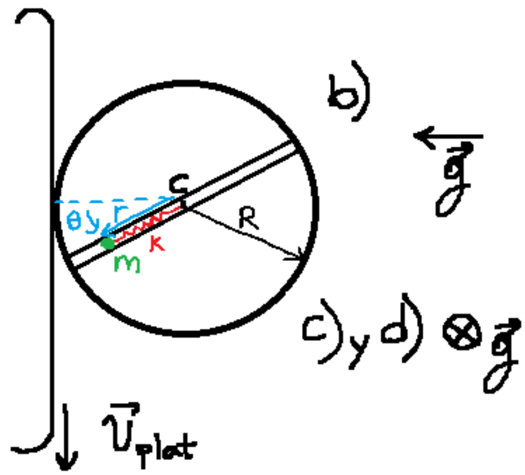
Ejercicio 1 Un disco de radio R, cuyo centro C está unido a un soporte fijo que le permite girar, rueda sin deslizar sobre una cinta transportadora que se desplaza a velocidad constante $\vec{v}_{plat}$.

a) Escribir la velocidad y aceleración absolutas de un punto del disco a una distancia $r < R$ del centro de éste en términos de $\vec{v}_{plat}$.

En el disco existe una ranura diametral como se muestra en la figura. Un resorte de constante elástica k y de longitud natural nula se coloca con un extremo fijo al centro C del disco y al otro extremo se adhiere una masa puntual m.



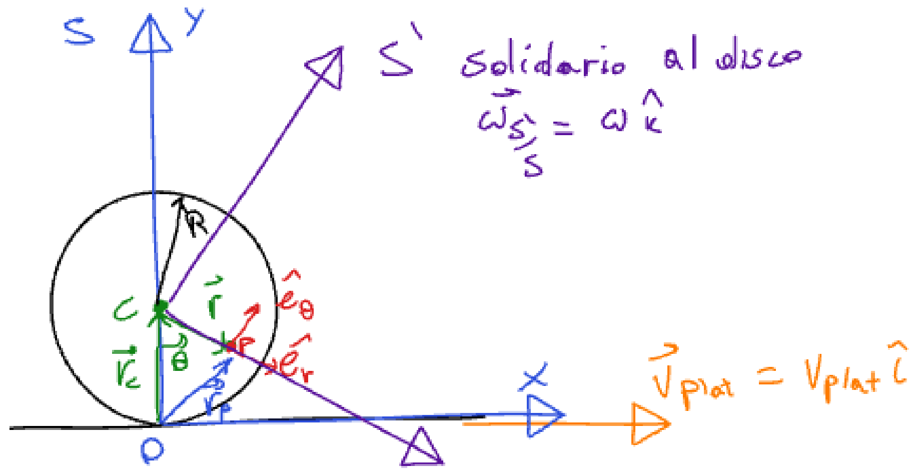
b) Si la disposición del sistema es vertical. Escribir la ecuación de movimiento que describe la evolución de su distancia al centro r.

c) Si la disposición del sistema es horizontal por lo que puede ignorar el peso. Hallar la máxima velocidad que puede tener la cinta transportadora si se desea que el movimiento radial de la partícula sea de tipo oscilatorio.

d) Para el caso de la disposición horizontal. Hallar la fuerza normal que ejerce el disco sobre la masa en términos de la velocidad y la posición.

1)

a)



$\vec{r}_c = R\hat{j}$

$\vec{r}_r = R\hat{j} + r\hat{e}_r$

tomamos un punto p solidario al disco a una distancia $r \leq R$ de su centro C.

$\Rightarrow \vec{V}_p = \vec{V}' + \vec{\omega}_{S'/S} \times \vec{r}$

siendo p solidario al disco es $\vec{V}' = 0$

si consideramos P el punto de apoyo O, la condición de rodadura sin deslizamiento implica que $\vec{V}_p = \vec{V}_{plat}$ y $\vec{r} = -R\hat{j}$

$$V_{plat}\hat{i} = \omega R \hat{i} \Rightarrow \omega = \frac{V_{plat}}{R}$$

Para un punto genérico P es

$$\vec{V}_p = V_{plat} \frac{r}{R} \hat{k} \times \hat{e}_r = V_{plat} \frac{r}{R} \hat{e}_\theta$$

con $\hat{e}_\theta = \cos\theta\,\hat{i} + \operatorname{sen}\theta\,\hat{j}$

y

$$\vec{a}_p = \cancelto{0}{\vec{a}'_p} + \cancelto{0}{\vec{a}_c} + \cancelto{0}{\dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + \cancelto{0}{2\vec{\omega} \times \vec{V}'}$$

