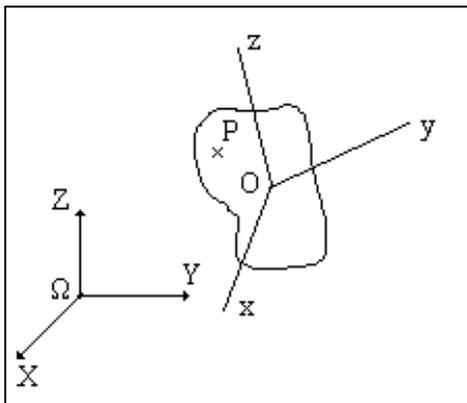
Si el rígido estaba restringido en su movimiento por algún vínculo, el número de variables requerido para determinar el movimiento disminuye. Las restantes ecuaciones fundamentales permitirán determinar el sistema de fuerzas necesario para que dicho vínculo sea respetado.



Por ejemplo, para un sólido con un punto fijo hacen falta solo tres grados de libertad y es posible determinar la fuerza F que ejerce el vínculo.

En ciertos problemas llamados hiperdinámicos el conjunto de fuerzas realizadas por los vínculos no queda únicamente determinado por las ecuaciones fundamentales.

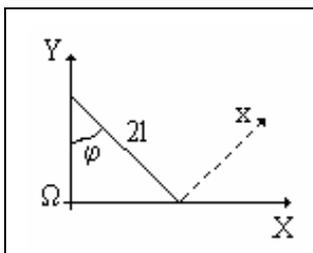
Por definición, la velocidad relativa de un punto cualquiera del rígido respecto a un sistema solidario con él es nula. Por consiguiente, su velocidad respecto a un sistema ΩXYZ estará dada por



$$\begin{aligned}\vec{v}_P &= \vec{v}'_P + \vec{v}_{TP} \\ \vec{v}'_P &= 0 \\ \vec{v}_P &= \vec{v}_{TP} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_O)\end{aligned}$$

Esta relación que hemos obtenido trivialmente de las ecuaciones del movimiento relativo caracteriza la distribución de velocidades de un cuerpo rígido. La velocidad de un punto cualquiera del rígido está determinada por la velocidad de un punto de uno de sus puntos \vec{v}_O y la velocidad angular del sistema solidario $\vec{\omega}$.

Ejemplo 1: Dada una barra de longitud $2l$ que se mueve de forma tal que los extremos permanecen sobre los ejes de coordenadas (ver figura). Calcular la velocidad de un punto cualquiera de la barra en función del ángulo $\varphi(t)$.



$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \dot{\varphi} \vec{k} \\ \vec{r}_O &= 2l \sin \varphi \vec{i} \\ \vec{v}_O &= 2l \cos \varphi \dot{\varphi} \vec{i} \\ \vec{v}_P &= \vec{v}_O + \vec{\omega} \times (\vec{r}_P - \vec{r}_O)\end{aligned}$$

$$\vec{r}_p - \vec{r}_o = \lambda \vec{j}, \quad 0 \leq \lambda \leq 2l$$

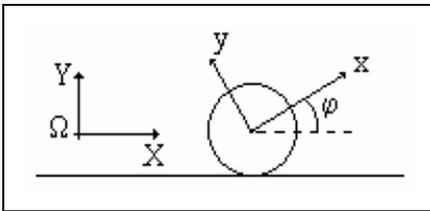
$$\vec{v}_p = v_o \vec{I} + \dot{\varphi} \lambda \vec{k} \times \vec{j}$$

$$\boxed{\vec{v}_p = 2l \cos \varphi \dot{\varphi} \vec{I} - \lambda \dot{\varphi} \vec{i}}$$

Es sencillo, si se desea, expresar el resultado en términos de los versores del sistema fijo.

Ejemplo 2: Calcular en función de φ la velocidad del centro de masas de un disco vertical que rueda sin deslizar sobre un plano horizontal.

Por definición de rodadura $v_p = 0$, $\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{k} = \dot{\varphi} \vec{K}$.



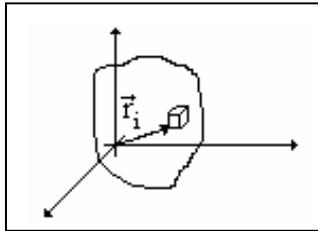
$$\vec{v}_o = \dot{x} \vec{i} = \vec{v}_p + \vec{\omega} \times (\vec{r}_o - \vec{r}_p) = 0 + \dot{\varphi} \vec{K} \times R \vec{J} = -R \dot{\varphi} \vec{I}$$

$$\boxed{\dot{x} = -R \dot{\varphi}}$$

CINÉTICA

En esta sección vamos a desarrollar métodos que nos permitan calcular la cantidad de movimiento total \vec{P} , el momentum angular total \vec{L} y la energía cinética T de un cuerpo rígido. Posteriormente, haciendo uso de las ecuaciones fundamentales de un sistema de partículas, deduciremos las ecuaciones del movimiento del cuerpo rígido llamadas ecuaciones cardinales.

Un cuerpo rígido es un sistema continuo de partículas, la generalización del concepto de centro de masas es inmediata:



$$\vec{r}_G = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i \rho_i \vec{r}_i \Delta V_i}{\sum_i \rho_i \Delta V_i}$$

expresión que en el límite en que la partición es más y más refinada y los volúmenes tendiendo a cero conduce a

$$\vec{r}_G = \frac{\int \rho \vec{r} dV}{M}$$

que para ρ constante se reduce a

$$\vec{r}_G = \frac{\int \vec{r} dV}{V}$$

La cantidad de movimiento total es

$$\vec{P} = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_i m_i \vec{v}_i = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_i \rho_i \vec{v}_i \Delta V_i = \lim_{\Delta V_i \rightarrow 0} \sum_i \rho_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \Delta V_i = \frac{d}{dt} \int_V \rho \vec{r} dV = M \vec{v}_G$$

Para calcular el momentum angular respecto a un punto P comencemos considerando primero el caso de un sistema discreto de partículas rígidamente unidas y luego pasemos al límite continuo. Por definición,

$$\vec{L}_P = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times m_i \vec{v}_i$$

Usando la distribución de velocidades en un cuerpo rígido

$$\vec{L}_P = \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times m_i (\vec{v}_P + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_P))$$

donde ω es la velocidad angular del rígido y \vec{v}_P la velocidad del punto del rígido que coincide con P en el instante que estamos considerando. Por ejemplo, en el caso de un disco que rueda sin deslizar, si P es el punto de contacto, $\vec{v}_P = 0$.

Podemos reescribir esta expresión en la forma:

$$\begin{aligned}\vec{L}_P &= M(\vec{r}_G - \vec{r}_P) \times \vec{v}_P + \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P) \times [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_P)] = \\ &= M(\vec{r}_G - \vec{r}_P) \times \vec{v}_P + \sum_{i=1}^N \{m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P)^2 \vec{\omega} - m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P) [(\vec{r}_i - \vec{r}_P) \cdot \vec{\omega}]\}\end{aligned}$$

Recordando que un producto escalar se escribe en componentes

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{\alpha} A_{\alpha} B_{\alpha}$$

el segundo término de \vec{L}_P se puede reescribir en componentes

$$\sum_{\beta} \sum_{i=1}^N \{m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P)^2 \delta_{\alpha\beta} \omega_{\beta} - m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P)_{\alpha} (\vec{r}_i - \vec{r}_P)_{\beta} \omega_{\beta}\} = \sum_{\beta} \Pi_{P\alpha\beta} \omega_{\beta}$$

donde $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \end{cases}$ y

$$\Pi_{P\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N \{m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P)^2 \delta_{\alpha\beta} - m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P)_{\alpha} (\vec{r}_i - \vec{r}_P)_{\beta}\}$$

es el llamado tensor de inercia.

Por consiguiente,

$$\vec{L}_P = M(\vec{r}_G - \vec{r}_P) \times \vec{v}_P + \Pi_P \vec{\omega}$$

El momentum angular del rígido se expresa en términos de los datos cinemáticos \vec{v}_P y $\vec{\omega}$ que dependen del movimiento del rígido y los datos dependientes de la distribución de masas del rígido M , \vec{r}_G y Π_P .

Existen dos casos en que la expresión anterior se simplifica. Para $P = G$, es decir que se toman momentos respecto al centro de masas,

$$\vec{L}_G = \Pi_G \vec{\omega}$$

Si P es un punto del rígido con velocidad nula

$$\vec{L}_P = \Pi_P \vec{\omega}$$

Si asumimos que el rígido tiene una distribución continua de materia con densidad ρ y tomamos un sistema de coordenadas con origen en el punto P ,

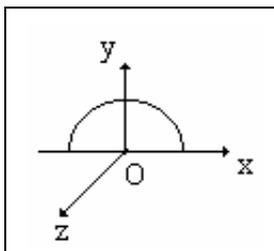
$$\vec{r}_i - \vec{r}_p = x_i \vec{i} + y_i \vec{j} + z_i \vec{k}$$

El sistema se supone solidario con el rígido. En ese sistema la matriz de inercia en componentes toma la forma:

$$\Pi_p = \begin{pmatrix} \int_V \rho(y^2 + z^2) dV & -\int_V \rho xy dV & -\int_V \rho xz dV \\ -\int_V \rho xy dV & \int_V \rho(x^2 + z^2) dV & -\int_V \rho yz dV \\ -\int_V \rho xz dV & -\int_V \rho yz dV & \int_V \rho(x^2 + y^2) dV \end{pmatrix}$$

y es inmediato comprobar que la matriz de inercia es simétrica.

Ejemplo: Calcular el centro de masas y el tensor de inercia de un semicírculo homogéneo de masa M y radio R .



$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \operatorname{sen} \varphi \\ z &= 0 \end{aligned}$$

$$\rho = \frac{2M}{\pi R^2}$$

$$x_G = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi d\varphi \cos \varphi = 0$$

$$y_G = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi d\varphi \operatorname{sen} \varphi = \frac{4}{\pi R^2} \frac{R^3}{3} = \frac{4R}{3\pi}$$

Los componentes I_{xz} , I_{yz} son nulos y $I_{zz} = I_{xx} + I_{yy}$. Debemos calcular I_{xx} , I_{yy} e I_{xy} .

El cálculo es totalmente análogo al realizado para calcular las coordenadas del centro de masas y conduce a

$$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4} MR^2 \quad I_{xy} = 0$$

por lo que la matriz de inercia respecto al centro O es diagonal. Veremos luego que por razones de simetría era de esperar esta forma de la matriz de inercia.

