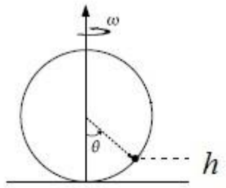
Primer Parcial de Mecánica Clásica 2017

Problema 1.

Una masa $m = 20g$se encuentra sobre un aro vertical liso (no hay fricción) de radio $R = 0{,}5m$ que gira apoyado en una mesa con una frecuencia angular ω constante respecto de la mesa como se muestra en la figura.



A. Deducir la ecuación de movimiento para la masa en un sistema solidario al aro.

B. Calcularω si la altura h a la que se encuentra a la que se encuentra en equilibrio la masa es de $5cm$.

C. ¿Con qué fuerza hace presión sobre el riel la masa?

D. ¿Si la mesa sobre la que se apoya el aro comienza ahora a girar con frecuencia angular de $\sqrt{\frac{g}{2R}}$ respecto al piso en sentido opuesto; cómo cambian los resultados de B) y C)?

E. Si se detiene todo movimiento de rotación, calcule la frecuencia de las pequeñas oscilaciones.

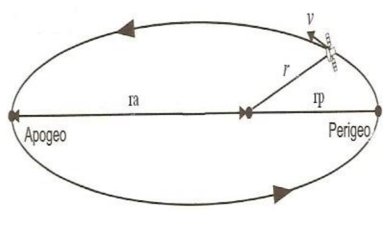
Problema 2.

A. Considere un satélite de masa m que se lanza desde la superficie de la Tierra verticalmente hacia arriba a gran altura y despreciando el rozamiento del aire. Si la velocidad inicial del satélite es v_0, exprese su velocidad v en función de su distancia *r* al centro de la Tierra.

B. Calcule la v_0 mínima necesaria, en $\frac{km}{s}$, para el satélite de la parte A) pueda alcanzar una altura de 300 km sobre la superficie terrestre (compárela con la velocidad de escape de la tierra).

C. Considere ahora que el satélite se encuentra en órbita elíptica alrededor de la Tierra como se muestra en la figura. Si parte del apogeo (el punto más lejano a la Tierra) a una distancia máxima r_a, obtenga su velocidad en función de$G$, M_T (masa de la Tierra), r, r_a y r_p, siendo r_p la distancia en el perigeo (punto más cercano a la Tierra).

Datos: $R_T = 6400km$



Problema 3.

Sea una masa μ sometida a una fuerza central $\vec{F} = -\frac{K}{r^3}\vec{r}$. Tome la segunda ley de Newton expresada como$\mu\ddot{\vec{r}} = -\frac{K}{r^3}\vec{r}$ y multiplique el lado derecho y el lado izquierdo vectorialmente por $\vec{L} = \vec{r} \times \mu\dot{\vec{r}}$.

A. Muestre que el lado izquierdo de esa ecuación vectorial se puede escribir como una derivada total respecto al tiempo de un producto que involucra al momento angular $\vec{L}$.

B. Muestre que el lado derecho de esa ecuación vectorial se puede escribir como una derivada total respecto al tiempo de un término proporcional a $\vec{r}$. Ayuda: utilice primero la regla para desarrollar el doble producto vectorial. Verifique que las dimensiones son correctas.

C. ¿Qué puede decir del vector $\vec{C} = \dot{\vec{r}} \times \vec{L} - K\vec{r}/r$? Suponga que la energía mecánica es $E < 0$. ¿Qué dirección tiene ese vector $\vec{C}$ en el punto de intersección de la trayectoria elíptica con el eje mayor?

D. Calcule el modulo al cuadrado del vector $\vec{C}$ y expréselo en términos de E,l (modulo del momento angular), Ky μ.