p solidario a S' $\vec{a}_c = 0$ $\dot{\vec{\omega}} = 0$ $\vec{V}' = 0$

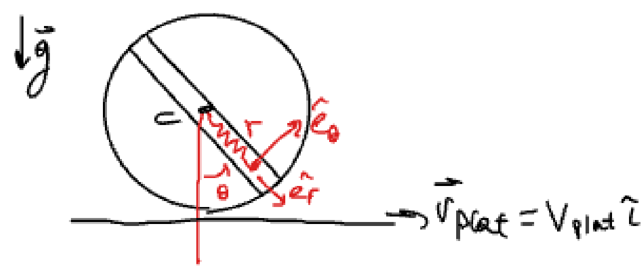
$$\Rightarrow \vec{a}_p = -\frac{V_{plat}^2}{R^2} r \hat{e}_r$$

con $\hat{e}_r = \operatorname{sen}\theta\,\hat{i} - \cos\theta\,\hat{j}$

b) $m\vec{a} = m\vec{g} - kr\hat{e}_r + N\hat{e}_\theta$

$m\vec{a}' = m\ddot{r}\hat{e}_r = m\vec{a} - m\vec{a}_T - m\vec{a}_c$

Utilizando los mismos referenciales S y S' de la parte a)



$\Rightarrow \vec{a}_T = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$

$= -\omega^2 r\hat{e}_r = -\frac{V_{plat}^2}{R^2} r\hat{e}_r$

$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}\times\vec{v}' = 2\omega\dot{r}\hat{e}_\theta = \frac{2V_{plat}}{R}\dot{r}\hat{e}_\theta$

$m\vec{g} = mg\cos\theta\,\hat{e}_r - mg\,\mathrm{sen}\,\theta\,\hat{e}_\theta$

$\Rightarrow \hat{e}_r)\quad m\ddot{r} = mg\cos\theta - kr + m\frac{V_{plat}^2}{R^2} r \leftarrow$ siendo $\theta = \frac{V_{plat}}{R}t + \delta$

depende de las C.I.

$\hat{e}_\theta)\quad 0 = N - mg\,\mathrm{sen}\,\theta - 2m\frac{V_{plat}}{R}\dot{r}$

c) si la disposición es horizontal $\Rightarrow$ es equivalente a $g=0$ en b)

$\Rightarrow \quad \ddot{r} = -\left(\frac{k}{m} - \frac{V_{plat}^2}{R^2}\right) r \Rightarrow$ para que exista oscilación debe ser

$\frac{k}{m} - \frac{V_{plat}^2}{R^2} > 0 \Rightarrow V_{plat} < R\sqrt{\frac{k}{m}}$

d) Nuevamente haciendo $g=0$ en b) es $\boxed{N = \frac{2V_{plat}\,m\dot{r}}{R}}$

Problema 2 Sean las fuerzas

$$\vec{F}_1 = \frac{y^3}{3}\hat{\imath} + \frac{x^5}{5}\hat{\jmath},$$
$$\vec{F}_2 = 3x^2y^5\hat{\imath} + 5x^3y^4\hat{\jmath}.$$

a) Estudie si son o no conservativas.

b) En el caso en que alguna sea conservativa, halle un potencial asociado U.

c) Calcule el trabajo de ambas fuerzas para la trayectoria $\mathcal{C} = \{(t, t^2)/t \in [0,1]\}$ al ir del origen al punto $(1,1)$.

Solución:

a) Si una fuerza es consrvativa entonces

$$\vec{F} = -U \implies \frac{\partial F_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial U}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial U}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}.$$

donde x_i, x_j representan las coordenadas espaciales i-ésima y j-ésima. En particular, debe ser:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}.$$

Particularizando a nuestros casos esta condición no es cierta para $\vec{F}_1$ donde

$$\frac{\partial F_{1,x}}{\partial y} = y^2 \neq x^4 = \frac{\partial F_{1,y}}{\partial x},$$

por lo que $\vec{F}_1$ no es conservativa. En cambio, $\vec{F}_2$ sí lo es dado que

$$\frac{\partial F_{1,x}}{\partial y} = \frac{\partial F_{1,y}}{\partial x} = 15x^2y^4.$$

b) En el caso de la fuerza $\vec{F}_2$ podemos hacer

$$U(x,y) = \int \frac{\partial U}{\partial x'}dx' = -\int F_{2,x'}dx' = -\int 3x'^2y^5dx' = -x^3y^5 + cte$$

o, equivalentemente,

$$U(x,y) = \int \frac{\partial U}{\partial y'}dy' = -\int F_{2,y'}dy' = -\int 5x^3y'^4dy' = -x^3y^5 + cte.$$

c) Dado que $\vec{F}_2$ es conservativa, podemos calcular su trabajo fácilmente utilizando el potencial hallado en *b*). Es decir,

$$W_2 = \int_{\mathcal{C}} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = -\int_{\mathcal{C}} \nabla U_2 \cdot d\vec{r} = -\Delta U_2 = U_2(0,0) - U_2(1,1) = 1.$$