Antes de discutir las propiedades de la matriz de inercia, pasemos al cálculo de la energía cinética de un sólido rígido.

$$T = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_p + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_p))^2$$

$$= \frac{1}{2} M \vec{v}_p^2 + \vec{v}_p \cdot \vec{\omega} \times \sum_{i=1}^N m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_p) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_p)]^2$$

Usando que $(\vec{A} \times \vec{B})^2 = A^2 B^2 \text{sen}^2 \alpha = A^2 B^2 - (\vec{A} \cdot \vec{B})^2$ se puede escribir el último sumando como

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_p)]^2 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i [\omega^2 (\vec{r}_i - \vec{r}_p)^2 - (\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_p))^2]$$

y tomando en cuenta que $\omega^2 = \sum_{\alpha=1}^3 \omega_\alpha \omega_\alpha = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \omega_\alpha \delta_{\alpha\beta} \omega_\beta$

y $\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_p) = \sum_{\alpha=1}^3 \omega_\alpha (\vec{r}_i - \vec{r}_p)_\alpha$ se obtiene

$$\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i [\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_p)]^2 = \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \omega_\alpha \left\{ \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i [(\vec{r}_i - \vec{r}_p)^2 \delta_{\alpha\beta} - (\vec{r}_i - \vec{r}_p)_\alpha (\vec{r}_i - \vec{r}_p)_\beta] \right\} \omega_\beta =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta=1}^3 \frac{1}{2} \omega_\alpha \Pi_{P\alpha\beta} \omega_\beta = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \Pi_P \cdot \vec{\omega}$$

Por consiguiente, T para un cuerpo rígido tiene la forma

$$T = \frac{1}{2} M \vec{v}_P^2 + M \vec{v}_P \cdot \vec{\omega} \times (\vec{r}_G - \vec{r}_P) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \Pi_P \cdot \vec{\omega}$$

En la expresión anterior P es un punto cualquiera y \vec{v}_P es la velocidad del punto del rígido que en el instante considerado coincide con P

Si se elige $P \equiv G$, centro de masas

$$T = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \Pi_G \cdot \vec{\omega}$$

Si P es un punto fijo del rígido

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \Pi_P \cdot \vec{\omega}$$

Propiedades del tensor de inercia

Hemos visto que para el cálculo del momentum angular y la energía cinética de un rígido resulta imprescindible conocer el objeto $\Pi_{P\alpha\beta}$, cuyas componentes respecto a cierto sistema de referencia solidario con el rígido con origen en P hemos dado explícitamente. Dichas componentes forman una matriz simétrica en dimensión tres.

Vamos a probar más adelante que siempre existe un sistema de ejes ortogonales en P tal que la matriz de inercia respecto a dicho sistema es diagonal.

$$\Pi_{\alpha\beta} = I_{\alpha} \delta_{\alpha\beta}$$

o sea

$$\Pi = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Los ejes del sistema cartesiano en que la matriz toma esta forma se llaman ejes principales y los correspondientes elementos de la matriz de inercia diagonal, I_1 , I_2 , I_3 , se conocen como los momentos principales de inercia.

Si la velocidad angular del rígido $\vec{\omega}$ está orientada según uno de los ejes principales, entonces $\Pi\vec{\omega}$ también lo está. Por ejemplo, si

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{i}$$

$$\Pi\vec{\omega} = I_1\omega \cdot \vec{i}$$

En este caso $\vec{\omega}$ es un vector propio de Π con autovalor I_1 . Ello implica que para determinar los momentos principales de inercia y los ejes principales basta resolver el problema de calcular los autovalores y autovectores de una matriz. Los autovalores son los momentos principales y los autovectores apuntan en la dirección de los ejes principales.

La ecuación de autovalores que nos interesa resolver es:

$$\Pi \vec{v} = I \vec{v}$$

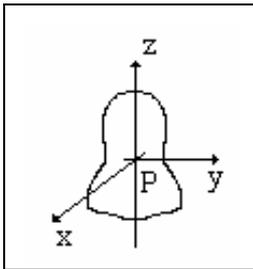
donde Π es la matriz de inercia en cierto sistema de referencia e I es uno de sus autovalores. Se trata de un sistema homogéneo de tres ecuaciones con tres incógnitas correspondientes a las componentes de \vec{v} . Este sistema admite soluciones no triviales sólo si el determinante de los coeficientes se anula. Es decir,

$$\begin{vmatrix} I_{xx} - I & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} - I & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} - I \end{vmatrix} = 0$$

donde hemos usado la simetría de la matriz de inercia. Se trata de una ecuación cúbica en I , llamada usualmente ecuación secular. Un teorema bien conocido en álgebra lineal establece que la ecuación secular de una matriz simétrica siempre admite raíces reales y sus correspondientes autovectores son ortogonales.

Para cada una de las raíces de la ecuación secular se resuelve la ecuación de autovectores y se obtiene la dirección correspondiente a uno de los ejes principales.

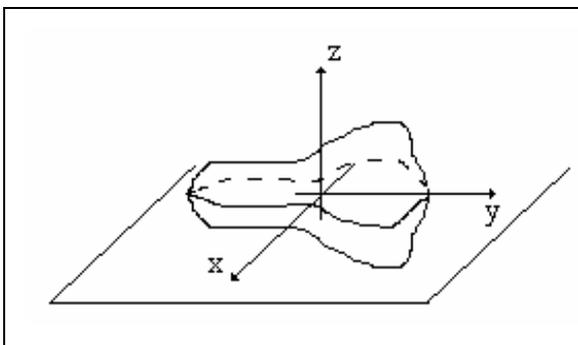
En general en la mayor parte de los problemas prácticos, el rígido tiene ciertas simetrías que permiten determinar los ejes principales por inspección.



Por ejemplo, si el rígido es de revolución alrededor del eje Pz , es fácil ver que los productos de inercia I_{zx} e I_{zy} se anulan por simetría, si uno elige el eje z como el eje de simetría. La matriz de inercia no puede cambiar, debido a la simetría de revolución al rotar alrededor de z los ejes x e y . Ello implica que la matriz de inercia respecto a cualquier sistema de ejes ortogonales que tengan al eje de simetría por eje z toman la forma:

$$\mathbb{I}_P = \begin{pmatrix} I_x & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & I_z \end{pmatrix}$$

que corresponde al caso en que la ecuación secular tiene una raíz doble.



En el caso de un rígido que tiene un plano de simetría es inmediato comprobar que la matriz de inercia respecto a un punto P perteneciente al plano tiene al eje perpendicular al plano por P como eje principal de inercia. En efecto, es inmediato comprobar que

$$I_{xz} = I_{yz} = 0$$

y la matriz toma la forma

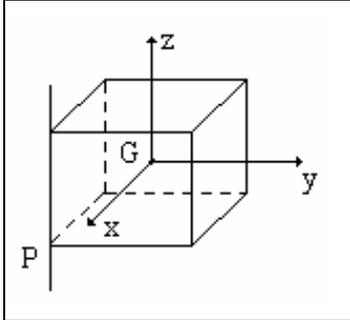
$$\mathbb{I}_P = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & 0 \\ I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{pmatrix}$$

Para encontrar los tres ejes principales basta con diagonalizar la matriz restringida al plano Pxy .

Un caso particular con esta simetría es el de los rígidos planos. El eje perpendicular al plano del rígido es eje principal de inercia.

Teorema de Steiner

Las expresiones obtenidas para calcular \bar{L} y T son válidas cualquiera sea el punto que se toma como origen del sistema de coordenadas solidario al rígido. Muchas veces conviene tomar momentos respecto a cierto punto (un punto fijo del cuerpo, por ejemplo) aunque el cálculo del tensor de inercia sea más simple en otro punto. El teorema de Steiner permite relacionar los tensores de inercia respecto a dos puntos.

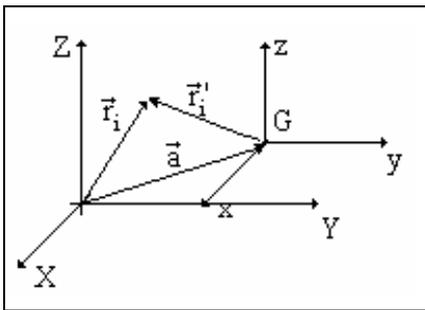


Supongamos por ejemplo que tenemos un cubo con un eje fijo que pasa por una de sus aristas. Es más fácil calcular la matriz de inercia respecto al centro de masa G, ya que los 3 ejes perpendiculares a las caras son obviamente principales, y luego pasar a los ejes paralelos por P.

Para probar el teorema, recordemos que:

$$\Pi_{P\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N \left\{ m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P)^2 \delta_{\alpha\beta} - m_i (\vec{r}_i - \vec{r}_P)_\alpha (\vec{r}_i - \vec{r}_P)_\beta \right\}$$

y tomamos el origen de coordenadas en P, de modo que $\vec{r}_P = 0$.



$$\vec{r}_i = \vec{a} + \vec{r}'_i$$

$$\Pi_{P\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N \left\{ m_i (\vec{a} + \vec{r}'_i)^2 \delta_{\alpha\beta} - m_i (\vec{a} + \vec{r}'_i)_\alpha (\vec{a} + \vec{r}'_i)_\beta \right\} =$$

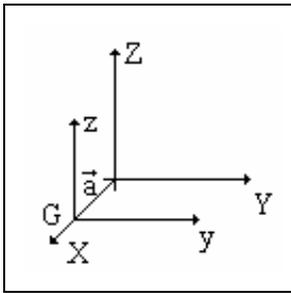
$$= \sum_{i=1}^N m_i \left\{ (a^2 + 2\vec{a}\vec{r}'_i + \vec{r}'_i{}^2) \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta - a_\alpha \vec{r}'_{i\beta} - \vec{r}'_{i\alpha} a_\beta - \vec{r}'_{i\alpha} \vec{r}'_{i\beta} \right\}$$

y usando que $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}'_i = M \vec{r}'_G = 0$

$$\boxed{\Pi_{P\alpha\beta} = M (a^2 \delta_{\alpha\beta} - a_\alpha a_\beta) + \Pi_{G\alpha\beta}}$$

que es la forma general de la relación de Steiner entre los tensores de inercia respecto a P cualquiera y respecto al centro de masas G. Enfatizamos que esta relación sólo vale si ambos sistemas tienen sus ejes paralelos.

Ejemplo: Se desea trasladar a lo largo del eje Ox



$$\vec{a} = a\vec{I}$$

$$a_\alpha = a\delta_{\alpha 1}$$

$$\Pi_{P\alpha\beta} = M(a^2\delta_{\alpha\beta} - a^2\delta_{\alpha 1}\delta_{\beta 1}) + \Pi_{G\alpha\beta}$$

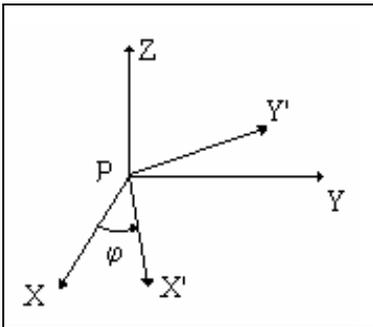
por lo tanto

$I_{Pxx} = I_{Gxx}$, $I_{Pyy} = I_{Gyy} + Ma^2$ y $I_{Pzz} = I_{Gzz} + Ma^2$, y todos los productos de inercia permanecen invariantes.

Rotaciones

Hemos visto cómo relacionar dos tensores de inercia respecto a ejes paralelos trasladados. Supongamos que queremos relacionar el tensor de inercia respecto a dos sistemas rotados uno con relación al otro.

Por ejemplo, en la figura consideramos el caso de una rotación plana.



Llamamos r_α a las coordenadas de Q respecto a Pxyz y r'_α a sus coordenadas respecto a P'x' y z'.

Bajo un cambio de base las coordenadas de Q se transforman linealmente. Es decir,

$$r'_\alpha = \sum_{\beta=1}^3 \lambda_{\alpha\beta} r_\beta$$

donde λ es la matriz correspondiente a la rotación considerada. Las rotaciones dejan invariantes las distancias de Q al origen.

$$\begin{aligned} |Q-P|^2 &= \sum_{\alpha=1}^3 r_\alpha'^2 = \sum_{\alpha=1}^3 r'_\alpha r'_\alpha = \sum_{\alpha=1}^3 \left\{ \left(\sum_{\beta=1}^3 \lambda_{\alpha\beta} r_\beta \right) \left(\sum_{\gamma=1}^3 \lambda_{\alpha\gamma} r_\gamma \right) \right\} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^3 \lambda_{\beta\alpha}^T \lambda_{\alpha\gamma} r_\beta r_\gamma = \\ &= \sum_{\beta=1}^3 r_\beta^2 = \sum_{\beta,\gamma=1}^3 r_\beta \delta_{\beta\gamma} r_\gamma \end{aligned}$$

donde $\lambda_{\beta\alpha}^T = \lambda_{\alpha\beta}$ es la matriz traspuesta de λ .

Como la relación se cumple para todo punto Q, resulta

$$\sum_{\alpha=1}^3 \lambda_{\beta\alpha}^T \lambda_{\alpha\gamma} = \delta_{\beta\gamma}$$

relación que escrita en forma matricial toma la forma

$$\lambda^T \lambda = I$$

o sea $\lambda^T = \lambda^{-1}$ y $\lambda^T \lambda = \lambda \lambda^T = I$

Las matrices que verifican esta relación se llaman ortogonales.

Recordando la forma explícita del tensor de inercia resulta

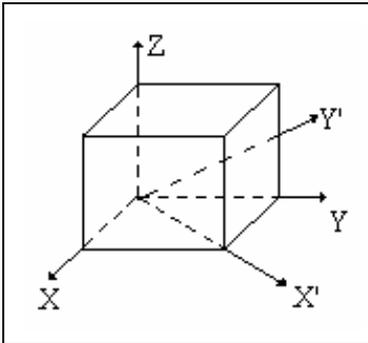
$$\begin{aligned} \Pi'_{P\alpha\beta} &= \sum_{i=1}^N m_i \left\{ \vec{r}'_i{}^2 \delta_{\alpha\beta} - \vec{r}'_{i\alpha} \vec{r}'_{i\beta} \right\} = \sum_{i=1}^N m_i \left\{ \vec{r}'_i{}^2 \delta_{\alpha\beta} - \left(\sum_{\gamma=1}^3 \lambda_{\alpha\gamma} r_{i\gamma} \right) \left(\sum_{\delta=1}^3 \lambda_{\beta\delta} r_{i\delta} \right) \right\} = \\ &= \sum_{i=1}^N m_i \left\{ \vec{r}'_i{}^2 \sum_{\gamma=1}^3 \lambda_{\alpha\gamma} \lambda_{\gamma\beta}^T - \left(\sum_{\gamma,\delta=1}^3 \lambda_{\alpha\gamma} \lambda_{\delta\beta}^T r_{i\delta} r_{i\gamma} \right) \right\} = \sum_{\gamma,\delta=1}^3 \lambda_{\alpha\gamma} \Pi_{P\gamma\delta} \lambda_{\delta\beta}^T \end{aligned}$$

Es decir,

$$\Pi'_p = \lambda \Pi_p \lambda^T$$

Los objetos que transforman de este modo son llamados tensores de rango dos.

Ejemplo: Calcular el tensor de inercia de un cubo respecto a los ejes Ox' y z' que se muestran en la figura.



Comencemos calculándolo respecto a $Oxyz$ y luego rotaremos un ángulo $\frac{\pi}{4}$ respecto al eje Oz .

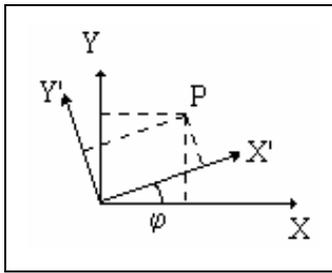
$$I_{zz} = \int_0^a \int_0^a \int_0^a \rho(x^2 + y^2) dx dy dz = a^2 \rho \frac{x^3}{3} \Big|_0^a + a^2 \rho \frac{y^3}{3} \Big|_0^a = 2\rho \frac{a^5}{3} = \frac{2}{3} Ma^2 = I_{xx} = I_{yy}$$

$$I_{xy} = -\int_0^a \int_0^a \int_0^a \rho xy dx dy dz = -\rho a \frac{x^2}{2} \Big|_0^a \frac{y^2}{2} \Big|_0^a = -\frac{Ma^2}{4} = I_{xz} = I_{yz}$$

por lo que respecto a $Oxyz$ la matriz de inercia toma la forma

$$\Pi_o = Ma^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Calculamos ahora la matriz de rotación alrededor del eje Oz con ángulo φ : $\lambda_{ij}(\varphi)$



$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi \\y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi \\z' &= z\end{aligned}$$

$$\lambda = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que es una matriz ortogonal. En

$$\lambda^T = \lambda(-\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \lambda^T = \lambda^T \cdot \lambda = I$$

$$\text{Para } \varphi = \frac{\pi}{4}, \lambda_{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y sólo queda por calcular

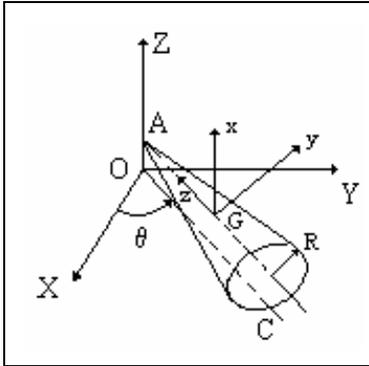
$$\Pi'_o = \lambda_{\frac{\pi}{4}} \Pi_o \lambda_{\frac{\pi}{4}}^T$$

Concluimos este capítulo con una observación importante. Usualmente se calculan las componentes del tensor de inercia respecto a ejes solidarios con el rígido. Si uno desea calcular, por ejemplo, el momento angular respecto al centro de masas G, basta con calcular las componentes de la velocidad angular en el sistema solidario. Luego $\Pi_G \cdot \vec{\omega}$ nos dará el vector momento angular expresado en los ejes solidarios.

Si bien siempre es posible trabajar en los ejes solidarios con el rígido, hay casos en que puede convenir usar otros sistemas de referencia, llamados ejes intermedios, donde las componentes del tensor de inercia son también constantes.

Ejemplo:

Un cono rueda sin deslizar sobre un plano horizontal con su vértice A fijo a una altura R, igual al radio de la base, del eje z. El cono tiene altura h, ángulo al vértice α , y masa M. Se desea calcular la energía cinética T del cono en función de $\dot{\theta}$.



Es fácil ver que la distancia de G al vértice A es $\frac{3h}{4}$.

Elegimos ahora un sistema de ejes principales por G. El eje de simetría AG del cono es obviamente un eje principal, por lo que elegimos el eje z según AG. Como el cono es de revolución alrededor del eje AG, cualquier par de ejes perpendiculares a AG son principales. Elegimos y según la horizontal y x según la vertical.

Respecto a estos ejes el tensor de inercia tiene la forma

$$\Pi_G = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Para determinar la velocidad angular del cono comencemos observando que

$$v_A = 0, \text{ ya que A es fijo.}$$

$$v_C = 0, \text{ ya que el cono rueda sin deslizar.}$$

Por lo tanto

$$\vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (\vec{r}_C - \vec{r}_A) = 0 \Rightarrow \vec{\omega} \times (\vec{r}_C - \vec{r}_A) = 0$$

$$\therefore \vec{\omega} \text{ es colineal con } \vec{r}_C - \vec{r}_A$$

$$\vec{\omega} = \omega \cos \alpha \vec{k} + \omega \sin \alpha \vec{i}$$

La velocidad del centro de masas es

$$\vec{v}_G = \underbrace{\vec{v}_A}_{=0} + \vec{\omega} \times \left(-\frac{3}{4} h \vec{k} \right) = \frac{3}{4} h \dot{\theta} \vec{j} \quad \therefore \dot{\theta} = +\omega \sin \alpha$$

o sea

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \operatorname{ctg} \alpha \vec{k} + \dot{\theta} \vec{i}$$

Para calcular T basta recordar que:

$$T = \frac{1}{2} M v_A^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \Pi_A \cdot \vec{\omega}$$

$$\frac{1}{2} M v_A^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \Pi_A \cdot \vec{\omega} &= \frac{1}{2} (\omega_x, 0, \omega_z) \cdot \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ 0 \\ \omega_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} I \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_z^2 = \\ &= \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} I_3 \operatorname{ctg}^2 \alpha \dot{\theta}^2 \end{aligned}$$

Los momentos de inercia al punto A del cono son

$$I_3 = \frac{3}{10} M h^2 \operatorname{tg}^2 \alpha$$

$$I = \frac{3}{20} M h^2 (4 + \operatorname{tg}^2 \alpha)$$

y sustituyendo se obtiene

$$T = \frac{3}{40} M h^2 (6 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \dot{\theta}^2$$

CAPÍTULO VII - DINÁMICA DEL RÍGIDO

Ecuaciones cardinales

En el caso de un cuerpo rígido las ecuaciones fundamentales para un sistema de partículas describen completamente el movimiento del cuerpo. Dada la posición del rígido en un instante, la velocidad de uno de sus puntos y la velocidad angular, las ecuaciones cardinales determinan completamente el movimiento posterior del cuerpo. La primera ecuación cardinal permite describir el movimiento del centro de masas del rígido.

$$M\ddot{\vec{r}}_G = \vec{R}^{(e)}$$

Para escribir la segunda cardinal conviene recordar la expresión del momentum angular

$$\vec{L}_Q = \Pi_Q \vec{\omega} + M(\vec{r}_G - \vec{r}_Q) \times \vec{v}_Q$$

donde \vec{v}_Q era la velocidad de un punto del rígido, $\vec{\omega}$ su velocidad angular y Π_Q el tensor de inercia.