Para el caso de $\vec{F}_1$ debemos realizar la integral de linea. Para ello expresemos

$$\vec{r}(t) = t\hat{\imath} + t^2\hat{\jmath}$$

y

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \hat{\imath} + 2t\hat{\jmath}$$

a lo largo de la trayectoria $\mathcal{C}$. Y la fuerza es

$$\vec{F}_1(\vec{r}(t)) = \frac{t^6}{3}\hat{\imath} + \frac{t^5}{5}\hat{\jmath}.$$

Entonces es:

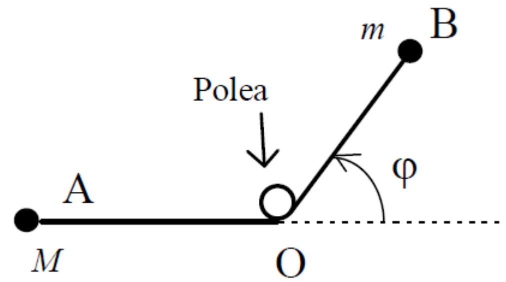
$$W_1 = \int_0^1 \vec{F}_1(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}dt = \int_0^1 \frac{t^6}{3} + \frac{2t^6}{5}dt = \frac{1}{21} + \frac{2}{35} = \frac{11}{105}.$$

Problema 3 La figura muestra un plano liso horizontal y dos partículas A y B de masa M y m respectivamente, unidas por un hilo flexible, inextensible y sin masa, que puede deslizar sin rozamiento sobre la polea del esquema. El punto A se encuentra incialmente en reposo y el estado inicial de movimiento de B es tal que $\phi = 0$, la distancia OB es igual a a y tiene velocidad v_0 perpendicular a OB.

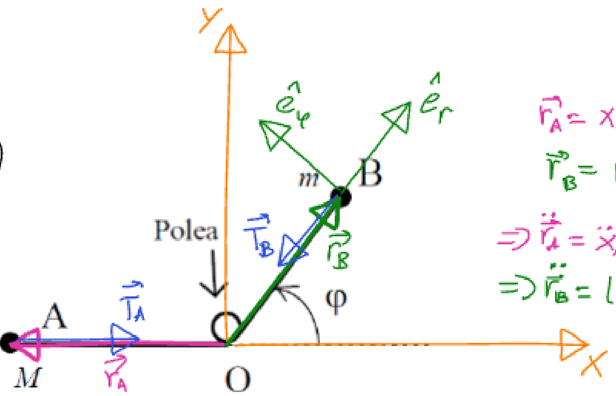
a) Halle las ecuaciones de movimiento y la tensión en el hilo.

b) Suponiendo la longitud del hilo suficientemente grande, determine la condición que se debe verificar para que en algún instante sea $\phi = \pi$. Sugerencia: Use las fórmulas de Binet.

c) Indique si el sistema formado por ambas partículas conserva su energía. Justifique. De ser afirmativo, halle la energía mecánica del sistema.



3) a)



$\vec r_A = x_A \hat i$

$\vec r_B = r\hat e_r$

$\Rightarrow \ddot{\vec r}_A = \ddot x_A \hat i$

$\Rightarrow \ddot{\vec r}_B = (\ddot r - r\dot\varphi^2)\hat e_r + (r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi)\hat e_\varphi$

x_A es la coordenada de A y es negativa

Ligadura: Largo de la cuerda es $L = r - x_A \Rightarrow \ddot r - \ddot x_A = 0 \Rightarrow \ddot r = \ddot x_A$ (*)

$M\ddot{\vec r}_A = \vec T_A$ $\qquad$ $\vec T_A = T\hat i$

$m\ddot{\vec r}_B = \vec T_B$ $\qquad$ $\vec T_B = -T\hat e_r$ } porque la cuerda no tiene masa