En el caso en que el punto Q es solidario al rígido, la segunda ecuación cardinal toma entonces la forma

$$\left. \frac{d(\Pi_Q \vec{\omega})}{dt} \right|_F + M(\vec{r}_G - \vec{r}_Q) \times \vec{a}_Q = \vec{M}_Q^{(e)}$$

donde \vec{a}_Q es la aceleración del punto Q. Las derivadas respecto del tiempo se toman respecto del sistema inercial, supuesto fijo. Recuérdese que por lo general se trabaja expresando el tensor de inercia en un sistema solidario o en un sistema intermedio. Si se trabaja en un sistema solidario, para calcular $\Pi_Q \vec{\omega}$ se debe expresar la velocidad angular en dicho sistema y luego recordar que

$$\left. \frac{d(\Pi_Q \vec{\omega})}{dt} \right|_F = \left. \frac{d(\Pi_Q \vec{\omega})}{dt} \right|_S + \vec{\omega} \times \Pi_Q \vec{\omega} = \Pi_Q \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \Pi_Q \vec{\omega}$$

En caso de que se tome la segunda cardinal en el centro de masa G se tiene

$$\left. \frac{d(\Pi_G \vec{\omega})}{dt} \right|_F = \vec{M}_G^{(e)}$$

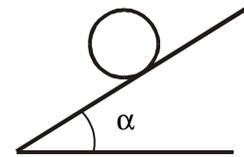
que si se trabaja en el sistema solidario se escribe

$$\Pi_G \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \Pi_G \vec{\omega} = \vec{M}_G^{(e)}$$

La segunda cardinal también toma una forma sencilla si el rígido tiene un punto fijo P. En ese caso,

$$\left. \frac{d(\Pi_P \vec{\omega})}{dt} \right|_F = \vec{M}_P^{(e)}.$$

Ejemplo 1: Calcular la aceleración del centro de masas de un disco de radio R que rueda sin deslizar sobre un plano inclinado de ángulo α .



Tomando momentos respecto de G:

$$1^{\text{era}} \text{ cardinal: } T - Mg \sin \alpha = M\ddot{x}_G$$

$$2^{\text{da}} \text{ cardinal: } \vec{M}_G = TR\vec{k} = \frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}\vec{k}$$

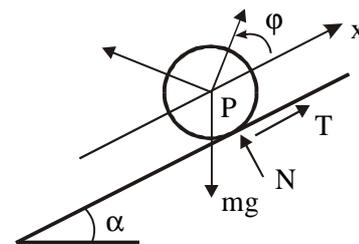
Además se tiene el vínculo $\dot{x}_G + R\dot{\varphi} = 0$, ya que $\vec{v}_P = 0$ (rueda sin deslizar).

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}MR\dot{\varphi} = -\frac{1}{2}M\ddot{x}_G.$$

Sustituyendo en la 1^{era} cardinal

$$T = \frac{1}{3}Mg \sin \alpha$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_G = -\frac{2}{3}g \sin \alpha$$



Ejemplo 2: Una barra de longitud l y masa M está articulada en un extremo P y gira alrededor de un eje vertical con velocidad angular Ω constante.

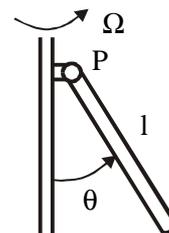
- Determinar la ecuación de movimiento para el ángulo θ que forma la barra con la vertical.
- Determinar el ángulo θ_0 de equilibrio relativo.

a) Consideremos el sistema de ejes intermedios P, $x'y'z'$ que gira respecto al fijo Pxyz con velocidad angular $\Omega\vec{K} = \dot{\varphi}\vec{K}$. El eje Px' está en el plano horizontal y pertenece a la intersección del mismo con el plano zPG. El eje del sistema solidario Pz'' tiene la dirección de la barra.

Por el teorema de adición de velocidades angulares

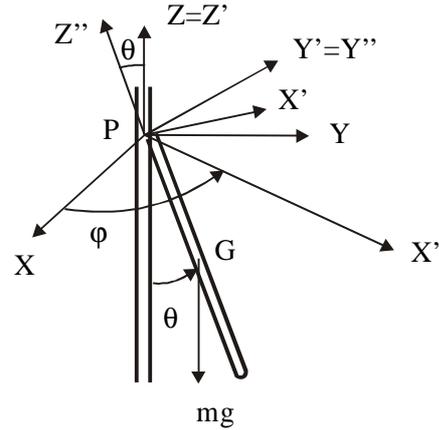
$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{K} - \dot{\theta}\vec{j} = \Omega\vec{K} - \dot{\theta}\vec{j} = \dot{\varphi} \cos \theta \vec{k} + \dot{\varphi} \sin \theta \vec{i} - \dot{\theta}\vec{j}$$

$$I_{Pxx} = \frac{M}{l} \int_0^l z^2 dz = \frac{1}{3}Ml^2 = I_{Pyy}$$



$$\Pi_P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}Ml^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}Ml^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{L}_P = \frac{1}{3}Ml^2(\dot{\phi}\text{sen}\theta\vec{i} - \dot{\theta}\vec{j})$$



es el momento angular respecto de P en los ejes solidarios.
Si se toma la segunda cardinal respecto del punto fijo P

$$\Pi_P \dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times \Pi_P \vec{\omega} = \vec{M}_P^{(e)}$$

$$\Pi_P \dot{\vec{\omega}} = \frac{1}{3}Ml^2(\Omega\dot{\theta}\cos\theta\vec{i} - \ddot{\theta}\vec{j})$$

$$\vec{\omega} \times \Pi_P \vec{\omega} = \frac{1}{3}Ml^2(\dot{\phi}^2\text{sen}\theta\cos\theta\vec{j} + \dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta\vec{i})$$

La componente \vec{j} de la segunda cardinal da la ecuación buscada

$$\frac{1}{3}Ml^2(-\ddot{\theta} + \dot{\phi}^2\text{sen}\theta\cos\theta) = Mgl\text{sen}\theta$$

$$-\ddot{\theta} + \Omega^2\text{sen}\theta\cos\theta = +\frac{3g}{l}\text{sen}\theta$$

b) Si $\Omega^2\cos\theta = \frac{3g}{l}$ existe una posición de equilibrio relativo para θ_0 (además de $\theta_0 = 0$):

$$\cos\theta_0 = \frac{3g}{l\Omega^2}$$

Si $\frac{3g}{l\Omega^2} \geq 1$ la posición de equilibrio es sólo $\theta_0 = 0$.

ENERGÍA Y POTENCIA EN SISTEMAS RÍGIDOS

Miremos ahora la ecuación que relaciona la potencia con el ritmo de variación de la energía cinética, en el caso de un cuerpo rígido.

En ese caso, el término

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \cdot (\vec{v}_i - \vec{v}_j)$$

donde hemos usado que $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ y recordando que las fuerzas internas están dirigidas según $\vec{r}_i - \vec{r}_j$, resulta

$$\vec{F}_{ij} \cdot \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = 0$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} W &= \sum_i \vec{F}_i^{(e)} \cdot [\vec{v}_G + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_j)] = \vec{R}^{(e)} \cdot \vec{v}_G + \vec{\omega} \cdot \sum_i (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_i^{(e)} = \\ &= \vec{R}^{(e)} \cdot \vec{v}_G + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_G^{(e)} = \frac{dT}{dt} \end{aligned}$$

Recordando la expresión obtenida para la energía cinética de un rígido resulta

$$\frac{dT}{dt} = m\vec{v}_G \cdot \frac{d\vec{v}_G}{dt} + \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_G \dot{\vec{\omega}}$$

y por lo tanto la relación entre la potencia temporal de la energía cinética es consecuencia de las ecuaciones cardinales y no agrega nueva información.

Es inmediato comprobar que

$$W = \vec{R}^{(e)} \cdot \vec{v}_o + \vec{\omega} \cdot \vec{M}_o$$

La potencia tiene la misma forma sin importar qué punto del rígido se considere.

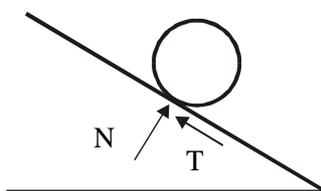
CAPÍTULO VIII - ESTÁTICA DE SISTEMAS RÍGIDOS

SISTEMAS VINCULADOS Y ESTÁTICA

Vimos que las fuerzas que actúan sobre un sistema se podían clasificar en internas y externas. Existe otra clasificación a la cual conviene que hagamos referencia en este momento. Se dice que una fuerza es vincular si proviene de la acción de algún vínculo. Por ejemplo, en el caso de un aro rugoso que rueda sin deslizar sobre un plano inclinado hay dos vínculos.

1. El disco no puede penetrar en el plano, es decir, $d_G \geq R$ (d_G es la distancia al plano del centro de masas).
2. El disco rueda sin deslizar, es decir que el punto de contacto tiene velocidad nula.

De acuerdo con el llamado principio de liberación de los vínculos que enunciaremos a continuación, cada vínculo puede sustituirse por un cierto sistema de fuerzas. En el ejemplo,



1. $N \geq 0$
2. $|T| \leq \mu_e N$

donde μ_e es el coeficiente de fricción estática, T y N son las fuerzas vinculares.

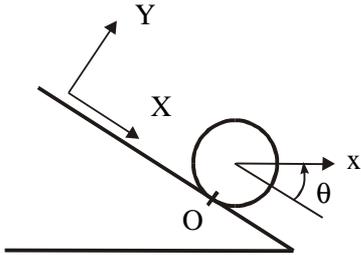
Vamos a enunciar dos principios que son constantemente usados en mecánica aunque en general no son enunciados explícitamente. La razón por la cual es necesario introducirlos es debido a que las nociones de cuerpo rígido y vínculo son producto de idealizaciones. Si uno trabajase con las partículas elementales que componen dichos cuerpos y las fuerzas fundamentales que imponen restricciones a su movimiento, estos principios no serían necesarios.

Recordemos que se llama vínculo a toda restricción al movimiento de un sistema. Por ejemplo, un rígido es un sistema vinculado, ya que dado un par de sus puntos P y Q, $(\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q)^2 = \text{cte.}$ independientemente del tiempo. Sabemos que estos vínculos reducen el número de grados de libertad (que en principio serían infinitos en un sistema continuo) a seis coordenadas independientes. Cuando un vínculo se puede expresar como una función de las coordenadas y el tiempo: $f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N, t) = 0$, se llama holónimo. Los vínculos del rígido son holónomos. Un ejemplo de vínculo no holónimo es un gas contenido en una caja. En este caso los vínculos se expresan por un conjunto de desigualdades:

$$0 \leq r_i^\alpha \leq d^\alpha, \alpha = 1, 2, 3.$$

Volvamos al ejemplo ya mencionado de disco que se mueve sobre un plano inclinado. En principio, para describir el movimiento de un rígido en un plano se necesitan tres coordenadas, dos para el centro de masas y el ángulo de rotación. Si el disco permanece apoyado sobre el plano inclinado,

$y = R$, y además la condición de rodadura impone $v_o = 0$,



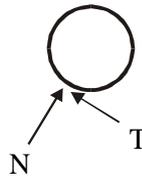
$$\begin{aligned} \mathbf{v}_G &= \mathbf{v}_o + \boldsymbol{\omega} \wedge (\mathbf{r}_G - \mathbf{r}_O) \\ \dot{x} \cdot \vec{I} &= \dot{\theta} \cdot \vec{K} \wedge R \cdot \vec{J} = -R \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{I} \\ \dot{x} + R \cdot \dot{\theta} &= 0 \end{aligned}$$

por lo que el sistema tiene dos vínculos holónomos y un solo grado de libertad.

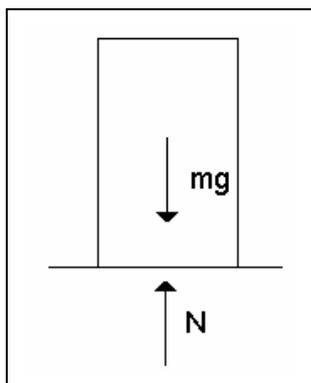
El *principio de liberación* establece que los vínculos se pueden sustituir por fuerzas. Explícitamente dice:

- Dado un sistema físico S con ciertas condiciones iniciales C.I., sometido a ciertos vínculos V' V'' y a un sistema de fuerzas F ; dicho sistema tiene la misma evolución que el sistema S con condiciones iniciales C.I. sometido a las fuerzas $F \cup F(V')$ y a los vínculos V'' .

Por ejemplo, en el caso del rígido circular que rueda sin deslizar, se puede pensar como un sistema de partículas sometido a los vínculos de rigidez, de apoyo sobre el plano y a los de rodadura. El principio de liberación dice que podemos sustituir parte de los vínculos por fuerzas vinculares.



- El *principio de pasividad de los vínculos* dice que si existe un sistema de reacciones vinculares $F'(V')$ compatibles con el movimiento y con los vínculos, entonces el movimiento del sistema será tal que permanece vinculado.



Aplicamos explícitamente el principio cuando igualamos la reacción del piso sobre el cuerpo apoyado $N = mg$, y desechamos la posibilidad de que $N > mg$.

Veremos un caso más interesante de aplicación de este principio al estudiar el vuelco de un rígido.

ESTÁTICA

Para que la posición de un cuerpo sea de equilibrio debe cumplirse que el cuerpo colocado en reposo en esa posición permanezca en reposo para todo tiempo posterior. Por lo tanto, en una posición de equilibrio los términos cinéticos de las ecuaciones cardinales deben anularse, es decir,

$$\vec{R}^{\text{ext}} = 0, \vec{M}_O^{\text{ext}} = 0$$

Como $\vec{M}_p^{\text{(ext)}} = \vec{M}_o^{\text{(ext)}} + \vec{R}^{\text{(ext)}} \wedge (\vec{r}_p - \vec{r}_o)$, el momento de las fuerzas externas respecto de cualquier punto debe anularse. Recíprocamente, si $\vec{R}^{\text{ext}} = 0$ entonces $\vec{a}_G = 0$, la aceleración del centro de masas es nula, de modo que si el cuerpo se coloca inicialmente en reposo, se cumplirá $\vec{v}_G = 0$ para todo tiempo, por lo que el centro de masas permanecerá en reposo. Además, como $\vec{M}_O^{\text{ext}} = 0$,

$$0 = \vec{M}_G^{\text{ext}} = \Pi_G \vec{\omega} + \vec{\omega} \wedge \Pi_G \vec{\omega} = \Pi_G \vec{\omega}$$

ya que $\vec{\omega} = 0$ inicialmente.

Por lo tanto, $\Pi_G \dot{\vec{\omega}} = 0$ y en un sistema de ejes principales se cumple

$$\begin{pmatrix} I_x \omega_x \\ I_y \omega_y \\ I_z \omega_z \end{pmatrix} = 0$$

donde los I son los momentos principales de inercia. Si los tres momentos son no nulos será $\vec{\omega} = 0$ para todo tiempo. Si uno de los momentos principales es nulo (por ejemplo I_x), ω_x podría ser no nulo, pero en ese caso $\sum m_i (y_i^2 + z_i^2) = 0$, lo que implica que todos los puntos del rígido están sobre el eje Gx. En ese caso el rígido es una barra infinitamente delgada orientada según Gx y la rotación de la barra alrededor de dicho eje es irrelevante.

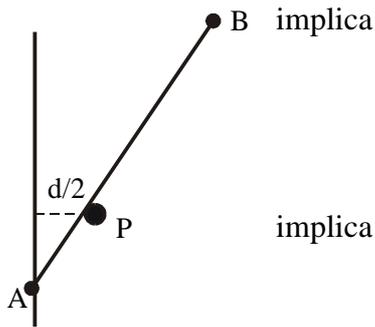
Por consiguiente, la condición necesaria y suficiente para que un rígido se encuentre en una posición de equilibrio es que se anulen la resultante y el momento respecto a un punto arbitrario de las fuerzas externas.

Ejemplo 1: Una barra AB de longitud 2d y masa M esta apoyada en un punto P que dista d/2 de una pared vertical. El extremo A de la barra se apoya en la pared vertical.

a) Suponiendo que no hay fricción entre la barra y la pared determinar el ángulo φ de equilibrio.

b) Suponiendo ahora que hay fricción, determinar el mínimo coeficiente μ para que $\varphi = \pi/4$ sea una posición de equilibrio.

$$\vec{R}^{(e)} = 0$$



$$N \operatorname{sen} \varphi - T = Mg \quad 1)$$

$$N \cos \varphi - R = 0 \quad 2)$$

$$\mathbf{M}_A^{(e)} = 0$$

implica

$$Nd_{PA} - Mgd \operatorname{sen} \varphi = 0 \quad 3)$$

$$d_{PA} \operatorname{sen} \varphi = d/2 \Rightarrow \frac{Nd}{2 \operatorname{sen} \varphi} = Mgd \operatorname{sen} \varphi$$

es decir,

$$N = 2Mg \operatorname{sen}^2 \varphi$$

$$1) \Rightarrow T = -Mg(1 - 2 \operatorname{sen}^3 \varphi)$$

$$2) \Rightarrow R = 2Mg \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \varphi$$

Caso a) Si no hay fricción, $T = 0$

$$\operatorname{sen}^3 \varphi = 1/2 \Rightarrow \varphi = \operatorname{Ar} \operatorname{sen} \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\varphi \approx 52,5^\circ \approx 0,91 \operatorname{rad}$$

Se debe verificar además que $R \geq 0$, lo que se cumple para $\pi/2 \geq \varphi \geq 0$.

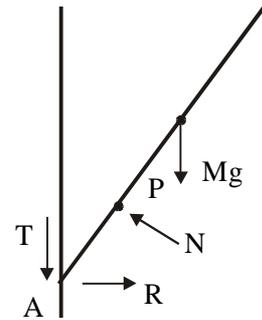
Caso b)

$$|T| \leq \mu R$$

$$|1 - 2 \operatorname{sen}^3 \varphi| \leq 2\mu \operatorname{sen}^2 \varphi \cos \varphi$$

$$\varphi = \pi/4 \Rightarrow 1 - 1/\sqrt{2} \leq \mu\sqrt{2}/2 \Rightarrow \mu \geq \sqrt{2} - 1$$

Obsérvese que si μ es menor que $\sqrt{2} - 1$ el equilibrio se rompería con la barra deslizando hacia abajo.

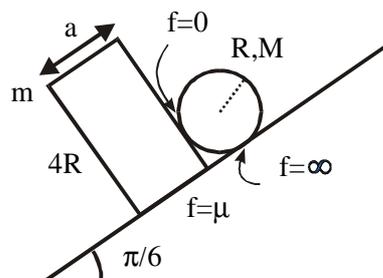


Ejemplo 2: Un disco de radio R y masa M esta apoyado sobre una placa rectangular de base a y altura $4R$ con masa m . No hay fricción entre disco y placa.

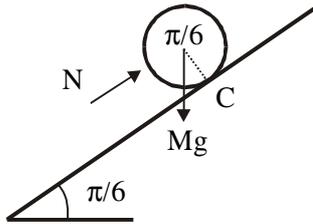
a) Determinar el mínimo valor de a para el cual es posible el equilibrio.

b) Determinar el mínimo coeficiente de fricción entre placa y plano inclinado compatible con el equilibrio.

c) ¿Qué ocurre si $m=2M$, $\mu=0,8$ y $a=2R$?



Equilibrio del disco: Para no tomar en consideración las fuerzas en el punto de contacto del disco con el plano imponemos

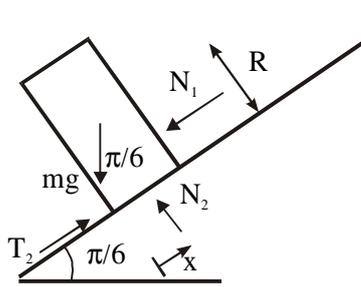


$$M_c = 0 - NR + MgR \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} = 0$$

$$N_1 = \frac{Mg}{2}$$

Equilibrio de la placa: El principio de pasividad de los vínculos asegura que si es posible aplicar la normal N_1 en algún punto de la base de modo que haya equilibrio, éste no se romperá.

La ecuación $\vec{R}^{(e)} = 0$ implica



$$mg \operatorname{sen} 30 + \frac{Mg}{2} = T_2$$

$$\Rightarrow T_2 = \frac{(m+M)g}{2}$$

$$mg \cos 30 = N_2 = mg \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\vec{M}_o^{(e)} = 0 \Rightarrow N_2 x - 2Rmg \operatorname{sen} 30 - \frac{a}{2} mg \cos 30 + \frac{Mg}{2} R = 0$$

a) Habrá equilibrio si $0 \leq x \leq a$

$$x = \frac{M+2m}{m\sqrt{3}} R \Rightarrow \frac{M+2m}{m\sqrt{3}} \leq \frac{a}{R} \quad \text{es la condición para que no vuelque.}$$

b) Para que no deslice

$$\frac{m+M}{2} \leq \mu m \frac{\sqrt{3}}{2}$$

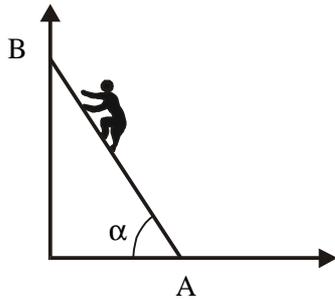
c) Si $a=2R$ y $m=2M$ no hay vuelco y hay deslizamiento.

Ejemplo 3: *Un caso hiperestático.* Una escalera de longitud $2l$ y masa m esta apoyada sobre el piso con coeficiente de fricción $\mu_1=0,4$ y sobre la pared con coeficiente $\mu_2=0,2$ y forma un ángulo α con la horizontal. Un pintor de masa $M=2m$ está subiendo por la escalera y se encuentra a una distancia d del piso.