$\Rightarrow$ (I) $M\ddot x_A = T$

Ecs. de mov. (II) $m(\ddot r - r\dot\varphi^2) = -T$

$m(r\ddot\varphi + 2\dot r\dot\varphi) = 0 \quad \times r \rightarrow mr^2\frac{d\dot\varphi}{dt} + m\frac{dr^2}{dt}\dot\varphi = 0$

$\Rightarrow \frac{d\ell_B}{dt} = 0$ con $\ell_B = mr^2\dot\varphi$

(Consecuencia de ser una fuerza central)

$\ell_B = m a v_0$ (**)

$(r(t=0)\dot\varphi(t=0) = v_0)$

$r(t=0) = a$

$\frac{(I)}{M} - \frac{(II)}{m} \overset{\text{uso } (*)}{\Rightarrow} r\dot\varphi^2 = T\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)$

por (**) $\Rightarrow \frac{\ell_B^2}{m^2r^3} = T\frac{M+m}{Mm}$

$\Rightarrow \boxed{T = \frac{M\ell_B^2}{(m+M)mr^3}}$

(I)+(II) $\overset{\text{uso } (*)(**)}{\Rightarrow} \boxed{(M+m)\ddot r = \frac{\ell_B^2}{mr^3}}$ Ec. de mov.

b) por (II) y (**) es

$$m\ddot{r} - \frac{\ell_B^2}{m r^3} = \overbrace{-T}^{F_r(r)} = -\frac{M \ell_B^2}{m(M+m) r^3}$$

$\Rightarrow$ usando la Fórmula de Binet

$$u + u'' = -\frac{m}{u^2 \ell^2} F\left(\frac{1}{u}\right) \quad \text{con } u = \frac{1}{r} \ \text{ y } \ u'' = \frac{d^2 u}{d\varphi^2}$$

$$\Rightarrow u + u'' = \frac{M}{M+m} u \Rightarrow u'' = -\left(1 - \frac{M}{M+m}\right) u \Rightarrow u'' = -\frac{m}{M+m} u$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} = u = A \cos\left(\sqrt{\frac{m}{M+m}}\,\varphi + \delta\right) \Rightarrow \boxed{r = \frac{1/A}{\cos\left(\sqrt{\frac{m}{M+m}}\,\varphi + \delta\right)}}$$

Hallamos A y δ con las cond. iniciales

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi}\right|_{t=0} = 0 \Rightarrow \left.\dot{\varphi}\frac{dr}{d\varphi}\right|_{t=0} = \left.\dot{\varphi}\,\frac{\sqrt{\frac{m}{M+m}} \cdot \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{m}{M+m}}\,\varphi + \delta\right) \cdot \frac{1}{A}}{\cos^2\left(\sqrt{\frac{m}{M+m}}\,\varphi + \delta\right)}\right|_{t=0} = 0$$

en $t=0$ $\dot{\varphi} = \frac{V_0}{a}$ y $\varphi = 0$

$$\Rightarrow \frac{V_0}{a}\sqrt{\frac{M}{M+m}}\,\frac{\operatorname{sen}(\delta)}{\cos^2(\delta)} \cdot \frac{1}{A} = 0 \Rightarrow \boxed{\delta = 0}$$

$$r|_{t=0} = a \Rightarrow 1/A = a \Rightarrow r(\varphi) = \frac{a}{\cos\left(\sqrt{\frac{m}{M+m}}\,\varphi\right)}$$

para que φ llegue a π debe ser $\sqrt{\frac{m}{M+m}} \cdot \pi < \frac{\pi}{2}$ ya que sino $r \to \infty$ antes

$\Rightarrow$ debe ser $\boxed{3m < M}$

c) La potencia de las fuerzas $\vec{T}_A$ y $\vec{T}_B$ se cancelan:

$$P_{T_A} = \frac{dW_{T_A}}{dt} = \vec{T}_A \cdot \frac{d\vec{r}_A}{dt} = T\frac{dx_A}{dt}$$

$$P_{T_B} = \frac{dW_{T_B}}{dt} = \vec{T}_B \cdot \frac{d\vec{r}_B}{dt} = -T\frac{dr}{dt}$$

pero $r - x_A = cte \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{dx_A}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{dW_{T_A}}{dt} + \frac{dW_{T_B}}{dt} = T\left(\frac{dx_A}{dt} - \frac{dr}{dt}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = P_{T_A} + P_{T_B} = 0 \Rightarrow \boxed{E = cte}$$

su valor en $t=0$ consiste únicamente en la energía cinética de B $\boxed{E = \frac{m V_0^2}{2}}$