Determinar el máximo ángulo α que permitiría al pintor subir hasta el extremo de la escalera sin que ésta deslice.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(e)} = 0 &\Rightarrow N_1 + T = (M+m)g \\ N &= T_1 & T_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_A^{(e)} = 0 \Rightarrow mgl \cos \alpha + Mgd \cos \alpha - N2l \operatorname{sen} \alpha - T2l \cos \alpha = 0$$



$$\frac{mg}{2} + \frac{Mgd}{2l} - N \operatorname{tg} \alpha - T = 0 \quad (*)$$

Observe que tenemos tres ecuaciones y cuatro incógnitas y las fuerzas no quedan determinadas por las ecuaciones del equilibrio. Se dice en este caso que el sistema es hiperestático.

Resolvamos primero el caso llamado isostático en que el coeficiente de rozamiento entre escalera y pared es nulo.

$$T_1 = N$$

$$N_1 = 3mg$$

$$\frac{mg}{2} \left(1 + \frac{2d}{l} \right) - N \operatorname{tg} \alpha = 0$$

$$N_1 = \frac{mg}{2 \operatorname{tg} \alpha} \left(1 + \frac{2d}{l} \right)$$

Como $T_1 = N \geq 0$

$$T_1 \leq 0,4 (3mg) \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha \geq \frac{1 + d/2}{6x(0,4)}$$

el caso más restrictivo es cuando el pintor ocupa la posición más alta $d=2l$

$$\operatorname{tg} \alpha \geq 25/12$$

Miremos ahora el **caso hiperestático** con $d=2l$

La ecuación (*) implica, usando $M=2m$,

$$T = \frac{5mg}{2} - \operatorname{tg} \alpha N$$

Las demás reacciones, en términos de N nos quedan:

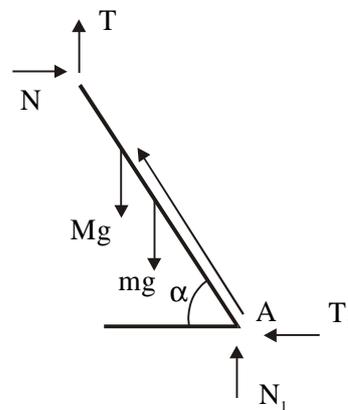
$$N_1 = \frac{mg}{2} + \operatorname{tg} \alpha N$$

$$T_1 = N$$

Las condiciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned} T_1 &\leq \mu_1 N_1 \\ |T| &\leq \mu_2 N \end{aligned}$$

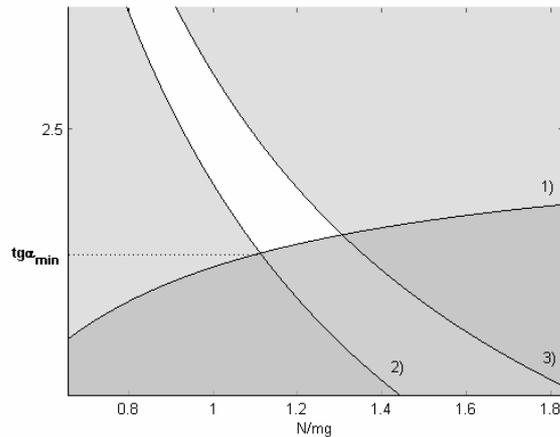
Que implican las siguientes desigualdades:



$$1) \operatorname{tg} \alpha \geq \frac{1}{\mu_1} - \frac{mg}{2N}$$

$$2) \operatorname{tg} \alpha \geq \frac{5mg}{2N} - \mu_2$$

$$3) \operatorname{tg} \alpha \leq \frac{5mg}{2N} + \mu_2$$



En un gráfico con N como abcisa, la ecuación 1) nos dice que los valores admisibles de $\operatorname{tg} \alpha$ están por encima de $\frac{1}{\mu_1} - \frac{mg}{2N}$, la 2) que están por encima de $\frac{5mg}{2N} - \mu_2$ y la 3) que están por debajo de $\frac{5mg}{2N} + \mu_2$ (las zonas excluidas están en sombreado en el gráfico). La región de parejas admisibles $(N, \operatorname{tg} \alpha)$ tiene un extremo inferior que corresponde a la intersección de 1) y 2) y define al mínimo valor posible para la $\operatorname{tg} \alpha$:

$$\operatorname{tg} \alpha_{\min} = \frac{5 - \mu_1 \mu_2}{6 \mu_1} = \frac{41}{20}$$

Existe una forma geométrica alternativa de tratar los problemas hiperestáticos. Está basada en el concepto de sistemas de fuerzas equipolentes. Se dice que dos sistemas son equipolentes si tienen igual resultante e igual momento respecto de un punto. Como en las ecuaciones cardinales sólo aparecen la resultante y el momento total respecto de un punto, dos sistemas equipolentes tienen el mismo efecto físico.

Reducir un sistema es sustituirlo por otro, más simple, equipolente al primero.

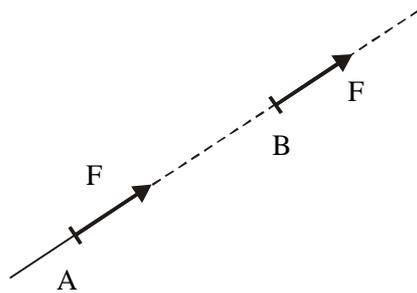
Un par de fuerzas está constituido por dos fuerzas cuyas líneas de acción son paralelas y que tienen la misma magnitud y sentidos opuestos. Un par tiene resultante nula y momento respecto a un punto cualquiera \mathbf{M} cuya magnitud es igual a Fa .

Dos pares con el mismo momento son equipolentes.

Todo sistema de fuerzas se puede reducir a una fuerza aplicada en un punto arbitrario O y a un par. En efecto dado un sistema de fuerzas S con resultante \vec{R} y momento total respecto de $O = \vec{M}_O$, dicho sistema es equivalente al sistema S' con una fuerza R aplicada en O y un par cualquiera con momento M_O .

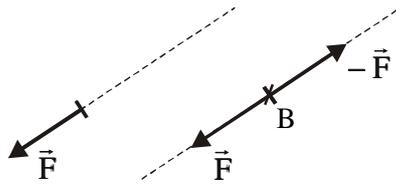
Un sistema S de fuerzas F_i aplicadas en los puntos P_i se puede reducir gráficamente a una fuerza y un par usando los siguientes propiedades:

- 1) Si las fuerzas se desplazan a lo largo de sus líneas de acción dan lugar a sistemas equipolentes.



En efecto, es inmediato probar que \vec{F} aplicada en A tiene el mismo momento respecto a un punto cualquiera que F aplicada en B.

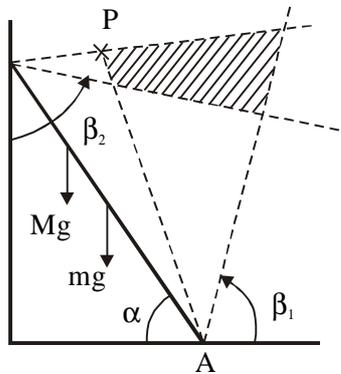
- 2) Una fuerza aplicada en A es equivalente a una aplicada en otro punto cualquiera B más un par. Es inmediato a partir de la figura.



- 3) Un sistema formado por pares equipolentes a un solo par con momento igual a la suma vectorial de los momentos de cada par. Trivial, ya que ambos sistemas tienen igual resultante (nula) e igual momento respecto a cualquier punto.

Volviendo al ejemplo de la escalera

La fuerza total en el piso apunta en una dirección comprendida entre $\text{tg}(\beta_2 - \pi)$ y $\text{tg}(-\beta_2 + \pi)$, con $\cot g\beta_2 = \mu_1$.



La resultante de las fuerzas reactivas en el piso y la pared tendrá un punto de aplicación en el interior de la zona rayada y debe apuntar según la vertical hacia arriba. Su momento respecto a A sea máximo cuando el punto de aplicación se desplace hasta P de coordenadas (x_p, y_p) . Es fácil ver que las rectas

$$y = -\frac{5}{2}\alpha + \frac{5}{2}2l \cdot \cos\alpha$$

$$y = -\frac{1}{5}\alpha + 2l \cdot \cos\alpha$$

se cortan en $x_p = \frac{20}{27}l \cdot \cos\alpha \left(\frac{5}{2} - \text{tg}\alpha \right)$. Tomando momentos respecto de A resulta

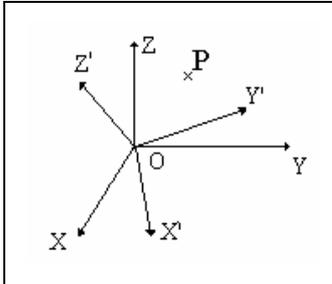
$$2mgd \cdot \cos\alpha + mgl \cdot \cos\alpha - 3mg \left(2l \cdot \cos\alpha - \frac{20}{27} \left(\frac{5}{2} - \text{tg}\alpha \right) \right) = 0$$

para el caso extremo $d=2l$.

$$\Rightarrow \text{tg}\alpha = \frac{123}{60}$$

ÁNGULOS DE EULER

Al estudiar como cambia ante una rotación de los ejes coordenados el tensor de inercia de un sólido rígido vimos que las rotaciones se describen por matrices ortogonales.



Si $\vec{r} = (x, y, z)$ son las coordenadas de un punto respecto al sistema "fijo" y $\vec{r}' = (x', y', z')$ las coordenadas respecto al sistema rotado

$$r_i = \sum_j \lambda_{ij} r'_j$$

$$r^2 = \sum_i \sum_j \lambda_{ij} r'_j \sum_k \lambda_{ik} r'_k = r'^2 = \sum_{jk} \delta_{jk} r'_j r'_k$$

es decir

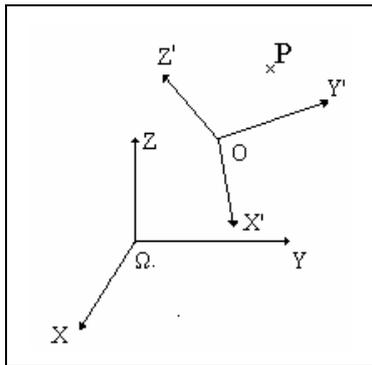
$$\sum_i \lambda_{ij} \lambda_{ik} = \delta_{jk}$$

$$\sum_j \lambda_{ji}^T \lambda_{ik} = \delta_{jk}$$

o sea que

$$\lambda^T \lambda = \mathbf{I} \quad \Rightarrow \quad \lambda^T = \lambda^{-1}$$

$$\lambda^T \lambda = \lambda \lambda^T = \mathbf{I}$$



En general las coordenadas respecto a un sistema trasladado y rotado estarán relacionadas con las coordenadas respecto al sistema original por

1) $\vec{r}_p = \vec{r}_o + \lambda \vec{r}'_p$

Derivando respecto del tiempo

2) $\vec{v}_p = \dot{\vec{r}}_p = \dot{\vec{v}}_o + \lambda \dot{\vec{r}}'_p$

donde hemos usado que el sistema $Ox'y'z'$ es solidario con el rígido. De la ecuación 1) resulta

$$\vec{r}' = \lambda^{-1}(\vec{r}_p - \vec{r}_o) = \lambda^T (\vec{r}_p - \vec{r}_o)$$

y por lo tanto

$$\vec{v}_p = \dot{\vec{v}}_o + \lambda \dot{\lambda}^T (\vec{r}_p - \vec{r}_o)$$

Definamos la matriz

$$\mathbf{T} = \lambda \dot{\lambda}^T$$

entonces

$$\vec{v}_p = \dot{\vec{v}}_o + \mathbf{T}(\vec{r}_p - \vec{r}_o)$$

Es fácil ver que T es antisimétrica

$$\lambda \dot{\lambda}^T = \mathbf{I}$$

derivando respecto a t

$$\lambda \dot{\lambda}^T + \lambda \dot{\lambda}^T = 0$$

$$\lambda \dot{\lambda}^T = -\lambda \dot{\lambda}^T = -(\lambda \dot{\lambda}^T)^T$$

o sea

$$\mathbf{T} = -\mathbf{T}^T$$

en componentes

$$T_{ij} = -T_{ji}$$

Si se escribe la matriz antisimétrica en componentes

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} \\ -T_{12} & 0 & T_{23} \\ -T_{13} & -T_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Y si se define $\omega_1 = -T_{23}$; $\omega_2 = -T_{31}$; $\omega_3 = -T_{12}$ se puede ver que $\mathbf{T}\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{v}$ donde \bar{v} es un vector cualquiera. En efecto

$$\begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 v_3 - \omega_3 v_2 \\ \omega_3 v_1 - \omega_1 v_3 \\ -\omega_2 v_1 + \omega_1 v_2 \end{pmatrix}$$

que son los componentes de $\bar{\omega} \times \bar{v}$, y se recupera la distribución de velocidades en un rígido.

$$\bar{v}_p = \bar{v}_o + \mathbf{T}(\bar{r}_p - \bar{r}_o) = \bar{v}_o + \bar{\omega} \times (\bar{r}_p - \bar{r}_o)$$

La novedad es que hemos establecido una relación entre la velocidad angular $\bar{\omega}$ del rígido y la transformación ortogonal λ que pasa del sistema fijo al sistema solidario con el rígido.

Vamos a ver que la matriz de rotación λ se puede expresar en términos de tres ángulos, llamados ángulos de Euler. En efecto se puede pasar de un sistema a otro cualquiera mediante tres rotaciones sucesivas. Primero se rota el sistema original un ángulo φ en sentido antihorario alrededor del eje Oz. Llamemos a los ejes resultantes $O\xi\eta\zeta$. Luego se hace rotar este nuevo sistema un ángulo θ alrededor de $O\xi$, obteniéndose el sistema $O\xi'\eta'\zeta'$. El eje $O\xi = O\xi'$ es la intersección de los planos xy con $\xi'\eta'$ y se llama la línea de nodos. Finalmente se giran los ejes $O\xi'\eta'\zeta'$ alrededor de ζ' un ángulo ψ en sentido directo, obteniéndose el sistema $Ox'y'z'$ que puede pensarse como solidario con el rígido. Los tres ángulos de Euler φ, θ, ψ determinan la orientación de $Ox'y'z'$ respecto de $Oxyz$.

Como hemos visto dado P de coordenadas x_0, y_0, z_0 sus coordenadas respecto de $O\xi\eta\zeta$ son

$$\bar{r}_{\xi\eta\zeta} = \mathbf{D}\bar{r}_{xyz}$$

$$\text{con } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{transformación ortogonal.}$$

Análogamente

$$\bar{r}_{\xi'\eta'\zeta'} = \mathbf{C}\bar{r}_{\xi\eta\zeta}$$

$$\text{con } \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \text{sen } \theta \\ 0 & -\text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

y

$$\vec{r}_{x'y'z'} = \mathbf{B} \vec{r}_{\xi'\eta'\zeta'}$$

$$\text{con } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \text{sen } \psi & 0 \\ -\text{sen } \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente las coordenadas en el sistema solidario $\vec{r}' \equiv \vec{r}_{x'y'z'}$ están dadas respecto a las coordenadas en el sistema fijo $\vec{r} \equiv \vec{r}_{xyz}$ por

$$\vec{r}' = \mathbf{BCD} \vec{r}$$

y la transformación inversa será

$$\vec{r} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^{-1} \vec{r}'$$

Las correspondientes matrices serán

$$\lambda = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \cos \theta \text{sen } \varphi \text{sen } \psi & -\text{sen } \psi \cos \varphi - \cos \theta \text{sen } \varphi \cos \psi & \text{sen } \theta \text{sen } \varphi \\ \cos \psi \text{sen } \varphi + \cos \theta \cos \varphi \text{sen } \psi & -\text{sen } \psi \text{sen } \varphi + \cos \theta \cos \varphi \cos \psi & -\text{sen } \theta \cos \varphi \theta \\ \text{sen } \theta \text{sen } \psi & \text{sen } \theta \cos \psi & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\lambda^T = \lambda^{-1}$$

La velocidad angular de $Ox'y'z'$ respecto de $Oxyz$ se puede calcular recordando que

$$\mathbf{T} = \lambda \lambda^T$$

es un tensor antisimétrico cuyas componentes dan $\vec{\omega}$ o usando el teorema de adición de velocidades angulares que da el resultado en forma más sencilla ,

$$\vec{\omega} = \varphi \mathbf{e}_z + \theta \mathbf{e}_\xi + \psi \mathbf{e}_{\zeta'}$$

$\mathbf{e}_z, \mathbf{e}_\xi, \mathbf{e}_{\zeta'}$ son respectivamente los vectores unitarios en la dirección $Oz, O\xi, y O\zeta'$. Vamos a expresar la velocidad angular en los ejes $Oxyz$ y $Ox'y'z'$. Para ello expresemos

$$\mathbf{e}_\xi = \cos \varphi \mathbf{e}_x + \text{sen } \varphi \mathbf{e}_y$$

y

$$\mathbf{e}_{\zeta'} = \text{sen } \varphi \text{sen } \theta \mathbf{e}_x + \cos \varphi \text{sen } \theta \mathbf{e}_y + \cos \theta \mathbf{e}_z$$

Las componentes de $\dot{e}_{z'}$ se pueden obtener a partir de λ observando que las coordenadas

de $e_{z'} = e_z$ en el sistema solidario son $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ y las coordenadas en el sistema fijo son

$$\lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{sen } \theta \text{ sen } \varphi \\ -\text{sen } \theta \text{ cos } \varphi \\ \text{cos } \theta \end{pmatrix}$$

Se obtiene

$$\bar{\omega} = (\dot{\varphi} + \dot{\psi} \text{cos } \theta) \dot{e}_z + (\dot{\theta} \text{sen } \varphi - \dot{\psi} \text{sen } \theta \text{cos } \varphi) \dot{e}_y + (\dot{\theta} \text{cos } \varphi + \dot{\psi} \text{sen } \theta \text{sen } \varphi) \dot{e}_x$$

Por otro lado en los ejes solidarios

$$\begin{aligned} \dot{e}_x &= \text{cos } \psi \dot{e}_{x'} - \text{sen } \psi \dot{e}_{y'} \\ \dot{e}_z &= \text{sen } \psi \text{sen } \theta \dot{e}_{x'} + \text{sen } \theta \text{cos } \psi \dot{e}_{y'} + \text{cos } \theta \dot{e}_{z'} \end{aligned}$$

que se obtiene mirando $\lambda^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por lo tanto

$$\bar{\omega} = (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \text{cos } \theta) \dot{e}_{z'} + (-\dot{\theta} \text{sen } \psi + \dot{\varphi} \text{sen } \theta \text{cos } \psi) \dot{e}_{y'} + (\dot{\theta} \text{cos } \psi + \dot{\varphi} \text{sen } \theta \text{sen } \psi) \dot{e}_{x'}$$

que son las componentes de $\bar{\omega}$ en los ejes solidarios con el rígido.

Aplicaciones.

Ejemplo I. Usando los ángulos de Euler expresar los vínculos que satisfacen dichos ángulos cuando la esfera rueda sin deslizar sobre un plano.

Las coordenadas del centro de masa son $(x_G, y_G, 0)$

$$\bar{v}_p = 0 = \bar{v}_G + \bar{\omega} \times (\bar{r}_p - \bar{r}_G)$$

En el sistema Oxyz $\bar{r}_p - \bar{r}_G = -R\bar{k}$.

Conviene usar $\bar{\omega}$ en los ejes fijos.

$$0 = \begin{pmatrix} \dot{x}_G \\ \dot{y}_G \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\theta} \text{cos } \varphi + \dot{\psi} \text{sen } \theta \text{sen } \varphi \\ \dot{\theta} \text{sen } \varphi - \dot{\psi} \text{sen } \theta \text{cos } \varphi \\ \dot{\varphi} + \text{cos } \theta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -R \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_G - R\dot{\theta} \sin \varphi + R\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi &= 0 \\ \dot{y}_G + R\dot{\theta} \cos \varphi + R\dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi &= 0\end{aligned}$$

Al contrario de lo que ocurre con el vínculo de rodadura de un disco ,que es integrable

$$\dot{x} + R\dot{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad x + R\theta = cte.$$

y por lo tanto holónomo. Los vínculos de rodadura de la esfera son no holónomos. No pueden ponerse como

$$\begin{aligned}f(x, y, \theta, \varphi, \psi) &= 0 \\ g(x, y, \theta, \varphi, \psi) &= 0\end{aligned}$$

en efecto si se pudiesen integrar , los vínculos se obtendrían

$$\frac{\partial f}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial f}{\partial \psi} \dot{\psi} = 0$$

lo que implica que las derivadas cruzadas de los coeficientes deben ser iguales. Por ejemplo

$$\frac{\partial f}{\partial x \partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial \theta \partial x} \quad \text{o} \quad \frac{\partial f}{\partial \theta \partial \psi} = \frac{\partial f}{\partial \psi \partial \theta}$$

La primer relación se cumple : es $0 = 0$

la segunda

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \theta \partial \psi} &= R \cos \theta \cos \varphi \\ \frac{\partial f}{\partial \psi \partial \theta} &= \frac{\partial r \sin \varphi}{\partial \psi} = 0\end{aligned}$$

no se cumple, por lo que los vínculos son no holónomos.

Ejemplo II. Una placa triangular isósceles con ángulo al vértice recto y de lado a , se mueve de modo que el vértice B se desplaza a lo largo del eje Oz, el lado AC está apoyado sobre el plano horizontal y C se mueve a lo largo de Oy. Calcular ω en función de uno de los ángulos de Euler.

Los ejes solidarios se pueden describir usando los ejes intermedios por el origen Oxyz paralelos a los solidarios mediante los ángulos de Euler φ, θ . El ángulo ψ es nulo.

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{K} + \dot{\theta} \vec{i} = \dot{\varphi} \vec{K} + \dot{\theta} \cos \varphi \vec{l} + \dot{\theta} \sin \varphi \vec{j}$$

$$\begin{aligned}
&= \dot{\varphi} \cos \theta \vec{k} + \dot{\varphi} \sin \theta \vec{j} + \dot{\theta} \vec{i} \\
\vec{r}_B &= O\vec{B} = a \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \vec{K} = a \sin \theta \vec{K} \\
\vec{r}_A &= O\vec{A} = a \cos \theta \sin \varphi \vec{I} - a \cos \theta \cos \varphi \vec{J} \\
\vec{r}_C &= O\vec{C} = \vec{r}_A + a\vec{i} = a(\cos \theta \sin \varphi + \cos \varphi) \vec{I} + a(\cos \theta \cos \varphi + \sin \varphi) \vec{J}
\end{aligned}$$

Como C se mueve sobre Oy

$$\begin{aligned}
\cos \theta \operatorname{tg} \varphi &= -1 \\
\Rightarrow \frac{\dot{\varphi}}{\cos^2 \varphi} &= -\frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} \dot{\theta} \\
\cos^2 \varphi &= \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = \frac{1}{1 + \cos^{-2} \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{1 + \cos^2 \theta} \\
\Rightarrow \dot{\varphi} &= -\frac{\sin \theta}{1 + \cos^2 \theta} \dot{\theta} \\
\Rightarrow \vec{\omega} &= -\frac{\sin \theta}{1 + \cos^2 \theta} \dot{\theta} \vec{K} + \dot{\theta} \vec{i}.
\end{aligned}$$

Ejemplo III. Trompo simétrico con un punto fijo.

Los ejes Ox'y'z' son ejes principales ya que el eje Oz' es eje de simetría de revolución. O es un punto fijo del rígido. Los ángulos de Euler determinan completamente la posición del rígido: θ da la inclinación del eje z', φ mide la precesión del trompo alrededor de la vertical y ψ mide la rotación del trompo respecto a su eje z'.

Sea l la distancia del centro de masas al punto fijo O. Luego

$$\Pi_O = \begin{pmatrix} I_1 & & \\ & I_1 & \\ & & I_3 \end{pmatrix}$$

por ser de revolución.

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \times \Pi_O \vec{\omega} = \frac{1}{2} I_1 (\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{1}{2} I_3 \omega_z^2$$

y

$$\begin{aligned}
\vec{\omega} &= \dot{\varphi} \hat{e}_z + \dot{\theta} \hat{e}_\xi + \dot{\psi} \hat{e}_z \\
&= (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta) \hat{e}_z + (\dot{\varphi} \sin \theta \cos \psi - \dot{\theta} \sin \psi) \hat{e}_y + (\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \theta \sin \psi) \hat{e}_x \\
\omega_x^2 + \omega_y^2 &= \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2 \\
\omega_z^2 &= (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2 \\
\Rightarrow T &= \frac{1}{2} I_1 (\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta)^2
\end{aligned}$$

y la energía potencial debida al peso:

$$U = Mgl \cos \theta.$$

Las fuerzas reactivas actúan en O fijo, entonces no realizan trabajo, por lo que la energía se conserva, o sea que

$$T + U = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta)^2 + Mgl \cos \theta = E \quad (1)$$

es una ecuación de movimiento que solo involucra derivadas primeras de los ángulos de Euler.

Las otras dos ecuaciones del movimiento las obtendremos usando la segunda cardinal respecto de O:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O.$$

Como

$$\vec{M}_O = I \hat{e}_z \times (-Mg \hat{e}_z)$$

$$\vec{M}_O \cdot \hat{e}_z = 0$$

$$\vec{M}_O \cdot \hat{e}_{z'} = 0$$

$$\vec{L}_O = I_1 (\omega_x \hat{e}_{x'} + \omega_y \hat{e}_{y'}) + I_3 \omega_z \hat{e}_{z'}$$

$$\left. \frac{d(\vec{L}_O \cdot \hat{e}_{z'})}{dt} \right|_F = 0 \Rightarrow \vec{L}_O \cdot \hat{e}_{z'} = cte = L_\phi$$

$$\hat{e}_{z'} = \sin \theta \sin \psi \hat{e}_{x'} + \sin \theta \cos \psi \hat{e}_{y'} + \cos \theta \hat{e}_{z'}$$

entonces

$$I_1 [(\dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi) \sin \theta \sin \psi + (-\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi) \sin \theta \cos \psi] + I_3 (\dot{\psi} + \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta = (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + I_3 \dot{\psi} \cos \theta = L_\phi \quad (2)$$

es la segunda ecuación de movimiento que nuevamente involucra solo derivadas primeras de los ángulos.

Finalmente

$$\left. \frac{d\vec{L}_O}{dt} \right|_F \cdot \hat{e}_{z'} = 0 = \left. \frac{d(\vec{L}_O \cdot \hat{e}_{z'})}{dt} \right|_F - \vec{L}_O \cdot \left. \frac{d\hat{e}_{z'}}{dt} \right|_F$$

pero

$$\vec{L}_O \cdot \left. \frac{d\hat{e}_{z'}}{dt} \right|_F = \vec{L}_O \cdot \vec{\omega} \times \hat{e}_{z'} = \vec{L}_O \cdot (\omega_x \hat{e}_{y'} - \omega_y \hat{e}_{x'}) = 0,$$

entonces

$$\bar{L}_o \cdot \hat{e}_{z'} = I_3 \omega_{z'} = I_3 (\psi + \phi \cos \theta) = cte = L_\psi \quad (3)$$

que es la tercer ecuación de movimiento buscada.

Las ecuaciones (2) y (3) permiten eliminar $\dot{\phi}$ y $\dot{\psi}$ en función de θ :

$$(3) \Rightarrow \dot{\psi} = \frac{L_\psi - I_3 \dot{\phi} \cos \theta}{I_3}$$

y sustituyendo en (2):

$$(I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + (L_\psi - I_3 \dot{\phi} \cos \theta) \cos \theta = L_\phi.$$

Es decir

$$\dot{\phi} = \frac{L_\phi - L_\psi \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \quad (4)$$

$$\dot{\psi} = \frac{L_\psi}{I_3} - \frac{(L_\phi - L_\psi \cos \theta) \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta} \quad (5).$$

Obsérvese que hemos dividido por $\sin^2 \theta$ que se anula para $\theta = 0$, por lo que debemos estudiar aparte el caso en que eje del trompo pasa por la vertical. No pretendemos hacer aquí por falta de tiempo un estudio completo de los posibles movimientos del trompo.

Nos limitaremos solo a mostrar algunos de sus posibles comportamientos.

Para ello usaremos la ecuación (1) y recordaremos que

$$\begin{aligned} I_3 \omega_{z'} &= L_\psi \\ \Rightarrow \frac{1}{2} I_3 \omega_{z'}^2 &= \frac{L_\psi^2}{2I_3} = cte \\ E' &= E - \frac{1}{2} I_3 \omega_{z'}^2 = \frac{1}{2} I_1 (\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + Mgl \cos \theta \end{aligned}$$

y sustituyendo $\dot{\phi}$

$$\frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{(L_\phi - L_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + Mgl \cos \theta = E'$$

que puede escribirse como

$$\frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + V_{ef}(\theta) = E'$$

con

$$V_{ef}(\theta) = \frac{(L_\phi - L_\psi \cos \theta)^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + Mgl \cos \theta.$$

En general el movimiento estará comprendido entre los ángulos θ_1 y θ_2 . Para $E = E'_2$, energía igual a V_{ef} mínima, el ángulo es fijo $\theta = \theta_0$.

$$V'_{ef}(\theta) = -\frac{(L_\phi - L_\psi \cos \theta)^2}{I_1 \sin^3 \theta} \cos \theta + \frac{L_\psi \sin^2 \theta (L_\phi - L_\psi \cos \theta)}{I_1 \sin^3 \theta} - Mgl \sin \theta$$

$$V'_{ef}(\theta_0) = 0$$

Sea $x = L_\phi - L_\psi \cos \theta_0$, entonces

$$\cos \theta_0 x^2 - L_\psi \sin^2 \theta_0 x + Mgl I_1 \sin^4 \theta_0 = 0.$$

Ahora, x debería ser real, por lo tanto

$$L_\psi^2 \sin^4 \theta_0 - 4 \cos \theta_0 Mgl I_1 \sin^4 \theta_0 \geq 0$$

$$I_3^2 \omega_z^2 = L_\psi^2 \geq 4 Mgl I_1 \cos \theta_0$$

$$\omega_z \geq \frac{2}{I_3} \sqrt{Mgl I_1 \cos \theta_0}.$$

El trompo girará con inclinación fija solo si su velocidad angular de rotación alrededor de su eje de simetría es mayor que cierto valor límite que crece con $\sqrt{\cos \theta_0}$. Si $\theta_0 \geq \pi/2$ no hay velocidad angular límite, siempre es posible el movimiento con ángulo constante.

Si $E' > E'_2$ el movimiento se produce entre θ_1 y θ_2 : $\theta_1 \geq \theta \geq \theta_2$: La ecuación (4) permite ver que $\dot{\phi}$ puede en algunos casos cambiar de signo. Puede darse tres situaciones según $\dot{\phi}$ sea siempre positiva, se anule para $\theta = \theta_1$, o que cambie de signo y $\dot{\phi}|_{\theta_2} < 0$ mientras que $\dot{\phi}|_{\theta_1} > 0$.

Dichas situaciones se representan gráficamente en las siguientes figuras descritas por la intersección del eje de simetría del trompo con una esfera.

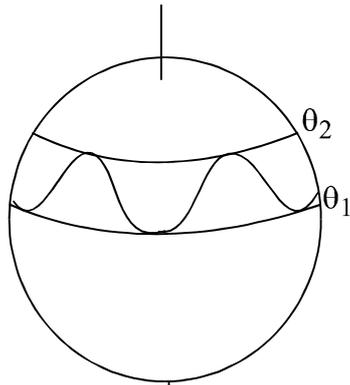


fig 2

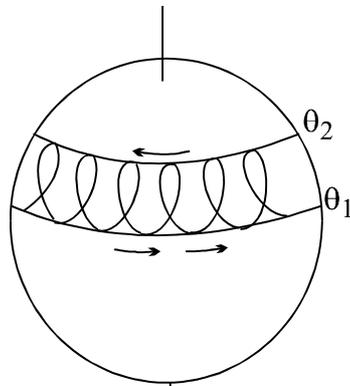


fig 3

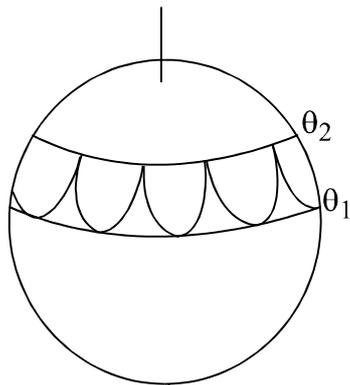


fig 4